.

Mamouni My Ismail

Devoir libre N°9
Problèmes de points fixes

MP-CPGE Rabat

26 Novembre 2010

Blague du jour

Bientôt vous serez ingénieur, peut être ingénieur informaticien. Vérifier sur la liste ci-dessous si vous avez le profil, les types d'ingénieurs en informatique sont :
- L'ingénieur DISQUE DUR : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
- L'ingénieur CD-ROM : il va toujours plus vite avec le temps.
- L'ingénieur RAM : il oublie tout de vous, ds le moment o vous lui tournez le dos.

Hermann Minkowski (1864 - 1909)

Mathématicien du jour

Mathématicien et un physicien théoricien allemand. Il gagna le Grand Prix de l'Académie des sciences de Paris après sa résolution du problème décomposition des nombres entiers en somme de cinq carrés . David Hilbert fut l'un de ses professeurs et Albert Einstein l'un de ses élèves. On lui doit surtout l'espace à 4 dimension (espace-temps) appelé de Minkowski, considéré comme la base de tous les travaux sur la théorie de la relativité. Son travail le plus original est sans aucun doute sa géométrie des nombres. Ces travaux posent de nombreuses questions sur le gain de place, ou comment faire rentrer une forme donnée à l'intérieur d'une autre forme donnée.

Soit E un espace vectoriel normé muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application g de E dans E est dite contractante s'il existe $K \in]0,1[$ tel que

$$\|g(x)-g(y)\| \leq K\|x-y\| \qquad \forall x,y \in E.$$

1 Soit f application contractante définie sur $\mathbb{R}^d$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (quelconque mais fixé). on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\|x_{n+1}-x_n\| \leq k^n\|x_1-x_0\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire une majoration de $\|x_{n+p}-x_n\|$ en fonction de k, n, x_0 et x_1.

c) En déduire que (x_n) est de Cauchy, puis qu'elle converge, soit x sa limite.

d) Montrer que x est un point fixe de f.

e) Conclure que toute application contractante admet un unique point fixe.

g) Le résultat précédent est-in encore valable si l'on remplace $\mathbb{R}^d$ par un espace vectoriel normé E de dimension finie.

h) Le résultat précédent est-in encore valable si l'on remplace $\mathbb{R}^d$ par un espace vectoriel normé E de dimension quelconque. Si c'est non, quelle est la condition à imposer à E pour le résultat en question soit encore valable.

2 Soit f une application de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 l'unique point fixe de f^n.

a) Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.

b) Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.

c) En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

3 Soit X et F deux parties d'un espace vectoriel normé, F étant une partie complète. On considère une application $F : X \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ continue, et k-contractante en la seconde variable, c'est-dire qu'elle existe $k \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall \lambda \in X,\ \forall (x, y) \in E^2,\ \|F(\lambda, x) - F(\lambda, y)\| \leq k\|x - y\|.$$

a. Montrer que, pour tout $\lambda \in X$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $F(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$.

b. Montrer ensuite que l'application $X \to E$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

c. Montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \dfrac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

4 Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

a. Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).

b. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E complet ?

5 $\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\exists \alpha \in]0; \frac{1}{2}[,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

a. Montrer que f admet au plus un point fixe.

b. On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.

i. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leqslant \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\|u_{n+1} - u_n\|$.

ii. Montrer que la suite u est de Cauchy.

iii. Conclure.

À la prochaine