.

Mamouni My Ismail

Devoir libre N°8

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Extrait du CNC 2001, MP.

Blague du jour

● Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de notes et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de notes !

● C'est l'histoire de deux fous qui marchent dans la rue, un des deux prend une saleté dans sa main et dit à son ami : En plus que fou tu es aveugle, regarde sur quoi on allait marcher !

Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien du jour

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. Il propose une définition possible d'une suite divergente, connue aujourd'hui comme "Somme de Cesàro", donne par la limite de la moyenne des sommes des termes partiels de la succession. En théorie des nombres, il est l'origine du résultat suivant : Soit p et q deux nombres entiers choisis aléatoirement. La probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux est gale 0,6.
Il fut professeur universitaire jusqu'à sa mort survenue alors qu'il tenta de sauver son plus jeune fils Manlio qui était en train de se noyer.

Dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|.\|$: $A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $G(\mathbb{K})$ désigne $GL_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg(\pi_A) = n-1\}.$$

On admet le résultat suivant : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. $\deg \pi_A = n-1$ si et seulement si existe une matrice P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et $a_0, \dots, a_{n-2}$, α, éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$.

1 Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto \det(A)$ est continue et que $G(\mathbb{K})$ est un ouvert.

2 Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

3 Soit $(A, H) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A + H$ est une matrice inversible et exprimer $(A+H)^{-1} - A^{-1}$ comme limite d'une suite convergente.
(On pourra écrire $A + H = A(I_n + A^{-1}H$.)

4 En déduire que l'application $\mathcal{I} : \mathrm{G}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ est continue.

5 Soient A et B deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x, coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.

6 Soient $z_1, \dots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$,
soit $\phi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \phi(t) = \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ avec $\gamma(t) = \begin{cases} t(1+2ir) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

7 Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.

8 Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et conclure.
(Si $I = \{i \in \{1, \dots, p\}, \mathrm{Im}\ z_i > 0\}$ n'est pas vide, choisir $r < \min\{\mathrm{Im}\ z_i, i \in I\}$.)

9 On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice de la forme (1), montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in \mathrm{G}(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.

10 Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \dots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k\alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \dots, a_{n-2}$ respectivement par $ta_1, \dots, ta_{n-2}$, α par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} ta_k(t\alpha)^k - a_0$, montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue ; calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

11 Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Fin

À la prochaine