Corrigé Devoir Survéillé

Réduction-EVN

LUNDI 12 NOVEMBRE 2012

Problème I : Corrigé Pr. Patte, CPGE France

Le commutant $\mathcal{C}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose dans tout ce problème que : $\chi_A = P_A$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. »est pour le moins mal venue. Dans tout l'exercice, on fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $\chi_A = P_A$. On peut noter que, dans les trois questions du problème, la donnée est P_A, polynôme de degré 3 ; le théorème de Cayley-Hamilton assure donc l'égalité $\chi_A = P_A$ (à un facteur $(-1)^3$ près, suivant la convention sur le polynôme caractéristique).

① ① La matrice A a un polynôme caractéristique scindé, à racines simples, donc est diagonalisable ; de plus ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

② Si B commute avec A, elle stabilise les trois sous-espaces propres de A, qui sont des droites. Ces trois droites sont donc dirigées par des vecteurs propres de B. Une base de vecteurs propres de A est donc ausi une base de vecteurs propres de A : B et A sont simultanément diagonalisables.

③ Interpolation de Lagrange (α, β, γ distincts). On peut imposer la condition supplémentaire $\deg T \leqslant 2$.

④ D'après la remarque faite en 1.b, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P.\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma).P^{-1}$ et $B = P.\mathrm{diag}(a, b, c).P^{-1}$. Alors $\mathrm{diag}(a, b, c) = T(\mathrm{diag}(\alpha, \beta, \gamma))$ et $B = T(A)$.

⑤ Le commutant de A est donc inclus dans l'algèbre commutative $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A. L'inclusion inverse est vérifiée pour tout matrice. Donc $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$. Avec la remarque du 1.c, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$ et, comme P_A est de degré 3, (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{C}(A)$.

② ① Par définition, P_A est un polynôme annulateur de A, donc $(A - \lambda I_3)^3 = 0$. En termes d'endomorphismes, $g^3 = 0$. De plus, comme P_A est le polynôme minimal de A, $(A - \lambda I_3)^2 \neq 0$, donc $g^2 \neq 0$: g est nilpotent d'indice

2.

② On vérifie facilement que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{C}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$, la famille $\mathcal{B} = (u, g(u), g^2(u))$ est libre. Comme l'espace vectoriel est de dimension 3, cette famille est une base de $\mathbb{C}^3$. Dans une telle base, g a pour matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

③ Tout d'abord, h commute avec f, donc avec g. On en déduit $h(g(u)) = g(h(u)) = x_1 g(u) + x_2 g^2(u)$ et $h(g^2(u)) = g^2(h(u)) = x_1 g^2(u)$. La matrice de h dans $\mathcal{B}$ vaut donc $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 I_3 + x_2 N + x_3 N^2$.

④ On en déduit $h = x_1 Id + x_2 g + x_3 g^2$, puis, en substituant $f - \lambda Id$ à g, l'existence d'un polynôme T de degré au plus 2 tel que $h = T(f)$. Matriciellement, $H = T(A)$.

⑤ On conclut comme au 1.e.

③ ① Le polynôme P_A est annulateur de A, donc de f. Comme $X - \lambda_1$ et $(X - \lambda_2)^2$ sont premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux, $\mathbb{C}^3 = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \ker(f - \lambda_2 Id)^2$.

② Comme λ_1 est une valeur propre simple de f (de multiplicité 1 dans χ_A), le sous-espace propre associé $\ker(f - \lambda_1 Id)$ est de dimension 1 ; donc $\ker(f - \lambda_2 Id)^2$ est de dimension 2. De plus, c'est le noyau d'un polynôme en f, donc il est stable par f. Dans une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ adaptée à la décomposition du 3.a, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, où U représente $\widetilde{f} = f|_{\ker(f - \lambda_2 Id)^2}$. Comme $(\widetilde{f} - \lambda_2 Id)^2 = 0$, $N = U - \lambda_2 I_2$ vérifie $N^2 = 0$.
Si $N = 0$, alors la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est diagonale, f est diagonalisable et son polynôme minimal est à racines simples. Comme ce n'est pas le cas, $N \neq 0$: N est nilpotente d'indice 2.

