Devoir Libre

7 Topologie des matrices

Blague du jour

☛ Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de notes et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de notes !

Ernesto Cesàro (1859-1906) — Mathématicien du jour

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. En théorie des nombres, il est l'origine du résultat suivant : La probabilité pour que deux nombres entiers, choisis aléatoirement, soient premiers entre eux est égale à 0,6.Sa mort fût survenue alors qu'il tenta de sauver son plus jeune fils, en train de se noyer.

Énoncé (extrait CNC)

Partie I : Densité

① On se propose de montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a Dire pourquoi l'application $\det : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$ est continue.

b En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{sp}(A) = \{0\}$, montrer que la suite $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A.

d Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{sp}(A) \neq \{0\}$ et soit $\varepsilon = \min\{|\lambda|, \text{ tel que } \lambda \in \operatorname{sp}(A) \setminus \{0\}\}$.

i Justifier que ε existe.

ii Montrer que la suite $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k\geq \frac{1}{\varepsilon}+1}$ est une suite à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A.

② **Application**

a Montrer que l'application $\chi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A(X) \end{array}$ est continue.

b Soient A et B deux matrices réelles d'ordre n.

i On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

ii Montrer que ce résultat subsiste si on se suppose plus A inversible.

c Montrer que si un matrice commute avec toutes les matrices inversibles, alors elle commute avec toute matrice carrée.

③ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note par $\operatorname{sp}(A)$ le n-uplet formé par les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

④ Soit (A_n) une suite de matrices carrés convergente vers A et soit P une matrice carrée inversible, montrer que PA_nP^{-1} converge vers A.

⑤ . **a** Soit T une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et soit $\varepsilon = \min \left\{ \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{2} \text{ tel que } \lambda_i \neq \lambda_j \right\}$. Montrer que pour tout entier k tel que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$, le polynôme caractéristique de $T - \operatorname{diag}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+n}\right)$ est à racines simples.

b En déduire que l'ensemble des matrices à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑥ Montrer que dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans celui des matrices trigonalisables.

⑦ Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Partie II : Parties fermés

① Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $O_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un fermé borné, en déduire qu'il est compact.

② Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré p. Montrer que les racines de P sont toutes dans le disque fermé D de centre 0 et de rayon $R = \max\{1, pM\}$, avec $M = \max_{0 \leq i \leq p-1} |a_i|$.

③ On se propose de montrer dans cette question que l'ensemble des polynômes de degré p unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.

Soit $P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)}X^{p-1} + \cdots + a_1^{(n)}X + a_0^{(n)}$ une suite de polynômes unitaires de degré p scindés sur $\mathbb{R}$ qui converge vers un certain polynôme P

a Dire pourquoi P est de la forme $\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$.

b Montrer que : $\lim_{n \to \infty} a_i^{(n)} = a_i$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$.

c Dire pourquoi $a_p = 1$.

d Pour tout entier naturel n, notons $Z_n = (z_1^{(n)}, \cdots, z_p^{(n)})$ une liste des zéros (supposés réels) du polynôme P_n pris dans un ordre arbitraire, mais bien sûr comptés avec leurs multiplicités.
Montrer que la suite (Z_n) admet une suite extraite $(Z_{\varphi(n)})$ convergente, de limite $Z = (z_1, \cdots, z_p)$.

e En déduire que $\prod_{i=1}^{p}(X - z_i)$.

f Conclure

Partie III : Connexité par arc

Dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme de Schur-Frobenius $\|.\|$: $A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ désigne $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathrm{Glp}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg(\pi_A) = n-1\}.$$

On admet le résultat suivant : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. $\deg \pi_A = n-1$ si et seulement si existe une matrice P dans $\mathrm{Gl}_n\mathbb{K}$ et $a_0, \ldots, a_{n-2}$, α, éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k\alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $\mathrm{Glp}_n(\mathbb{R})$.

① Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$ est continue et que $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ est un ouvert.

② Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

③ Soit $(A, H) \in \mathrm{Gl}_n\mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A + H$ est une matrice inversible et exprimer $(A+H)^{-1} - A^{-1}$ comme limite d'une suite convergente.
(*On pourra écrire* $A + H = A(I_n + A^{-1}H$.))

④ En déduire que l'application $\mathcal{I} : \mathrm{G}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^{-1}$ est continue.

⑤ Soient A et B deux éléments de $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x, coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.

⑥ Soient $z_1, \ldots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$, soit $\phi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\phi(t) = \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ avec

$$\gamma(t) = \begin{cases} t(1+2ir) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

⑦ Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.

⑧ Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit valeurs dans $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ et conclure.
(*Si* $I = \{i \in \{1, \ldots, p\}, Im\ z_i > 0\}$ *n'est pas vide, choisir* $r < \min\{Im\ z_i, i \in I\}$.)

⑨ On admet que $\mathrm{Glp}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice de la forme (1), montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in \mathrm{G}(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.

⑩ Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \ldots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k\alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \ldots, a_{n-2}$ respectivement par

$ta_1, \ldots, ta_{n-2}, \alpha$ par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} ta_k(t\alpha)^k - a_0$,

a Montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue.

b Calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

c Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Fin

Á la prochaine