PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Survéillé

Réduction-EVN

12 NOVEMBRE 2012 (4 HEURES)

Blague du jour

☛ Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de notes et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de notes !

Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien du jour

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. En théorie des nombres, il est l'origine du résultat suivant : La probabilité pour que deux nombres entiers, choisis aléatoirement, soient premiers entre eux est égale à 0,6.Sa mort fût survenue alors qu'il tenta de sauver son plus jeune fils, en train de se noyer.

ds-red

Problème I, e3a 2011, MP : Commutant en dimension 3

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, le polynôme caractéristique d'une matrice A est noté χ_A, le polynôme minimal de la matrice A est noté P_A.

On appelle commutant de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(A)$ qui commutent avec la matrice A.

On suppose dans tout ce problème $P_A = \chi_A$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

① On suppose dans cette question que P_A est à racines simples α, β et γ.

① Montrer que la matrice A est diagonalisable.

② Soit B une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A, montrer que la matrice B est diagonalisable.

③ Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$\begin{cases} T(\alpha) = a \\ T(\beta) = b \\ T(\gamma) = c \end{cases},$$
où a, b et c sont les valeurs propres de la matrice B.

④ En déduire que le polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifie l'égalité
$$B = T(A).$$

⑤ En déduire le commutant de la matrice A.

② On suppose, dans cette question, qu'il existe un nombre complexe λ tel que $P_A = (X-\lambda)^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice A.

① Montrer que l'endomorphisme $g = f - \lambda Id$ est nilpotent d'indice 3, c'est à dire vérifie les relations suivantes : $\begin{cases} g^3 = 0 \\ g^2 \neq 0 \end{cases}$.

② Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{C}^3$ tel que la famille $(u, g(u), g^2(u))$ soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.

③ Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A. On appelle h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice H et on note $h(u) = x_1 u + x_2 g(u) + x_3 g^2(u)$, où x_1, x_2, x_3 sont trois nombres complexes. Déterminer, en fonction de x_1, x_2, x_3, la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

④ Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$H = Q(A).$$

⑤ En déduire le commutant de la matrice A.

③ On suppose, dans cette question, qu'il existe deux nombres complexes distincts λ_1 et λ_2 tels que
$$P_A = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^2.$$

① Montrer
$$\mathbb{C}^3 = \ker(f - \lambda_1 Id) \oplus \ker(f - \lambda_2 Id)^2.$$

② Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, avec $U = \lambda_2 I_2 + N$, I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2, c'est à dire vérifiant les propriétés suivantes : $\begin{cases} N^2 = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$.

③ On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{C} \\ L \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}) \\ C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \end{cases}$, on suppose que les matrices M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ commutent.

(a) Montrer $\begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ NV = VN \end{cases}$.

(b) Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $R(U) = V$.

(c) Montrer qu'il existe un polynôme S de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} X - \lambda_1 \text{ divise } S - \mu \\ (X-\lambda_2)^2 \text{ divise } S - R \end{cases}$.

(d) En déduire $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$.

④ Déterminer le commutant de la matrice A.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Problème II, cnc 98, MP : Norme subordonnée de la moyenne

Le problème porte sur l'étude d'applications linéaires agissant comme une moyenne sur des suites ou des fonctions. On notera par la suite :

- S l'espace vectoriel des suites réelles. On note $(u_n)_{n\geq 0} = (u_n)$ les éléments de S.
- S_b l'espace vectoriel des éléments bornés de S. On munit S_b de la norme définie par $N_\infty((u_n)) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$
- $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}_b$ l'espace vectoriel formé des éléments de $\mathcal{C}$ bornés sur $\mathbb{R}_+$. On munit cet espace vectoriel de la norme $||f||_\infty = \sup\limits_{x\geq 0} |f(x)|$.
- L^2 l'espace vectoriel des applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que $|f|^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour f dans L^2, on pose $||f||_2 = \left(\int_{]0,+\infty[} |f|^2\right)^{1/2}$.

Question préliminaire :

Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Montrer que l'application g définie par

$$g(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0 \; g(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f$$

est un élément de $\mathcal{C}$.

Pour tout le problème, on définit les applications suivantes

(i) $h : S \to S$, $h((u_n)) = (v_n)$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\; v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(ii) $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ par

$$H(f)(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0,\; H(f)(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f.$$

Pour $(E, ||\;||)$ un espace vectoriel normé, on note $L_c(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E. On rappelle que l'application $|||\;|||$ définie par

$$\forall \phi \in L_c(E),\; |||\phi||| = \sup\left\{\frac{||\phi(x)||}{||x||},\; x \in E\backslash\{0\}\right\}.$$

est la norme d'opérateur associée sur $L_c(E)$.

S'il existe x dans $E\backslash\{0\}$ tel que $|||\phi||| = \dfrac{||\phi(x)||}{||x||}$, on dit que la norme de ϕ est atteinte en x.

I – Première partie

① L'application h est-elle injective ? Est-elle surjective ?

② ① Pour $f \in \mathcal{C}$, montrer que $H(f)$ est continuement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

② L'application H est-elle injective ?

③ Est-elle surjective ?

