.

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°3
Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Jeudi 9 Décembre 2010

Durée : 4 heures

Source : Concours Mines-Ponts, 2006 MATH. I MP

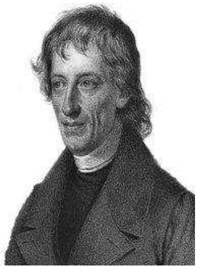
Avec beaucoup d'indications.

L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Blague du jour

• Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné !

• L'injectivité implique la bijectivité mîne en dimension infinie, en effet : Si f est injective tout élément possède au plus un antécédent ; mais qui peut le plus peut le moins, donc tout élément possède au moins un antécédent, donc f est surjective puis bijective.



Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

Mathématicien du jour

Mathématicien, logicien, philosophe, théologien bohémien de langue et de culture allemande, fils d'un Italien émigré à Prague. Il enseigne les sciences de la religion et consacre le reste de son temps aux mathématiques. Il est considéré comme l'un des principaux contributeurs à la logique telle qu'elle est aujourd'hui établie. Bolzano avait développé une définition suffisamment rigoureuse des limites dès 1817. Dans sa philosophie, Bolzano critique l'idéalisme d'Hegel et de Kant en affirmant que les nombres, les idées, et les vérités existent indépendamment des personnes qui les pensent. Ainsi l'acte mental se distingue de la signification de l'acte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et l colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^l$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } |\,\|M\|_1\,| = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, la norme matricielle subordonnée.

Définition 1 On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant l)$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :

$$m_{i,j} \geqslant 0 \text{ (resp . } m_{i,j} > 0) \text{ pour tout } (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, l\}.$$

Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ de coefficients notés $(m_{i,j}, 1 \leqslant i,j \leqslant n)$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1, \text{ pour tout } j \in \{1,\dots,n\}.$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0\},$$
$$B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x > 0\},$$
$$\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\|_1 = 1\right\}.$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème (Perron-Frobenius) Soit $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique telle que $(I_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^{kj}y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

1 Un vecteur propre strictement positif

On suppose que T est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

1 Pour tout $x \in B$, on associe l'ensemble $\Gamma_x = \left\{\theta \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \theta x \leqslant Tx\right\}$.

(a) Montrer que Γ_x est non vide et majorée.

On pose $\theta(x) = \sup(\Gamma_x)$.

(b) Montrer qu'en général si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, alors $\sup A \in \overline{A}$.

(c) Justifier que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, l'application $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto (Tx)_i - \theta . x_i$ est continue sur $\mathbb{R}$, en déduire que Γ_x est fermé puis que $\theta(x) = \max(\Gamma_x)$.

On note θ l'application définie ainsi : $\theta : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$

2 Montrer que pour tout $x \in B$, on a : $\theta(x) = \min\left\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i} \text{ tel que } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } x_i \neq 0\right\}$.

3 (a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}^+$ non vide, donner sans justifier $\inf(\alpha A)$ en fonction de α et A.

(b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

4 Montrer que $P(B) \subset B^+$.

5 Soit $x \in B$

(a) Dire pourquoi P et T commutent, en déduire que $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$.

(b) En déduire que $\theta(Px) \geqslant \theta(x)$.

(c) Justifier que $TPx = PTx > 0$ et que $Px > 0$.

(d) En déduire que $\theta(Px) > 0$.

6 Soit $x \in B$ un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ.

a Montrer que $\lambda \geqslant 0$.

b Montrer que $Px = (1+\lambda)^{n-1}x$

c En déduire que $\theta(Px) = \theta(x)$.

