.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre N°8 (Mamouni My Ismail)

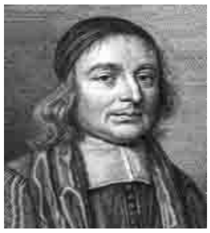
Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Quel sont les deux animaux les plus intelligents ? - Le Cerf et le Veau (cerveau)
- C'est un chien qui rencontre un crocodile :

- Le crocodile dit au chien : Salut, sac à puces !
- Et le chien lui répond : Salut, sac à main !



John Wallis (1616-1703)

Mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society. Ses travaux concernent principalement le calcul différentiel et intégral. On lui doit le symbole de l'infini ∞.

Mathématicien du jour

1 On sait que le déterminant est une forme n-linéaire donc continue.

D'autre part $G(\mathbb{C}) = \overset{-1}{\det}(\mathbb{C}^*)$ et $G(\mathbb{R}) = \overset{-1}{\det}(]0,+\infty[)$ sont ouverts car $\mathbb{C}^*$ et $]0,+\infty[$ sont ouverts et det continue.

2 Posons $A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}, B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $AB = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n}$, avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$, d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a : $c_{i,j}^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$, donc

$$\|AB\|^2 = \sum_{1\le i,j\le n} c_{i,j}^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2$$

3 Montrons d'abord ce résultat, si E est muni d'une norme d'algèbre $\|\|$ et si $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$, alors $(1-x)$ inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. En effet, on sait que $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$ et $\|x^{n+1}\| < \|x\|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\|x\| < 1$, donc $(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1$, où $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k$. Revenons à notre problème maintenant, donc

$$\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1} \Longrightarrow \|A^{-1}H\| \le \|A^{-1}\|.\|H\| < 1 \Longrightarrow I_n + A^{-1}H \text{ inversible, d'inverse } \sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^k$$

Donc $A + H = A(I_n + A^{-1}H)$ est aussi inversible, d'inverse $(I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^k A^{-1} = A^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^k A^{-1}$, d'où $(A+H)^{-1} - A^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^k A^{-1}$

4 Il suffit de montrer que $\lim\limits_{H\to 0}(A+H)^{-1} = A^{-1}$. En effet, dans ce cas on peut supposer $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$ et donc $\exists r < 0$ tel que $\|A^{-1}H\| < r < 1$, donc

$$\begin{aligned}\|(A+H)^{-1} = A^{-1}\| &= \|\sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}\| \leq \|A^{-1}H)^kA^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\|A^{-1}H\|^k \\ &\leq \|H\|.\|A^{-1}\|^2\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{\|H\|.\|A^{-1}\|^2}{1-r} \xrightarrow[H\to 0]{} 0\end{aligned}$$

5 Posons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, donc $T(x) = \det(xB+(1-x)A) = \sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod\limits_{i=1}^{n}(xb_{i,\sigma(i)} + (1-x)a_{i,\sigma(i)})$ est un polynôme en x de degré inférieur à n non nul, car $T(1) = \det B \neq 0$.

6 $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^+}\gamma(t) = \lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^-}\gamma(t) = \dfrac{1+2ir}{2} = \gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc γ est continue et par suite ϕ aussi, or $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$, donc $\phi(0) = A$ et $\phi(1) = B$.

7 On a $\det\phi(t) = T(\gamma(t))$ et $T(x) = \prod\limits_{i=1}^{p} x - z_i$, donc $\det\phi(t) = \prod\limits_{i=1}^{p}\gamma(t) - z_i$,

or $\begin{aligned}\mathrm{Im}(\gamma(t) - z_i) &= 2tr - \mathrm{Im} z_i & \text{si } 0 \leq t \leq \tfrac{1}{2} \\ &= 2r(1-t) - \mathrm{Im} z_i & \text{si } 0 \leq t \leq 1\end{aligned}$ Supposons $\mathrm{Im}(\gamma(t) - z_i) = 0$.

- 1ér cas : $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$, dans ce cas $\mathrm{Im} z_i = 2tr \leq r$, absurde.
- 2ème cas : $\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1$, dans ce cas $\mathrm{Im} z_i = 2(1-t)r \leq r$, absurde.

Ainsi $t \mapsto \phi(t)$ est un chemin inclu dans $GL_n(\mathbb{C})$, joignant A et B, donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

8 Découle du fait que les applications $P \mapsto PJ, P \mapsto P^{-1}$ sont continues donc leur produit aussi, et du fait que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

9 On a : $M(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & ta_0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & ta_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & ta_{n-3} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & ta_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & ta \end{pmatrix}$, avec $ta = t\alpha$, $ta_k = t\alpha, \forall k \geq 1$, $ta_0 = ta^{n-1} - \sum\limits_{k=1}^{n-2} ta_k ta^k$, $ta^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} ta_k ta^k$ Ainsi $M(t)$ remplit les conditions des matrices de la forme (1), donc $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$. D'autre part les coéfficients de $M(t)$ sont des fonctions polynômiales en t, donc $\psi : t \mapsto M(t)$ est continue, c'est donc un chemin inclus dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, joignant $J = \psi(0)$ et $M = \psi(1)$.

10 D'aprés la question précedente toute matrice peut étre jointe à J par un chemin continue inclus dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, si on prend deux matrices quelconques M et N dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, on joigne M à J, puis J à N, donc M à N, d'où $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

À la prochaine