.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé N°3 (Pr Taibi Mimoun)

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
1- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
2- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
3- L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augment dernièrement.
4- Les deux vous explosent le système de temps en temps.
5- Bill, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Il fut immobile les trois dernières années de sa vie et s'éteint à Berlin à la suite d'une pneumonie. Il créa avec Alfred Enneper une classe complète de paramétrisations. Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il consolida des travaux de Cauchy (1789-1857) sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable. Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës

Mathématicien du jour

1 Un vecteur propre strictement positif

$T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $T > 0$ et $(I_n + T)^{n-1} > 0$.

1 1°.] Soit $x \in B$ ($x > 0$ et $x \neq 0$) Montrons que $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}_+ \ / \ \theta x \leqslant Tx\}$ est un enesemble non vide fermé et borné .

$0 \in \Gamma_x$ car $Tx \geqslant 0 = 0.x$, donc Γ_x est non vide.

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, l'application $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \theta \mapsto (Tx)_i - \theta.x_i$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\Gamma_x = \bigcap\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \varphi_i^{-1}\{[0, +\infty[\} \cap \mathbb{R}_+$ est un fermé coimme intresection de fermés .

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$, et tout $i = 1...n$, on a : $\theta \leqslant \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ pour $x_i \neq 0$, donc Γ_x est borné .

On pose $\theta(x) = \max(\Gamma_x)$

2 2°] Soit $x \in B$, montrons que $\theta(x) = \min\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i} \ / \ i = 1...n,\ x_i \neq 0\}$.

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$ et pour tour i$\in \{1, ..n\}$ tel que $x_i \neq 0$, on a : $\theta \leqslant \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$. Donc $\theta(x) \leqslant \min\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ /

$i = 1...n,\ x_i \neq 0\}$

D'autre part les réels $\dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ avec $x_i \neq 0$ sont dans Γ_x . D'où $\theta(x) = \min\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i} \ /\ i = 1...n,\ x_i \neq 0\}$.

3 3°] Montrons que pour tous $\alpha > 0$ et $x \in B$, on a : $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

Comme T est linéaire, on a : $\{\dfrac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i} \ /\ i = 1..n$ et $x_i \neq 0\} = \{\dfrac{(T(x))_i}{(x)_i} \ /\ i = 1..n$ et $x_i \neq 0\}$, donc $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

4 4°] Montrons que $P(B) \subset B^+$

Soit $x \in B$, posons $y = Px$, $P = (p_{ij})_{ij}$ et $(y)_i = y_i$.

Comme $x \neq 0$ et $x \geqslant 0$, alors il existe j_0 tel que $x_{j_0} > 0$, Dond, pour tout i, on a : $y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j = p_{ij_0}x_{j_0} + \sum_{j=1, j\neq j_0}^{n} p_{ij}x_j > 0$ car $P > 0$ et $x \geqslant 0$. D'où le résultat demandé .

5 5°] Montrons que : $\forall x \in B,\ \theta(Px) \geqslant \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$
Pour $\theta \in \Gamma_x$, on a : $\theta x \leqslant Tx$, donc $\theta Px = P(\theta x) \leqslant P(Tx)$ car $P > 0$ $(P(\underbrace{Tx - \theta x}_{\geqslant 0}) \geqslant 0$)
D'où $\theta Px \leqslant T(Px)$ car $TP = PT$ (P polynôme en T) et par suite $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$
En conclusion :
$$\theta(x) = \max \Gamma_x \leqslant \max \Gamma_{Px} = \theta(Px).$$

Reste à verifier que $\theta(Px) > 0$.
D'après la question 4° $P(B) \subset B^+$, donc $TPx = P(Tx) > 0$ et $Px > 0$ car $Tx \in B$ et puis $\theta(Px) = \min\{\dfrac{(P(Tx))_{ii}}{(Px)_{ii}}$, $i = 1..n\} > 0$.