7 Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, on pose $y = Tx - \theta(x)x$.

a Dire pourquoi $y \geqslant 0$. On suppose que $y \not= 0$.

b Développer Py puis en déduire que en déduire $\forall i \in \{1, ..., n\}$, on a $(T(Px))_i - \theta(x)(Px)_i > 0$.

c En déduire que $\theta(x) < \theta(Px)$.

d Conclure que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

8 Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

9 Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10 Montrer que $\sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x) \geqslant \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

11 Montrer que $\sup\limits_{x \in B} \theta(x) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$.

12 Montrer que $\sup\limits_{x \in C} \theta(x) = \sup\limits_{x \in P(C)} \theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup\limits_{x \in C} \theta(x)$. On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13 Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

2 Une méthode d'approximation

On suppose maintenant que T est stochastique et telle que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

Pour un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \dots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose : $R_k = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} T^j$.

14 Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ. Montrer que $|\theta| x^+ \leqslant Tx^+$.

15 En déduire que $|\theta| \leqslant \theta_0$.

16 Montrer que $|\theta| \left\|x^+\right\|_1 \leqslant \left\|x^+\right\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leqslant 1$.

17 En déduire $\theta_0 = 1$.

18 a Montrer qu'une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si $u = (1, ..., 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

b En déduire que pour tout $j \geqslant 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.

19 a Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, montrer que $AB \geqslant 0$.

b Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a $\|Tx\|_1 \leqslant \|x\|_1$.

c Établir, pour tout $k \geqslant 1$, les inégalités suivantes :

$$|\left\|T^k\right\|_1| \leqslant 1 \text{ et } |\|R_k\|_1| \leqslant 1.$$

20 a Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $TR_k - R_k = \frac{1}{k}(T^k - I_n)$.

b En déduire que $|\|TR_k - R_k\|_1| \leqslant \frac{2}{k}$.

21 Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$ a au moins une valeur d'adhérence.

22 Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$, montrer que $Ty = y$ puis que pour tout $k \geqslant 1$, $R_k y = y$.

23 Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x, k \geqslant 1)$, montrer pour tous les entiers m et l, l'identité suivante :

$$y - z = R_l\,(R_m x - z) - R_m\,(R_l x - y).$$

24 Montrer que la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$ a exactement une valeur d'adhérence.

25 a Soit (f_k) une suite d'endomorphismes d'un espace vectoriel norméE tel que pour tout $x \in E$, la suite $(f_k(x))$ converge vers un élément de E, qu'on notera $f(x)$, montrer que l'application ainsi définie et notée f est un endomorphisme de E.

b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, la suite $(R_k x)_k$ converge

c En déduire qu'il existe une matrice R telle que $Rx = \lim\limits_{k \to +\infty} R_k x$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \|R_k - R\|_1 = 0$.

26 Montrer que T et R commutent.

27 Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.

28 Caractériser R en fonction de $\mathrm{Ker}(T - I_n)$ et $\mathrm{Im}(T - I_n)$.

29 On admet que $\mathrm{Ker}(T - I_n)$ est de dimension 1. Pour $x \in B$, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0.

Bonne Chance

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.
Il vous reste encore du temps : le problème suivant explique les détails du principe PageRank

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

Code sujet

287

ESSECM2_E

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 7 mai 2008, de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Tout au long du sujet N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Notations :

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x|$ la *valeur absolue* de x.
- Pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, on note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_N| \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$

et $\|V\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |v_j|$.

- On notera I_N la matrice *identitée* de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice *transposée* de A.

Résultat admis :

- Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$, on a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Définitions :

- Une matrice est dite *positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls; elle est dite *strictement positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels strictement positifs.
- Un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est dit *de probabilité* si V est positif et si $\|V\|_1 = 1$.
- Une matrice $Q = (Q(i,j))_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle est positive et si $\sum\limits_{i=1}^{N} Q(i,j) = 1$ pour tout $1 \leq j \leq N$.
- Un vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est dit *invariant* par $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ si $QV = V$.
- Soit $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. La suite de matrice $(Q^n)_{n\geq 0}$ est convergente vers la matrice Q_∞ si pour tout $(i,j) \in \{1, ..., N\}^2$, $(Q^n(i,j))_{n\geq 0}$ converge vers $Q_\infty(i,j)$.