③ Trouver les éléments propres (valeurs et sous-espaces propres associés) de h.

④ Mêmes questions pour l'application H.

II – Seconde partie

Dans cette partie on munit S_b de la norme N_∞ et $\mathcal{C}_b$ de la norme $|| \ ||_\infty$.

① Montrer que S_b et $\mathcal{C}_b$ sont des sous-espaces vectoriels stables par h et H respectivement.

Dans cette partie du problème on notera h_∞ (respectivement H_∞) l'endomorphisme induit par la restriction de h à S_b (respectivement de H à $\mathcal{C}_b$).

② Vérifier que les applications linéaires h_∞ et de H_∞ sont continues, préciser leurs normes et montrer qu'elles sont atteintes.

③ Soit (u_n) une suite croissante de réels positifs convergente vers une limite λ.

① Etablir que la suite $h_\infty((u_n))$ converge vers λ.

② Montrer que $N_\infty(h_\infty((u_n))) = N_\infty((u_n))$.

④ Soit (u_n) un élément non nul de S_b tel que $|u_0| \neq N_\infty((u_n))$, et on suppose que $|||h_\infty|||$ est atteinte en (u_n).

① Montrer que la suite $(|u_n|)$ vérifie $N_\infty((|u_n|)) = N_\infty(h_\infty((|u_n|)))$.

② On suppose que le réel $N_\infty((|u_n|))$ n'est pas valeur d'adhérence de $(|u_n|)$, c'est à dire

$$\exists c \in [0, N_\infty((|u_n|))[,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geq n_0,\quad |u_n| \leq c.$$

Établir que $N_\infty(h_\infty((|u_n|))) < N_\infty((|u_n|))$.

③ En déduire que $N_\infty((|u_n|))$ est une valeur d'adhérence de la suite $(|u_n|)$.

⑤ Soit f un élément de $\mathcal{C}_b$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que $H_\infty(f)$ admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.

IV – Quatrième partie

① Etablir que, pour tout couple (f, g) d'éléments de L^2, le produit fg est sommable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'application

$$(f, g) \to \int_{]0,+\infty[} f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur L^2.

En conséquence, $(L^2, || \ ||_2)$ est donc un espace vectoriel normé.

② Soit f un élément de L^2.

① Etablir que pour tout $x > 0$ la fonction f est sommable sur $]0, x]$ et que

$$\frac{1}{x}\left(\int_{]0,x]} f(t)dt\right)^2 \leq \int_{]0,x]} f^2(t)dt.$$

② Soit $\phi_f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{]0,x]} f(t)dt$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que ϕ_f appartient à L^2 et qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall f \in L^2,\ \ ||\phi_f||_2 \leq K||f||_2.$$

Dans toute la suite du problème, on notera H_2 l'endomorphisme continu de L^2 défini par

$$\forall f \in L^2,\ H_2(f) = \phi_f.$$

③ ① Montrer que pour tout couple (f, g) d'éléments de L^2, l'application $fH_2(g)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

② Établir que

$$\forall f \in L^2, \forall x > 0,\ \left(\int_{[x,+\infty[} \frac{1}{t} f(t)dt\right)^2 \leq \frac{1}{x}\int_{[x,+\infty[} f^2(t)dt.$$

③ Soit f un élément de L^2. Montrer que l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\int_{[x,+\infty[} \frac{1}{t} f(t)dt$ est bien définie et appartient à L^2.

④ Soit f dans L^2. Montrer l'existence d'un unique élément f^* de L^2 tel que :

$$\forall g \in L^2, \int_{]0,+\infty[} f H_2(g) = \int_{]0,+\infty[} f^* g.$$

⑤ Montrer que l'application $L_2 : L^2 \to L^2$ qui à f associe f^* est linéaire et continue.

⑥ Etablir l'égalité $|||L_2||| = |||H_2|||$.

V – Cinquième partie

On utilise dans cette partie les endomorphismes H_2 et L_2 de L^2 introduits dans la partie IV.

① Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^p$ de la structure euclidienne canonique ; le produit scalaire est défini par $< (x_1, \dots, x_p)|(y_1, \dots, y_p) >= \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$, et la norme euclidienne est notée n_2.
Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$.
   ① Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ tel que $n_2(Ax) = |||A|||n_2(x)$
   ② Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ vérifiant l'égalité précédente est un vecteur propre de $A^* o A$, où A^* est l'adjoint de A pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^p$.

② Etablir que si $f \in L^2 \backslash \{0\}$ vérifie $||H_2(f)||_2 = |||H_2||| \, ||f||_2$ alors f est un vecteur propre de $L_2 o H_2$.

③ Montrer qu'un tel élément ne peut exister et que $\sup \left\{ \frac{||H_2(f)||_2}{||f||_2}, \ f \in L^2 \backslash \{0\} \right\}$ n'est pas atteint.
Indication : On pourra étudier l'appartenance à L^2 des solutions d'une équation différentielle.

④ Montrer de même qu'il ne peut exister un élément $f \neq 0$ dans L^2 tel que $||L_2(f)||_2 = |||L_2||| \, ||f||_2$.

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com