③ (α) $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2) C = 0 \\ UV = VU \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2) C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$
Comme U admet comme polynôme annulateur $(X - \lambda_2)^2$, sa seule valeur propre est λ_2, donc $U - \lambda_1 I_2$ est inversible. On en déduit $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$

(β) Il s'agit de reprendre avec U le raisonnement des questions 2.a, b, c et d. On peut imposer la condition supplémentaire $\deg R \leqslant 1$.

(γ) Les conditions imposées signifient que λ_1 est racine de $S - \mu$ et que λ_2 est racine au moins double de $S - R$; autrement dit, que S vérifie $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ (S - R)(\lambda_2) = 0 \\ (S - R)'(\lambda_2) = 0 \end{cases}$, ou encore

$$\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}.$$

Or l'application Δ définie de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}^3$ par $\Delta(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), P(\lambda_2))$ est linéaire, injective (si $\Delta(P) = 0$, alors P est de degré au plus 2 et possède au moins 3 racines comptées avec leur multiplicité, donc vaut 0), entre deux espaces vectoriels de même dimension finie ; donc Δ est un isomorphisme. D'où l'existence de $S \in \mathbb{C}_2[X]$ satisfaisant les conditions $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}$.

(δ) $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & 0 \\ 0 & S(U) \end{pmatrix}$. Or $S(\lambda_1) = \mu$; de plus, comme $(X-\lambda_2)^2$ est annulateur de U, $S(U) = R(U)$. Donc $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & R(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = M$.

④ Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et b l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B. Alors B commute avec $A \iff b$ commute avec f, i.e, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$ commute avec $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$. C'est encore équivalent (la réciproque de 3.c.δ est évidente) à l'existence d'un polynôme $S \in \mathbb{C}_2[X]$ tel que $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$, i.e, $S(f) = b$, i.e, $S(A) = B$. Comme dans les questions 1 et 2, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$ et $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 3.

Problème II : Corrigé Pr. Deruelle, Ex-CPA, Maroc

CPA : Centre de Préparation à l'Agrégation

Question préliminaire

g est clairement de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Il reste à vérifier la continuité de g en $x = 0$. L'application définie par $F(x) = \int_0^x f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = f(x)$. Or $\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$ et donc $\lim_{x\to 0} g(x) = F'(0) = f(0)$. D'où la continuité de g sur $\mathbb{R}^+$.

Première Partie

① La linéarité de h est immédiate . Supposons $h((u_n)) = (0)$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$. On en déduit que $s_0 = u_0 = 0$ et que $\forall n \geq 1, u_n = s_n - s_{n-1} = 0$. D'où l'injectivité de h . Soit $v_n \in S$. La recherche de $(u_n) \in S$ telle que $v_n = h((u_n))$ conduit à

$u_0 = v_0$

et $\forall n \geq 1, u_n = s_n - s_{n-1} = (n+1).v_n - n.v_{n-1}$ où $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

. On en déduit la surjectivité de h .

② ① immédiat : cf. question préliminaire .

② La linéarité de l'opérateur H est immédiate . Pour $F \in \mathcal{C}, H(f) = 0$ donne $H(f)(0) = f(0) = 0$ et $\forall x > 0, F(x) = \int_{[0,x]} f = 0$. D'où $\forall x > 0, F'(x) = f(x) = 0$. H est donc bien injective .

③ Pour tout $f \in \mathcal{C}, H(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, ce qui n'est pas le cas de toute fonction de $\mathcal{C}$. H n'est donc pas surjective .