6 6°] Supposons que $x \in B$ est un vecteur porpre de T associé à la valeur propre λ, montrons que $\theta(Px) = \theta(x)$.
x étént positif, donc $Tx > 0$ et pour tout $i = 1..n$, $0 \leqslant (Tx)_i \leqslant \lambda x_i$.
Pour $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $x_{i_0} \neq 0$, on a $\lambda \geqslant \dfrac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}} \geqslant 0$.
Comme $P = (I + T)^{n-1}$, il en résulte que $(1 + \lambda)^{n-1}$ est une valeur paropre de P et $Px = (1 + \lambda)^{n-1}x$.
D'où $\theta(Px) = \theta((1 + \lambda)^{n-1}x) = \theta(x)$ car $(1 + \lambda)^{n-1} > 0$.
En conclusion : $\theta(Px) = \theta(x)$

7 7°] Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$. Montrons que x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\theta(x)$.
Posons $y = Tx - \theta(x)x$, on a $y \geqslant 0$
Si $y \neq 0$, comme $P > 0$, on a : $0 < Py = P(Tx - \theta(x)x) = P(Tx) - \theta(x)Px = T(Px) - \theta(x)P(x)$ car P et T commutent.
Donc, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(T(Px))_i - \theta(x)(Px)_i > 0$ et puisque $\theta(x) = \theta(Px)$, on a : $\theta(x) < \min\{\dfrac{(T(Px))_i}{(Px)_i}$, $i = 1..n\} = \theta(Px)$ ce qui est absurde .Donc : $y = 0$ et par suite $Tx = \theta(x)x$.

8 8°] Soit $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ /\ x \geqslant 0$ et $\|x\|_1 = 1\}$. Montrons que $\theta : P(C) \to \mathbb{R},\ y \mapsto \theta(y)$ est continue sur $P(C)$.
Pour $i = 1..n$, soit l'application $\varphi_i : y \mapsto \dfrac{(Ty)_i}{y_i}$ est bien définie et continue sur $P(C)$ car tout élément y de $P(C)$ est strictement positif . Donc $\theta = \min(\varphi_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est continue sur $P(C)$.

9 9°] Comme $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0$ et $\|x\|_1 = 1\}$ est un compact (fermé +bornée en dimension finie) , et l'application P est coninue sur $\mathbb{R}^n$ car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $P(C)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$.
L'application θ étant continue sur le compact $P(C)$ à valeur dans $\mathbf{R}$, il existe donc $x_0 \in P(C)$ tel que

$$\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

.

10 10°] Pour $x \in C \subset B$, on a $Px \in P(C) \subset B^+$ et par la question $5)$: $\theta(x) \leqslant \theta(Px)$. Donc :
Pour tout $x \in C = B \cap \sum$, $\theta(x) \leqslant \theta(Px) \leqslant \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$.et par suite :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) \leqslant \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$$

11 11°] Lorsque x décrit B , alors $y = \dfrac{1}{\|x\|_1} x$ décrit C, donc $\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{y \in C} \theta(\|x\|_1 y) = \sup_{y \in C} \theta(y)$ car $\|x\|_1 > 0$ (voir question 3°)

12 12°] D'après ce qui prècède, on a :
$\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x) \leqslant \sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0) \overset{\text{noté}}{=} \theta_0$
Comme l'application $\left\{ \begin{array}{ll} C = B \cap \sum & \to P(C) \\ x & \mapsto Px \end{array} \right\}$ est bijective, on a :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

13 13°]

$x_0 \in P(C)$, donc $x_0 > 0$. On rappelle que $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0$ et $\|x\|_1 = 1\}$ est compact .
On a aussi $y = Tx_0 - \theta_0 x_0 \geqslant 0$.
Si $y > 0$, alors pour tout $i = 1..n$; $(Tx_0)_i - \theta_0 (x_0)_i > 0$, donc $\theta_0 < \{\dfrac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i}, i = 1..n\}$ et apr suite :
$\theta_0 < \min\{\dfrac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i}, i = 1..n\} = \theta(x_0) = \theta_0$ ce qui absurde. D'où $Tx_0 = \theta_0 x_0$.
Par $\theta(Px) > 0$ pour tout $x \in B \cap \sum = C$ et que θ est continue sur le compact $P(C)$, on déduit que $\theta_0 = \sup_{x \in P(C)} \theta(x) > 0$.

2 Une méthode d'approximation

T est une matrice stochastique positive telle que $P = (I_n + T)^{n-1} > 0$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $x^+ = (|x_1|, ..., |x_n|)$
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k = \dfrac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j$

14 14°] Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T associé à θ, on a $x \neq 0$ et $Tx = \theta x$
Pour $i = 1...n$; $(Tx)_i = \theta x_i$, donc $|\theta| \, |x_i| = |(Tx)_i|$.

