

CPGE My Youssef, Rabat



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ إِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ

صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمِ

Corrigé DS 2 (09-10): *Espaces Vectoriels Normés*

Corrigé de Jean-Charles Dufait : jean-charles.dufait@prepas.org

Lundi 16 Novembre 2009

Durée : 4 heures

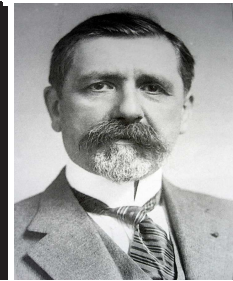
Blague du jour

- L'éléphant est énorme (n -norme), mais le mammouth est $(n+1)$ -norme.
- Qu'est-ce qui est gris, énorme et a des coefficients entiers ?

Réponse : Une équation éléphantienne.

- Qu'est-ce qu'un dilemme ?

Réponse : Un lemme qui prouve deux résultats.



Mathématicien du jour

Borel.

Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), mathématicien français, spécialiste de la théorie des fonctions et des probabilités, membre de l'Académie des sciences, a été aussi un homme politique français, député, ministre de la marine. Il a été reçu à la fois premier à l'École polytechnique, à l'École Normale, et à l'agrégation de mathématiques. Refusant les offres des industriels, il se consacra à la recherche.

Il était parmi les pionniers de la théorie de la mesure et de son application à la théorie des probabilités. Il a également édité un certain nombre d'articles de recherche sur la théorie des jeux ainsi qu'un véritable monument sur le jeu de bridge.

Engagé volontaire dans l'armée en 1914, il a commandé une batterie d'artillerie. Il était décoré du *Grand-croix de la Légion d'honneur*, *Croix de guerre* et de la *Médaille de la Résistance*

Partie I

$\mathbb{K} \rightarrow (F | X)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et elle est non nulle car $(F | F) \neq 0$ donc son noyau est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, ainsi, H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons $Y = {}^tFX$. On a $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ $y_{ii} = \sum_{k=1}^n f_{ki} x_{ki}$ donc $(F | X) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ki} x_{ki}$ donc, puisque $f_{ki} = 1$ pour $i = k$ ou $i = 1$ ou $i = n$ et $f_{ki} = 0$ sinon, on a $(F | X) = \sum_{k=1}^n x_{kk} + \sum_{k=2}^n x_{k1} + \sum_{k=1}^{n-1} x_{kn}$.

Par définition de H , on a $F \in H^\perp$ donc, puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = H \oplus \mathbb{R}F$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut donc écrire $M = N + \lambda F$ avec $N \in H$ et $\lambda F \in H^\perp$ et, en prenant le produit scalaire avec F , $(F | M) = (F | N) + \lambda \|F\|^2 = \lambda \|F\|^2$ donc $\lambda = \frac{(F | M)}{\|F\|^2}$. On a donc $\forall U \in H$, $M - U = (N - U) + \lambda F$ avec $N - U \in H$. Donc le théorème de Pythagore donne $\|M - U\|^2 = \|N - U\|^2 + \lambda^2 \|F\|^2 = \frac{(F | M)^2}{\|F\|^2}$ donc $d(M, H) = \frac{|(F | M)|}{\|F\|}$.

$$\|F\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n f_{ki}^2 = n + 2(n-1) = 3n - 2 \text{ donc } \|F\| = \sqrt{3n - 2}.$$

$$\text{B) a) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{\text{rg}(B) = 2}.$$

$$\text{B) b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \underline{\text{rg}(B^2) = \text{rg}(B) = 2}.$$

E'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(g)) + \dim(\text{Im}(g)) = n$ et si $x \in \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(g)$, on a $g(x) = 0_E$ et il existe y tel que $x = g(y)$ donc $g^2(y) = 0_E$. Ainsi $y \in \text{Ker}(g^2)$. Mais $\text{Ker}(g) \subset \text{Ker}(g^2)$ et $\dim(\text{Ker}(g)) = n - 2 = \dim(\text{Ker}(g^2))$ puisque, selon [b], $\text{rg}(g) = \text{rg}(g^2)$ donc $\text{Ker}(g^2) = \text{Ker}(g)$. On a donc $y \in \text{Ker}(g)$ donc $x = g(y) = 0_E$. Donc $\underline{\text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g) = \mathbb{R}^n}$.