③ Soit λ une valeur propre de h et (u_n) associée . Soit p le plus petit entier tel que $u_p \neq 0$. On a alors $\lambda.u_p = \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{p+1} \cdot u_p$ et nécessairement $\lambda = \frac{1}{p+1}$. Il vient alors pour tout $n \geq p+1$, $u_n = s_n - s_{n-1} = (n+1).v_n - n.v_{n-1} = \frac{n+1}{p+1} \cdot u_n - \frac{n}{p+1} \cdot u_{n-1}$ d'où $u_n = \frac{n}{n-p} \cdot u_{n-1}$. Ceci donne $\forall n \geq p+1, u_n = C_n^p.u_p$. En conclusion les valeurs propres de h sont les valeurs $\frac{1}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$: le sous-espace propre associé à $\frac{1}{p+1}$ est de dimension un et est engendré par la suite définie par $u_n = 0$ pour $n < p$ (s'il y a lieu) , $u_p = 1$ et $\forall n \geq p, u_n = C_n^p$

④ Soit λ une valeur propre de H et $f \in \mathcal{C}$ associée . λ est non nul car H est injective d'après $I-2-b$ et d'autre part f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+s$ d'après $I-2-a$. On a alors $\forall x > 0, F(x) = \int_{[0,x]} f = \lambda x.f(x)$ d'où $\forall x > 0, (1-\lambda).f(x) = \lambda x.f'(x)$. L'équation différentielle linéaire $(1-\lambda).y = \lambda x.y'$ admet pour solutions sur $\mathbb{R}^+s$ les fonctions $y(x) = C.x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $0 < \lambda \leq 1$. L'ensemble des valeurs propres obtenu est $]0,1]$ et pour $\lambda \in]0,1]$, le sous-espace propre associé est de dimension 1 et engendré par la fonction $f(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ On peut aussi énoncer ce résultat sous la forme : les fonctions propres sont les fonctions $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \geq 0$ et $H(f_\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot f_\alpha$.

Deuxième Partie

① On a pour (u_n) dans S_b , $|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} N_\infty((u_n)) = N_\infty((u_n))$. Et : $\forall f \in \mathcal{C}, \forall x > 0$, $|H(f)(x)| \leq \frac{1}{x} \cdot x.\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$, majoration qui reste valable pour $x = 0\ldots$

② Les majorations ci-dessus montrent que h_∞ et H_∞ sont continues et vérifient $|||h_\infty||| \leq 1$ et $|||H_\infty||| \leq 1$ L'image de la suite constante et égale à 1 par h_∞ est elle-même et par conséquent $|||h_\infty||| = 1$ et est atteinte pour cette suite . On obtient un résulat analogue pour H_∞ avec la fonction constante égale à 1 .

③ ① Donnons une démonstration directe , sans reproduire la démonstration classique du théorème de Césaro . Observons que $v_n = h_\infty((u_n))$ est également croissante (ce qui est clair dans la mesure où, lorsque l'on passe de v_n à v_{n+1} , on ajoute dans la moyenne un terme plus grand que les précédents . . .) : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+2} \cdot [\sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}] - \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{1}{n+2} \cdot [u_{n+1} - \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} u_k] = \dfrac{1}{n+2} \cdot \dfrac{\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k)}{n+1} \geq 0$. Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$ (immédiat) et donc v_n est majoré par λ . Par conséquent v_n converge vers un réel l vérifiant $l \leq \lambda$. On a également : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} \geq \dfrac{1}{2n+1} \cdot [\sum_{k=0}^{n} u_k + n.u_n] = \dfrac{n+1}{2n+1} \cdot v_n + \dfrac{n}{2n+1} \cdot u_n$. Un passage à la limite donne $l \geq \dfrac{l}{2} + \dfrac{\lambda}{2}$, d'où $l \geq \lambda$. Finalement $l = \lambda$.

② L'égalité est immédiate puisque $l = N_\infty(v_n) = N_\infty(h_\infty((u_n)))$ et $N_\infty((u_n)) = \lambda$, les deux suites étant croissantes . Ceci montre que la norme de h_∞ est atteinte en de telles suites (u_n) .

④ ① Notons $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. On a de façon immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq N_\infty((u_n)) = N_\infty((|u_n|))$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq V_n \leq N_\infty((|u_n|))$, puis $N_\infty((u_n)) = N_\infty((|u_n|)) = N_\infty(v_n) \leq N_\infty(v_n) \leq N_\infty((|u_n|))$. Finalement on obtient $N_\infty((|u_n|)) = N_\infty(v_n) = N_\infty(h_\infty((|u_n|)))$.