Préliminaires

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\left|\sum_{j=1}^{N} v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} |v_j| . \qquad \text{(E)}$$

P1. Montrer que, pour tout x réel, $|x| - x \geq 0$.

P2. Etude du cas $N = 3$. On supposera donc, dans cette question P2 uniquement, $N = 3$.

P2.a Montrer que

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 2(|v_1v_2| - v_1v_2) + 2(|v_1v_3| - v_1v_3) + 2(|v_2v_3| - v_2v_3).$$

P2.b Montrer à l'aide de (E), que si $|v_jv_{j'}| > 0$ pour $(j,j') \in \{1,2,3\}^2$ tel que $j \neq j'$, alors v_j et $v_{j'}$ ont même signe.

P2.c Conclure que $V = |V|$ ou $V = -|V|$.

P3. Montrer que $V = |V|$ ou $V = -|V|$ dans le cas général où N est un entier quelconque vérifiant $N \geq 2$.

Partie I Google et PageRank

En 1998, Sergey Brin et Larry Page, co-fondateurs de Google, ont introduit la notion de PageRank. Le PageRank est un indice mesurant la notoriété de chacune des pages Web référencées dans Google. Bien que les outils de calcul de cet indice soient maintenus secrets, le principe mathématique sur lequel repose ce calcul est public et peut-être résumé comme suit.

On numérote de 1 à N les pages Web référencées dans Google (on pense que $N = 10^9$ est un bon ordre de grandeur). On dira qu'une page $j \in \{1, ..., N\}$ pointe vers une autre page $i \in \{1, ..., N\}$ s'il existe un lien dans la page j permettant de rejoindre la page i en cliquant dessus.

Pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, on note d_j le nombre de pages vers lesquelles la $j^{ème}$ page pointe. Lorsque $d_j = 0$ pour chaque couple de pages (i, j) posons $A(i, j) = 0$ si $i \neq j$ et $A(j, j) = 1$. Lorsque $d_j > 0$, posons soit $A(i, j) = 1/d_j$ si j pointe vers i soit $A(i, j) = 0$ sinon. Si $\rho \in [0, 1[$, on définit la matrice de Google $G = (G(i, j))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N}$ par

$$G(i, j) = \rho A(i, j) + \frac{(1-\rho)}{N}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq N. \qquad \text{(D)}$$

Pour tout $j \in \{1, ..., N\}$, le PageRank d'une page j est un nombre réel positif ou nul noté $p(j)$. Les $p(j)$, $1 \leq j \leq N$ sont par ailleurs définis par le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{N} p(j) = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{N} G(i, j) p(j) = p(i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N. \qquad \text{(S)}$$

A la question "que mesure exactement pour une page $j \in \{1, ..., N\}$ donnée ce fameux PageRank $p(j)$?", leurs concepteurs assurent qu'il s'agit de la "chance" qu'un surfeur se retrouve sur la page j en question. Le but de ce sujet est de lever un coin du voile entourant le mystère du PageRank en justifiant d'une part de l'existence et de l'unicité de la solution du système (S) et en fournissant d'autre part une interprétation probabiliste de ce système permettant de donner un sens mathématique aux affirmations de Brin et Page.

A. Etude de la matrice G de Google

On démontre dans cette section quelques propriétés simples de la matrice G de Google.

I.A.1 Montrer que $G \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive.

I.A.2 Soit $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $d_j = 0$, montrer que $\sum_{i=1}^{N} G(i, j) = 1$.

I.A.3 Soit $j \in \{1, ..., N\}$ tel que $d_j > 0$. En écrivant que

$$\sum_{i=1}^{N} G(i, j) = \sum_{\substack{i \in \{1, ..., N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} G(i, j) + \sum_{\substack{i \in \{1, ..., N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} G(i, j)$$

montrer que $\sum_{i=1}^{N} G(i, j) = 1$.