Prenons une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n)$ adaptée à la somme directe ci-dessus. On a $g(e_k) = 0_E$ pour $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ et $g(e_k) \in \text{Im } g = \text{Vect}(e_{n-1}, e_n)$ pour tout k et, notamment pour $k \in \{n-1, n\}$.

Donc $\text{Mat}(g, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B' \end{array} \right)$ avec $B' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus,

$$2 = \text{rg}(g) = \text{rg}(\text{Mat}(g, \mathcal{B})) = \text{rg} \begin{pmatrix} O \\ B' \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} O & {}^t B' \end{pmatrix} = \text{rg}({}^t B') = \text{rg}(B')$$

donc B' est inversible. Donc B est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B' \end{array} \right)$ avec $B' \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$.

e) On a directement $\text{Tr}(B) = 0$, $\text{Tr}(B^2) = 2$. Soient λ et μ , les valeurs propres dans \mathbb{C} de B' (pas forcément distinctes). B' est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et donc B'^2 est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda^2 & c(\lambda + \mu) \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$. Or, selon [d], $\text{Tr}(B) = \text{Tr}(B')$ donc $\lambda + \mu = 0$ et [d] donne aussi que B^2 est semblable à $\left(\begin{array}{c|c} O & O \\ \hline O & B'^2 \end{array} \right)$ donc $\text{Tr}(B^2) = \text{Tr}(B'^2)$ soit $\lambda^2 + \mu^2 = 2$. On a donc $\mu = -\lambda$ et $2\lambda^2 = 2$ donc $\underline{\text{Sp}(B') = \{-1, 1\}}$.

f) $\vec{x} = \alpha \vec{x} \Leftrightarrow (I_n + B) \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x}$ donc $F \cdot \vec{x} = \alpha \vec{x} \Leftrightarrow B \cdot \vec{x} = (\alpha - 1) \vec{x}$ donc $\text{Sp}(F) = \{1 + \beta \mid \beta \in \text{Sp}(B)\}$ et $E_\alpha(F) = E_{\alpha-1}(B)$. Comme $\chi_B = X^{n-2} \chi_{B'} = X^{n-2} (X + 1)(X - 1)$, $\text{Sp}(B) = \{-1, 1, 0\}$ et, puisque

$m(1) = m(-1) = 1$, $\dim(E_{-1}(B)) = \dim(E_1(B)) = 1$. **D'autre part, on a $\dim(E_0(B)) = \dim(\text{Ker } g) = n - 2$. Donc $\text{Sp}(F) = \{0, 1, 2\}$ avec $\dim(E_0(F)) = \dim(E_2(F)) = 1$ et $\dim(E_1(F)) = n - 2$.**

D'après la formule du [3], il suffit de calculer $(F | P({}^tF)) = \text{Tr}({}^tFP({}^tF)) = \text{Tr}(S({}^tF))$ en notant $S(X) = XP(X)$. Or $\dim(E_0(F)) + \dim(E_2(F)) + \dim(E_1(F)) = n$ donc $E_0(F) \oplus E_2(F) \oplus E_1(F) = \mathbb{R}^n$ c'est à dire que F est diagonalisable donc tF également. Ainsi $S({}^tF)$ est semblable à $\text{Diag}(S(1), \dots, S(1), S(0), S(2))$ donc $\text{Tr}(S({}^tF)) = (n - 2)S(1) + S(0) + S(2) = (n - 2)P(1) + 2P(2)$.
Donc $d(P({}^tF), H) = \frac{|(n - 2)P(1) + 2P(2)|}{\sqrt{3n - 2}}$.