② Pour simplifier les notations , en utilisant le résultat de la question précédente , on peut se ramener au cas où (u_n) est une suite positive . On notera aussi $N_\infty((u_n)) = \lambda$. Pour tout $n \geq n_0, v_n = \dfrac{1}{n+1} \cdot [\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k] \leq \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \dfrac{n-n_0+1}{n+1} \cdot c$ D'où $v_n \leq c + \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$. Le second terme du membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite qui converge vers zéro : $\exists N_0 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N_0, v_n \leq c + \dfrac{\lambda - c}{2} = \dfrac{c+\lambda}{2} < \lambda$ Par ailleurs l'hypothèse $0 \leq u_0 < \lambda$ implique que $\forall n < N_0$, $v_n < \lambda$. En conséquence , si l'on note $V = \max_{n \in [0, N_0-1]} v_n$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \mathrm{Max}\{V, \dfrac{c+\lambda}{2}\} = d < \lambda$.

③ L'hypothèse faite à la question précédente contredit le fait que h_∞ atteint sa norme en la suite $(|u_n|)$.

⑤ Supposons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Soit $\varepsilon > 0$, puis $A \geq 0$ tel que $\forall x > A, |f(x) - l| \leq \varepsilon$. On a $\forall x > A, |H(f)(x) - l| =$

$|\frac{1}{x}\cdot\int_{[0,x]}(f(x)-l).dx| \leq \frac{1}{x}\cdot\int_0^A |f(x)-l|.dx + \frac{1}{x}\cdot\int_A^x |f(x)-l|.dx$
$\leq (\|f\|_\infty+|l|).\frac{A}{x} + \frac{1}{x}\cdot(x-A).\varepsilon \leq (\|f\|_\infty+|l|).\frac{A}{x}+\varepsilon$. On en déduit aisément que $\lim\limits_{x\to+\infty} H(f)(x) = l$ en utilisant le fait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{A}{x} = 0$.

Quatrième partie

① De l'inégalité $|f.g| \leq \frac{1}{2}\cdot(f^2+g^2)$ on déduit la sommabilité de $f.g$ sur $\mathbb{R}^+s$. On notera que si f et g sont de carré sommable , $f+g$ l'est aussi puisque $(f+g)^2 = f^2+g^2+2.fg$ et que fg est sommable ce qui permet d'obtenir la structure d'espace vectoriel de L^2 ...Les diverses vérifications concernant le produit scalaire sont sans difficultés .

② ① La majoration $|f| \leq \frac{1}{2}\cdot(1+f^2)$ et la sommabilité de f^2 sur $\mathbb{R}^+s$ donc sur $]0,x]$ montre que f est bien sommable sur $]0,x]$. On a par Cauchy-Schwarz $\left(\int_{]0,x]} f\right)^2 \leq \left(\int_{]0,x]} 1\right).\left(\int_{]0,x]} f^2\right) = x.\int_{]0,x]} f^2$ d'où le résultat demandé

② Avec pour $x>0$, $F(x) = \int_{]0,x]} f$, on a $F'(x) = f(x)$. Il vient : $\int_\alpha^x \phi_f^2 = [-\frac{1}{t}\cdot F^2(t)]_\alpha^x + 2\int_\alpha^x \frac{f(t)}{t}\cdot F(t).dt$. Par ailleurs Cauchy-Schwarz donne $\int_\alpha^x \frac{f(t)}{t}\cdot F(t).dt \leq (\int_\alpha^x f^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\alpha^x \phi_f^2)^{\frac{1}{2}}$ D'où : $\int_\alpha^x \phi_f^2 \leq \frac{1}{\alpha}\cdot F^2(\alpha) + 2(\int_\alpha^x f^2)^{\frac{1}{2}}.(\int_\alpha^x \phi_f^2)^{\frac{1}{2}}$ On a donc : $(\int_\alpha^x \phi_f^2)^{\frac{1}{2}}.[(\int_\alpha^x \phi_f^2)^{\frac{1}{2}} - 2\|f\|_2] \leq \frac{1}{\alpha}\cdot F^2(\alpha)$. Or la question $2-a$ a pour conséquence $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\cdot F^2(\alpha) = 0$: l'hypothèse $\{\int_\alpha^x \phi_f^2 \,;\, 0<\alpha\leq x\}$ non borné contredirait ce résultat . En conséquence ϕ_f est de carré sommable sur $\mathbb{R}^+s$ et un passage à la limite quand $\alpha\to 0$ et $x\to+\infty$ donne : $\|\phi_f\|_2 \leq 2\|f\|_2$

③ ① Le résultat est une conséquence immédiate de $IV-1$.