I.A.4 Que peut-on en déduire pour G ?

I.A.5 Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} p(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ p(N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ défini en (S), en admettant qu'il existe, est invariant par G.

B. Modèle du surfeur sur le Web

Dans toute cette partie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires utilisées sont toutes définies sur cet espace. On rappelle que l'on numérote de 1 à N les N pages Web référencées dans Google. On considère un internaute surfant sur le Web en utilisant Google, on note X_0 la première page visitée et X_n la page sur laquelle il se retrouve au bout de n opérations (soit de clic sur un lien dans une page soit d'abandon au profit d'une autre adresse). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est à valeurs dans $\{1, 2, ..., N\}$ et on admettra que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$vérifie pour tout entier $n \geq 1$ et tout $(x_{n-1}, x_n) \in \{1, 2, ..., N\}^2$

$$P_{\{X_{n-1}=x_{n-1}\}}(X_n = x_n) = P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = G(x_n, x_{n-1})$$

où G est la matrice de Google. On considère n un entier naturel strictement positif.

I.B.1 On note V_n le vecteur de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont pour tout $i \in \{1, 2, ..., N\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante est définie par $(v_n)_i = P(X_n = i)$. Vérifier que V_n est bien un vecteur de probabilité.

I.B.2 Exprimer pour tout $(i, j) \in \{1, 2, ..., N\}^2$ $P(\{X_n = i\} \cap \{X_{n-1} = j\})$ à l'aide de G et V_{n-1}.

I.B.3 En déduire que $V_n = GV_{n-1}$.

I.B.4 Montrer que pour tout k entier naturel $V_k = G^k V_0$.

Partie II Matrices stochastiques

Le but de cette deuxième partie est de prouver l'existence et l'unicité d'un vecteur de probabilité invariant pour une matrice stochastique strictement positive.

A. Etude d'un exemple

On considère une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stochastique et strictement positive. Q peut se mettre sous la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix}$$

avec $q \in]0, 1[$ et $q' \in]0, 1[$.

II.A.1 Déterminer l'ensemble des vecteurs $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $QV = V$.

II.A.2 Montrer qu'il existe un unique vecteur de probabilité $V_\infty \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ invariant par Q et le calculer.

II.A.3 Prouver que pour tout entier $n \geq 1$

$$Q^n = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}.$$

II.A.4 En déduire que $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers l'infini vers une matrice dont les deux vecteurs colonnes sont égaux à V_∞.

On cherchera à généraliser ce résultat dans la partie III.

B. Existence d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.B, $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique.

II.B.1 On note U le vecteur élément de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent 1. Calculer ${}^tQU$.

II.B.2 Montrer que si $Q - I_N$ est inversible, alors ${}^tQ - I_N$ est aussi inversible.

II.B.3 Déduire des deux questions précédentes que 1 est valeur propre de Q.

Soit λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$ et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à la valeur propre λ.

II.B.4 Prouver que le vecteur $Q|V| - |V|$ est positif.
II.B.5 Montrer que le vecteur $|V|$ est invariant par Q.
Indication : on pourra sommer les composantes du vecteur $Q|V| - |V|$.
II.B.6 Prouver l'existence d'au moins un vecteur de probabilité invariant par Q.

C. Unicité d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.C, $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique strictement positive. On sait d'après II.B.6 qu'il existe au moins un vecteur de probabilité invariant par Q noté

$$V_\infty = \begin{pmatrix} (v_\infty)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (v_\infty)_N \end{pmatrix}.$$

Cette section II.C permettra de démontrer l'unicité d'un tel vecteur.

II.C.1 Prouver que si V est un vecteur positif invariant par Q, alors soit $V = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$ soit V est strictement positif.

II.C.2 Justifier que V_∞ est strictement positif.