Partie II

P) caractérisation de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in H, d(x_0, H) \not\leq \|x_0 - y\| < d(x_0, H) + \varepsilon$.
On applique ceci à $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note y_n un des $y \in H$ vérifiant l'inégalité. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in H \quad \text{et} \quad d(x_0, H) \not\leq \|x_0 - y_n\| < d(x_0, H) + \frac{1}{n+1}$$

donc il existe une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, y_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x_0, H)$.

D) on a $\forall n \in \mathbb{N}, \|y_n\| = \|y_n - x_0 + x_0\| \not\leq \|y_n - x_0\| + \|x_0\|$ et la suite $(\|x_0 - y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle converge donc la suite $(\|y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi bornée. Le théorème de Bolzano-Weierstrass donne alors l'existence d'une suite $(y_{\varphi(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ extraite de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge dans E . Mais, quand E est de dimension finie, tous ses sous-espaces vectoriels sont fermés donc H est fermé. Comme $\forall p \in \mathbb{N}, y_{\varphi(p)} \in H$, on a $z_0 = \lim_{p \rightarrow +\infty} y_{\varphi(p)} \in H$. D'autre part, la suite $(\|x_0 - y_{\varphi(p)}\|)_{p \in \mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(\|x_0 - y_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $d(x_0, H)$ donc elle converge vers la même limite. Enfin, par continuité de la norme, $\|x_0 - y_{\varphi(p)}\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x_0 - z_0\|$ et donc, par unicité de la limite, $\|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)$. **En conclusion, $\exists z_0 \in H, \|x_0 - z_0\| = d(x_0, H)$.**

P) définition, $\text{Ker } h = h^{-1}(\{0_{\mathbb{R}}\})$ et le singleton $\{0_{\mathbb{R}}\}$ est un fermé de \mathbb{R} . Or l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé donc si h est continue alors $\text{Ker } h$ est fermé dans E .

S) supposons que la forme linéaire h ne soit pas continue, on a non $(\exists K * 0, \forall x \in E, |h(x)| \not\leq K \|x\|)$ soit $\forall K * 0, \exists x \in E, |h(x)| > K \|x\|$. Appliquons ceci à $K = n + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$ et notons x_n un $x \in E$ vérifiant la propriété : on a donc $|h(x_n)| > (n + 1) \|x_n\|$. Ceci montre que $h(x_n) \neq 0$, on peut donc poser $t_n = \frac{x_n}{h(x_n)}$. On a alors $h(t_n) = \frac{h(x_n)}{h(x_n)} = 1$ et $\|t_n\| = \frac{\|x_n\|}{|h(x_n)|} < \frac{1}{n+1}$ donc $t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, h(t_n - t_0) = h(t_n) - h(t_0) = 1 - 1 = 0$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, t_n - t_0 \in H$ et $t_n - t_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -t_0$ donc, puisque H est fermé, $-t_0 \in H$. Mais ceci est faux car $h(-t_0) = -h(t_0) = -1$. L'hypothèse de départ était donc fautive et on a bien si $\text{Ker } h$ est fermé dans E alors h est continue.

E) $\overline{H} \supset H$ donc $\overline{H} \neq 0$ et si $(x, y) \in \overline{H}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la caractérisation séquentielle de l'adhérence donne l'existence de deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, (x_n, y_n) \in H^2, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$ et alors, par linéarité de la limite, $x + \lambda y = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n + \lambda y_n)$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, x_n + \lambda y_n \in H$ et donc $x + \lambda y \in \overline{H}$. Donc \overline{H} est un sous-espace vectoriel de E .