② Pour tout $x>0$, $t\mapsto\frac{1}{t}$ et f sont de carré sommable sur $[x,+\infty[$. Il en résulte , comme précédemment, que leur produit est sommable sur $[x,+\infty[$: l'application $G(x) = \int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\cdot dt$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}^+s$. Par ailleurs Cauchy-Schwarz donne : $\forall x>0, G^2(x) \leq \left(\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\right).\left(\int_x^{+\infty} f^2\right) = \frac{1}{x}\cdot\int_x^{+\infty} f^2$.

③ On a déjà montré que G est bien définie sur $\mathbb{R}^+s$. Une intégration par parties donne : $\int_\alpha^x G^2 = [t.G^2(t)]_\alpha^x + 2\int_\alpha^x f(t).G(t).dt$ On en déduit $\int_\alpha^x G^2 \leq x.G^2(x) + 2\int_\alpha^x f(t).G(t).dt \leq x.G^2(x) + 2\left(\int_\alpha^x f^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\alpha^x G^2\right)^{\frac{1}{2}}$ D'où $\int_\alpha^x G^2 \leq x.G^2(x) + 2\|f\|_2.\left(\int_\alpha^x G^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On conclut alors par un raisonnement identique à celui fait dans la question $IV-2-b$: $G \in L^2$ et $\|G\|_2 \leq 2.\|f\|_2$.

④ Notons désormais , pour $f \in L^2$ et $x > 0$, $f^*(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \cdot dt$ Une intégration par parties donne : $\int_\alpha^x f.H_2(g) = \left[-f^*(t).\int_{]0,t]} g\right]_\alpha^x + \int_\alpha^x g.f^*$ Les applications $f, g, H_2(g)$ et f^* sont dans L^2 , donc $f.H_2(g)$ et $g.f^*$ sont bien sommables sur $\mathbb{R}^+ s$ Il s'agit donc de montrer que $t \rightarrow f^*(t).\int_{]0,t]} g$ tend vers zéro quand $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow +\infty$. Or de précédentes majorations ont montré que , pour f et g dans L^2 , $\left(\int_{[0,x]} g\right)^2 \leq x.\int_{[0,x]} g^2$ et $(f^*(x))^2 = \left(\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \cdot dt\right)^2 \leq \frac{1}{x} \cdot \int_x^{+\infty} f^2$. Ceci permet d'obtenir la majoration $\forall x > 0, \ |f^*(x).\int_{]0,x]} g|^2 \leq \left(\int_{]0,x]} g^2\right).\left(\int_x^{+\infty} f^2\right)$ qui donne le résultat escompté . Reste l'unicité : soient f_1^* et f_2^* deux éléments de L^2 répondant à la question . On a alors $\forall g \in L^2, (\ f_1^* \ / \ g\ ) = (\ f_2^* \ / \ g\ )$, d'où $\forall g \in L^2, (\ f_1^* - f_2^* \ / \ g\ ) = 0$ et on conclut en prenant $g = f_1^* - f_2^*$.

⑤ La linéarité de L_2 est immédiate . La question $IV-3-c$ a déjà montré que $\forall f \in L^2, \|f^*\|_2 \leq 2\|f\|_2$, ce qui donne la continuité de L_2 et $|||L_2||| \leq 2$.

⑥ On a d'après ce qui précède : $\forall (f,g) \in L^2, (\ f \ / \ H_2(g)\ ) = (\ L_2(f) \ / \ g\ )$. On en déduit : $\forall g \in L^2, \|H_2(g)\|_2^2 = (\ L_2(H_2(g)) \ / \ g\ ) \leq |||L_2|||.|||H_2|||.\|g\|_2^2$ qui donne $|||H_2||| \leq |||L_2|||$. De même en partant de : $\forall f \in L^2, \|L_2(f)\|_2^2 = (\ f \ / \ H_2(L_2(f))\ )$, on obtient $|||L_2||| \leq |||H_2|||$.