On considère à présent un autre vecteur de probabilité noté

$$W_\infty = \begin{pmatrix} (w_\infty)_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ (w_\infty)_N \end{pmatrix}$$

invariant par Q. Puis, on définit

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\left\{\frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \mid 1 \leq i \leq N\right\} = \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} \text{ et} \\ V &= W_\infty - \alpha V_\infty. \end{aligned}$$

II.C.3 Montrer que V est invariant par Q.
II.C.4 Montrer que V est positif mais pas strictement positif.
II.C.5 En déduire que $W_\infty = \alpha V_\infty$.
II.C.6 En conclure que $W_\infty = V_\infty$.

On reprend jusqu'à la fin de cette partie les notations de la partie I sur Google et la notion de PageRank.

II.C.7 Montrer que le système (S) définissant le PageRank admet bien une et une seule solution.

II.C.8 Démontrer que $p(i) \geq (1-\rho)/N$ pour tout $i \in \{1, ..., N\}$.

II.C.9 Le rôle du paramètre ρ est essentiel pour assurer l'unicité de la solution du système (S). Que se passerait-il pour $\rho = 1$ et disons $N = 3$ pour simplifier à l'extrême? (Songer qu'il peut exister des pages Web qui ne pointent vers aucune autre!).

Partie III Validation du PageRank

Dans toute cette partie III, on considère $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ matrice stochastique strictement positive. On notera V_∞ l'unique vecteur de probabilité invariant par Q.

A. Valeurs propres de Q

Il s'agit dans cette section III.A de localiser les valeurs propres de Q.

III.A.1 Vérifier que pour tout vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ on a

$$\|QV\|_1 \leq \|V\|_1$$

avec de plus $\|QV\|_1 = \|V\|_1$ lorsque V est positif.

III.A.2 En déduire que pour toute valeur propre réelle λ de Q, on a $|\lambda| \leq 1$.

Soient λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$, et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à λ tel que $\|V\|_1 = 1$. On sait grâce au II.B.5 que $|V| = V_\infty$.

III.A.3 Etablir l'identité

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\, v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\, |v_j|$$

où v_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de V pour $i \in \{1, ..., N\}$.

III.A.4 En déduire en utilisant P 3 que V est colinéaire à $|V|$ puis que $\lambda = 1$.

B. Convergence

On fera dans cette section III.B l'hypothèse supplémentaire que Q est diagonalisable.

Le but de ce qui suit est d'établir que la suite $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la matrice Q_∞ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à V_∞.

III.B.1 Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $S \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, telles que pour tout $n \geq 1$, $Q^n = SD^nS^{-1}$.

III.B.2 Prouver que parmi les N coefficients diagonaux de D un et un seul est égal à 1 alors que tous les autres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

III.B.3 En déduire que la suite $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge vers une matrice Q_∞.

III.B.4 Prouver que pour tout $n \geq 1$, Q^n est stochastique puis que Q_∞ est stochastique.

III.B.5 Démontrer que $QQ_\infty = Q_\infty$.

III.B.6 En déduire que chacun des vecteurs colonnes de Q_∞ est invariant par Q.

III.B.7 Conclure.

On admettra pour la partie III.C que $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers l'infini vers la matrice Q_∞ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à V_∞ sous les seules hypothèses Q stochastique et strictement positive.

C. Application au modèle du surfeur

On reprend pour la fin du sujet les notations du PageRank de Google décrit dans l'introduction de la partie I et du modèle du surfeur décrit dans la partie I.B. On considère X_∞ la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, ..., N\}$ dont la loi est définie par

$$P(X_\infty = i) = p(i) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., N\}.$$

III.C.1 Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X_∞ lorsque n tend vers l'infini.

III.C.2 En quoi ce résultat donne-t-il du sens à l'assertion un peu vague: "le PageRank d'une page donnée représente la chance qu'un internaute se retrouve sur la page en question lorsqu'il surfe"?