Puisque $H \subset \overline{H}$, on a soit $H = \overline{H}$ et, dans ce cas, H est fermé, soit $H \varpi \overline{H}$. Si $H \varpi \overline{H}$, prenons $a \in \overline{H} \setminus H$ et soit $x \in E$ quelconque. On a $h(a) \neq 0$ puisque $a \notin H$ et on peut donc écrire $x = \frac{h(x)}{h(a)}a + \left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right)$ avec $a \in \overline{H}$ et $h\left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right) = h(x) - \frac{h(x)}{h(a)}h(a) = 0$ donc $\left(x - \frac{h(x)}{h(a)}a\right) \in H \subset \overline{H}$. Puisque \overline{H} est un sous-espace vectoriel de E , on a donc $x \in \overline{H}$ ce qui donne $E \subset \overline{H}$. On peut donc conclure : H est fermé ou dense.

Partie III

Soit $x \in H^\perp$. Par densité de H dans E , il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, (x | x_n) = 0$. Mais, par continuité du produit scalaire, $(x | x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (x | x)$ donc $(x | x) = 0$ et donc $x = 0_E$. Réciproquement $0_E \in H^\perp$ donc $H^\perp = \{0_E\}$.

$H \oplus H^\perp = H \oplus \{0_E\}$ donc $H \oplus H^\perp = H$.

Pour tout $x \in E$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$. On a, par définition, $0 \leq d(x, H) \leq \|x - x_n\|$ car $x_n \in H$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - x_n\| = 0$ donc $\forall x \in E, d(x, H) = 0$.

Si $d(x, H)$ est atteinte, il existe $z_0 \in H$ tel que $0 = d(x, H) = \|x - z_0\|$ donc $x = z_0$ et $x \in H$. La réciproque est claire donc $d(x, H)$ n'est atteinte que si $x \in H$.

Partie IV

On a $\forall x \in E, |h(x)| \leq \|h\| \|x\|$ donc, pour $x = x_0 - y, |h(x_0)| \leq \|h\| \|x_0 - y\|$. Or $\|h\| \neq 0$ car h est non nulle donc $\forall y \in H, \|x_0 - y\| \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.

La borne inférieure étant le plus grand des minorants, $d(x_0, H) \geq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.

Si $d(x_0, H) = 0$, l'inégalité ci-dessus donne $h(x_0) = 0$ donc $x_0 \in H$. La réciproque est évidente donc $d(x_0, H) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in H$.

α) Par caractérisation de la borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0, \exists w \neq 0_E, \|h\| * \frac{|h(w)|}{\|w\|} > \|h\| - \varepsilon$. On applique ceci à $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et on note w_n un de ces $w \neq 0_E$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|h\| - \frac{1}{n+1} < \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \|h\|$ donc il existe $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \in E \setminus \{0_E\}$ et $\|h\| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$.

β) \diamond Puisque $x_0 \notin H$, on peut écrire tout $x \in E$ sous la forme $x = \frac{h(x)}{h(x_0)}x_0 + \left(x - \frac{h(x)}{h(x_0)}x_0\right) = \lambda x_0 + y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $y \in H$ (vérification immédiate). Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (\lambda_n, y_n) \in \mathbb{R} \times H, w_n = \lambda_n x_0 + y_n$.

◊ ERREUR D'ÉNONCÉ : la condition $\lambda_n \neq 0$ n'est, en général, pas vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit, par exemple, de choisir $w_0 \in H$ pour avoir $\lambda_0 = 0$ car l'écriture ci-dessus est unique puisque la somme $\mathbb{R}.x_0 \oplus H$ est directe. On ne modifie pas la valeur de la limite de $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|}$ en modifiant la valeur de w_0 (ou d'un nombre fini de termes) donc $[\alpha]$ est toujours vérifié.

◊ Par contre, on a $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \lambda_n \neq 0$ car $\frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|h\| > 0$ donc $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} > 0$ donc $\forall n \geq n_0, h(w_n) \neq 0$ et donc $\lambda_n = \frac{h(w_n)}{h(x_0)} \neq 0$.