Cinquième Partie

① ① L'application $x \mapsto n_2(Ax)$ est continue sur la sphère-unité de $\mathbb{R}^p$ qui est un compact de $\mathbb{R}^p$: $\exists x_0 \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\} \ / \ n_2(Ax_0) = \sup_{n_2(x)=1} n_2(Ax) = |||A|||$.

② $A^* \circ A$ est un endomorphisme symétrique positif , donc diagonalisable , de $\mathbb{R}^p$. Soient $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_p$ les valeurs propres de $A^* \circ A$ rangées par ordre croissant et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres adaptée . On a pour $x = \sum_{i=1}^p x_i.e_i$ appartenant à la sphère unité , $\lambda_1 \leq n_2(Ax)^2 = (\ A^* \circ A(x) \ / \ x\ ) = (\ \sum_{i=1}^p x_i\lambda_i.e_i \ / \ \sum_{i=1}^p x_i.e_i\ ) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_p$. On en déduit que $|||A||| \leq \sqrt{\lambda_p} = \left(\max_{\lambda \in \mathrm{sp}(A^* \circ A)} \lambda\right)^{\frac{1}{2}}$. On en fait égalité car on atteint cette valeur en tout vecteur propre unitaire associé à λ_p . Réciproquement si $\sqrt{\lambda_p} = |||A||| = n_2(Ax)$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ appartenant à la sphère-unité (sans perte de généralité) , on a : $n_2(Ax)^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 = \lambda_p$ qui donne $\sum_{i=1}^p x_i^2(\lambda_p - \lambda_i) = 0$ et donc pour tout i tel que $x_i \neq 0$, $\lambda_i = \lambda_p$; x est bien un vecteur propre (associé à λ_p).

② Supposons , sans perte de généralité , que $\|f\|_2 = 1$. On a : $|||H_2|||^2 = \|H_2(f)\|_2^2 = (\ L_2 \circ H_2(f)\ /\ f\ ) \leq \|L_2 \circ H_2(f)\|_2 \leq |||L_2|||.|||H_2||| = |||H_2|||^2$ d'après $V-6$. Cela entraîne en particulier l'égalité $(\ L_2 \circ H_2(f)\ /\ f\ ) = \|L_2 \circ H_2(f)\|_2$: nous sommes en présence d'un cas d'égalité dans une inégalité de Schwarz et ceci implique l'existence d'un réel λ tel que $L_2 \circ H_2(f) = \lambda.f$.

③ La recherche d'éléments $f \in L^2$ et de $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $L_2 \circ H_2(f) = \lambda.f$ nous amène (dériver deux fois) à chercher les solutions non nulles dans L^2 d'équations différentielles de la forme :

$$\lambda x^2.f''(x) + 2\lambda x.f'(x) + f(x)\ ,\ x \in \mathbb{R}^+s$$

Le changement de variable $x = e^t$ transforme cette équation différentielle en :

$$\lambda.y''(t) + \lambda.y'(t) + y(t) = 0\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

On observera que $\|H_2(f)\|_2^2 = (\ L_2 \circ H_2(f)\ /\ f\ ) = (\ \lambda.f\ /\ f\ ) = \lambda.\|f\|_2^2$ et donc $\lambda \geq 0$. Par ailleurs $|\lambda| \leq |||L_2 \circ H_2||| = |||H_2|||^2 \leq 4$. D'où nécessairement $\lambda \in]0,4]$ puisque $\lambda = 0$ conduit à $f = 0$. Les solutions de l'équation différentielle initiale s'écrivent alors $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot [a.\cos(\beta.\ln x) + b.\sin(\beta.\ln x)]$ où a , $b \in \mathbb{R}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{\lambda(4-\lambda)}}{2\lambda}$. Il ne reste plus qu'à constater que de telles fonctions , sauf dans le cas trivial $f = 0$, ne sont pas de carré sommable sur $\mathbb{R}^+s$.

④ La démarche est rigoureusement la même que dans la question précédente .

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com