DL 1 Problème du point fixe.

Blague du jour

Une souris rencontre sa copine : J'ai décidé de me mettre au régime, lui dit-elle.
- Tu ne manges plus ton fromage gruyère alors ?
- Si, mais je ne mange plus que les trous !

Comment appelle t-on un chien sans pattes ?
Réponse : On ne l'appelle pas, on va le chercher !

Comment appelle-t-on une chauve-souris qui a des cheveux ?
Réponse : Une souris.

Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704)

Mathématicien du jour

Marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, de La Chaise, de Le Brau et d'autres lieux, mathématicien français. Il est plus connu pour la règle qui porte son nom. Il est aussi l'auteur du premier livre connu sur le calcul infinitésimal différentiel, publié en 1696, ses textes comportent des conférences de son professeur Jean Bernoulli. C'est d'ailleurs ce dernier qui a donné au marquis toutes les donnes nécessaires pour réaliser le livre au nom de l'Hôpital, dans un le but de le publier sous un nom français, car Bernoulli est Suisse.

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application f de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K \in]0,1[$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

① On se propose de montrer que toute application contractante admet un unique point fixe. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, on pose $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

a Montrer que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq k^{n-1}\|x_1 - x_0\|$ pour tout $n \geq 1$.

b En déduire que (x_n) est de Cauchy, puis qu'elle converge.

c Montrer que $x = \lim x_n$ est un point fixe de f.

② Soit f une application de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n.

a Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.

b Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.

c En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

③ Soit X et F deux parties d'un espace vectoriel normé, F étant une partie complète. On considère une application $F : X \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ continue, et k-contractante en la sec-

✉ : mamouni.myismail@gmail.com
مُمُوني مُولَاي اسماعيل

onde variable, c'est–dire qu'elle existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall \lambda \in X,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|F(\lambda,x) - F(\lambda,y)\| \leq k\|x-y\|.$$

a Montrer que, pour tout $\lambda \in X$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $F(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$.

b Montrer ensuite que l'application $X \to E$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

c Montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \dfrac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

④ Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|.$$

a Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).

b Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E complet ?

⑤ $\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $\exists \alpha \in]0; \frac{1}{2}[$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

a Montrer que f admet au plus un point fixe.

b On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.

i Montrer que $\forall n \geq 0$,

$$\|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|u_{n+1} - u_n\|.$$

ii Montrer que la suite u est de Cauchy.

iii Conclure.

Fin

Á la prochaine