γ) D'une part, $|h(w_n)| = |\lambda_n h(x_0) + y_n| = |\lambda_n| |h(x_0)|$ et, d'autre part, $\forall n \geq n_0, \|w_n\| = |\lambda_n| \left\| x_0 - \frac{-y_n}{\lambda_n} \right\| \leq |\lambda_n| d(x_0, H)$ car $\frac{-y_n}{\lambda_n} \in H$. Donc, puisque $\|w_n\| \neq 0, |\lambda_n| \neq 0$ pour $n \geq n_0$ et $d(x_0, H) \neq 0$ pour $x_0 \notin H$, on a

$$\forall n \geq n_0, \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} = \frac{|\lambda_n| |h(x_0)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|\lambda_n| |h(x_0)|}{|\lambda_n| d(x_0, H)} = \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}.$$

En faisant abstraction de l'erreur d'énoncé signalée plus haut, on a bien $\forall n \geq n_0, \frac{|h(w_n)|}{\|w_n\|} \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$.

En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $\|h\| \leq \frac{|h(x_0)|}{d(x_0, H)}$ donc $d(x_0, H) \leq \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ et on a obtenu l'inégalité inverse au [c] donc $d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$.

ⓐ) $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leq \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ et cette série majorante converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc $\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{u_n}{2^{n+1}} \right)$ est absolument convergente.

ⓑ) après [a], h est bien définie. Pour tout $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$h(u + \lambda v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n + \lambda v_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{2^{n+1}} = h(u) + \lambda h(v)$$

car toutes les séries convergent. Donc $h \in E^*$. D'autre part, l'inégalité vue au [a] donne

$$\forall u \in E, |h(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{u_n}{2^{n+1}} \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}} = \|u\|_\infty \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \|u\|_\infty$$

ce qui montre la continuité de h . De plus, $\forall u \neq 0, \frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} \leq 1$ donc, en prenant la borne supérieure, $\|h\| \leq 1$. Donc h est une forme linéaire continue et $\|h\| \leq 1$.

ⓐ) On a clairement $v_p \in E$ et $\|v_p\|_\infty = 1$. Or

$$h(v_p) = \sum_{n=0}^p \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{2^{p+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}} > 0$$

donc $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$ et donc $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$.

◊ On a $\frac{|h(v_p)|}{\|v_p\|_\infty} \leq \|h\| \leq 1$ donc $\|h\| = 1$.

ⓑ) supposons qu'il existe $u \neq 0_E$ tel que $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = \|h\| = 1$ on a donc $|h(u)| = \|u\|_\infty$ et toutes les inégalités du [b] sont des égalités. En particulier, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty}{2^{n+1}}$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} = 0$

avec $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{\|u\|_\infty - |u_n|}{2^{n+1}} \neq 0$ donc on a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \|u\|_\infty$. Mais alors $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|u\|_\infty \neq 0$ en contradiction avec le fait que $u \in E$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$.

Donc il n'existe pas de $u \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\frac{|h(u)|}{\|u\|_\infty} = \|h\|$.

El) suffit d'utiliser le résultat du [II.a] : puisque h est continue, $H = \text{Ker } h$ est fermé .

Soit $x_0 \notin H$, si $d(x_0, H)$ était atteinte alors $\exists z_0 \in H, d(x_0, H) = \|x_0 - z_0\|$. Or, selon [1.e], $d(x_0, H) = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|}$ donc $\|x_0 - z_0\| = \frac{|h(x_0)|}{\|h\|} = \frac{|h(x_0) - h(z_0)|}{\|h\|}$ et donc, puisque $x_0 - z_0 \neq 0_E, \frac{|h(x_0 - z_0)|}{\|x_0 - z_0\|} = \|h\|$ ce qui est impossible vu [d]. Donc pour $x \notin H, d(x, H)$ n'est jamais atteinte .

*Fin
à la prochaine*