Devoir Surveillé

2 Topologie des racines carrés d'une matrice

Blague du jour

☛ Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné !
☛ L'injectivité implique la bijectivité mme en dimension infinie, en effet : Si f est injective tout élément possède au plus un antécédent ; mais qui peut le plus peut le moins, donc tout élément possède au moins un antécédent, donc f est surjective puis bijective.

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

Mathématicien du jour

Mathématicien, logicien, philosophe, théologien bohémien allemand. Il enseigna d'abord les sciences de la religion avant de consacrer le reste de son temps aux mathématiques. Dans sa philosophie, Bolzano critique l'idéalisme d'Hegel et de Kant en affirmant que les nombres, les idées, et les vérités existent indépendamment des personnes qui les pensent. Ainsi l'acte mental se distingue de la signification de l'acte.

Enoncé : CCP 2005, MP

Notations.

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note : $M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n.
$M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne.
$GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.
I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.
Id l'application identité de $\mathbb{R}^n$.
Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée.
$S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.
$S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est à dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels, on note $diag(x_1, \ldots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, \ldots, x_n$ dans cet ordre.

Si p est un entier naturel non nul, on notera $\|.\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$:
si $x = (x_1, \ldots, x_p)$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, on note $B_\infty(a, r)$ la boule ouverte de centre a de rayon r pour la norme $\|.\|_\infty$.

Objectifs.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrées de A si $R^2 = A$.
On note $Rac(A)$ l'ensemble des racine carrées de A, c'est à dire
$$Rac(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}) / \ R^2 = A\}$$
Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents exemples, (on pourra constater qu'une matrice peut parfois admettre une infinité de racines) et étudier quelques propriétés topologiques de $Rac(A)$.

Les trois parties du problème sont **indépendantes.**
Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

• Partie I. Exemples de $Rac(A)$.

Exemple 1 : cas où A possède n valeurs propres distinctes.
On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$.

① Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A, si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D.

② Racines carrées de D.
Soit S une racine carrées de D.

- **a** Montrer que $DS = SD$.
- **b** En déduire que la matrice S est diagonale.
- **c** On note alors $S = diag(s_1, \ldots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \ldots, n\}$?
- **d** Que peut-on dire de $Rac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?
- **e** Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

③ Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

④ **Application** : Écrire toutes les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice P que l'on déterminera.

Exemple 2 : cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.
Dans cet exemple, on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.
Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée de la matrice nulle.

⑤ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f.

- **a** Comparer $Im(f)$ et $Ker(f)$ puis montrer que $r \leq \dfrac{n}{2}$.
- **b** On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $Im(f)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \ldots, e_{n-r})$ pour former une base de $Ker(f)$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.
Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n-r}, u_1, \ldots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.

⑥ .

a Déterminer les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.

b **Application** : déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle.

Exemple 3 : cas où $A = I_n$.

⑦ Soit R une racine carrée de l'unité I_n.

a Vérifier que R est une matrice inversible.

b Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.

⑧ Déterminer $Rac(I_n)$. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple 4 : cas où A est une matrice symétrique réelle.
Dans cet exemple, toutes les matrices que l'on considérera appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$.

⑨ Une matrice symétrique admet-elle nécessairement une racine carrée ?

⑩ Montrer qu'une matrice symétrique positive admet au moins une racine carrée qui est elle même symétrique et positive.
Remarque : On peut montrer l'unicité de cette racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème.

• Partie II. Étude topologique de $Rac(A)$.

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour coefficients $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, on définit une norme en posant $N(A) = \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de cette norme N.

① **Fermeture de $Rac(A)$.**
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Rac(A)$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.

② Étude du caractère borné de $Rac(I_n)$.

a Un exemple instructif.

Pour tout entier naturel q, on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer S_q^2. $Rac(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$?

b $Rac(I_n)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$?

c **Application** : pour cette question, $n \geq 2$.
Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|.\|$ "surmultiplicative" sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\|.\|B\|$.

• Partie III. Zéros de polynômes et intérieur de

Soit p un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\|.\|_\infty$.
On note Γ_p l'ensemble des **fonctions polynomiales** sur $\mathbb{R}^p$ c'est à dire : si $P \in \Gamma_p$, il existe N entier naturel et une famille de réels

$\{a_{i_1,\dots,i_p},\ 0 \leq i_1,\dots,i_p \leq N\}$ tels que

$$\forall (x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p,\ P(x_1,\dots,x_p) = \sum_{0\leq i_1,\dots,i_p\leq N} a_{i_1,\dots,i_p} x^{i_1}\dots x^{i_p}$$

Par exemple si $p = 3$, $P(x_1,x_2,x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.
Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes se $\mathbb{R}$.
Enfin, si $p \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \{(x_1,\dots,x_p) \in \mathbb{R}^p /\ P(x_1,\dots,x_p) = 0\}$ ($Z(P)$ est **l'ensemble des zéros de la fonction polynomiale** P).

L'objectif de cette partie est d'étudier l'intérieur de $Z(P)$, afin de déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.

On rappelle que si Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$, un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ est un point intérieur à Ω s'il existe un nombre réel r strictement positif tel que $B_\infty(a,r) \subset \Omega$ et que l'intérieur d'une partie est l'ensemble de ses points intérieurs.

① **Questions préliminaires** :

a Soit $a = (a_1,\dots,a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que $B_\infty(a,r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.

b Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F et G sont d'intérieur vide, montrer que $F \cap G$ est encore d'intérieur vide.

② **Exemples d'ensembles de zéros de fonctions polynomiales.** **a** Dans cette question, $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ? Justifier votre réponse.

b Dans cette question, $p = 2$. On considère $P(x_1,x_2) = 2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-il infinis ?

③ **Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynomiale.**
Soit $P \in \Gamma_p$.

a Soient $I_1,\dots,I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que si la fonction polynomiale P s'annule sur $I_1 \times \dots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.

b En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.

c Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

④ **Application à l'étude de l'intérieur de** $Rac(A)$.
Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

a Ecrire $Rac(A)$ sous forme d'un ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_1,\dots,P_{n^2}$ de Γ_{n^2} tels que $Rac(A) = \bigcap_{l=1}^{n^2} Z(P_l)$.

b Déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.