Si $T=(t_{ij})$, alors $(Tx)_i=\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j$ et apr suite : $\begin{array}{ll} |(Tx)_i| & \leqslant \sum_{j=1}^{n} t_{ij}\,|x_j| \quad ;\ t_{ij}\geqslant 0 \\ & = (Tx^+)_i \end{array}$,.D'où $|\theta|\,|x_i|\leqslant (Tx^+)_i$ et par suite :

$$|\theta|\,x^+\leqslant Tx^+$$

15 15°] Comme $x\neq 0$, on a $x^+\geqslant 0$ et $x^+\neq 0$ et $|\theta|x^+\leqslant Tx^+$ (question 14). Donc $|\theta|\leqslant \theta(x^+)\leqslant \theta_0$.

16 16°] On a $|\theta|\,\|x\|_1=|\theta|\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\sum_{i=1}^{n}|\theta|\,|x_i|$. Or $Tx=\theta x$, donc :

$$\begin{aligned} |\theta|\,\left\|x^+\right\|_1 = |\theta|\,\|x\|_1 = \|\theta x\|_1 = \|Tx\|_i &= \sum_{i=1}^{n}|(Tx)_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}\,|x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} t_{ij}}_{=1})\,|x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n}|x_j| = \left\|x^+\right\|_1 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$|\theta|\,\left\|x^+\right\|_1\leqslant \left\|x^+\right\|_1$$

Comme $x\neq 0$, on a $\left\|x^+\right\|_1>0$ et puis $|\theta|\leqslant 1$.

17 17°] Comme T est stochastique ($\forall j,\ \sum_{i=1}^{n} t_{ij}=1$), alors $\theta=1$ est une valeur propre de T associée au vecteur propre $x=(1,1,....,1)\in\mathbb{R}^n$, donc $\theta=1\leqslant\theta_0$ (question 15). or θ_0 est valeur propre de T (question 13) et puis apr la question 16, on a :

$$\theta_0=1$$

18 18°] Montrons que pour tout $k\geqslant 1$, T^k et R_k sont stochastiques.
Première méthode : On ulilise les résultats suivants
(1) Une matrice $A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et stochastique si et seulement si $u=(1,....,1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
(2) Si $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ admet une valeur propre λ associé à un vecteur propre x, alors $Q(\lambda)$ est une veleur propre de $Q(A)$ associé au vecteur propre x.
Et on remarque que T^k et R_k sont des polynômes en la matrice stochastique T .
Dexième méthode : Utiliser une récurrence
$T^0=I_n$ et T^1 sont stochastiques
Si, pour $k\geqslant 1$ la matrice T^k est stochastique, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(T^{k+1})_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(T)_{il}(T^k)_{lj} &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(T)_{il}(T^k)_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(T)_{il}}_{=1}(T^k)_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}(T^k)_{lj}=1 \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Donc T^{k+1} est aussi stochastique.

$R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j$, donc $\sum_{i=1}^{n}(R_k)_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(T^j)_{ij} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k}\underbrace{\sum_{i=0}^{n}(T^j)_{ij}}_{=1} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k} = 1$.

19

19°] Montrons les inégalités : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left\|T^k\right\|_1 \leqslant 1$ et $\|R_k\|_1 \leqslant 1$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$, et $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|T^k x\right\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|(T^k x)_i\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(T^k)_{ij}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|T^k\right)_{ij}\right|\left|x_j\right| \quad = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(T^k)_{ij}}_{\geqslant 0}\left|x_j\right| \quad \text{Car } T \geqslant 0 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(T^k)_{ij}}_{=1}\left|x_j\right| \quad \text{car } T \text{ est stochastique} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right| = \|x\|_1
\end{aligned}$$

On en déduit que $\left\|T^k\right\|_1 = \sup_{x \neq 0}\frac{\left\|T^k x)\right\|_1}{\|x\|_1} \leqslant 1$.

De même $\|R_k\|_1 \leqslant 1$ car R_k est aussi stochastique.

20

20°] Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $\|TR_k - R_k\| \leqslant \frac{2}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Si $k = 1$, alors $R_1 = I_n$, donc $TR_1 - R_1 = T - I_n$ et par suite $\|TR_1 - R_1\|_1 = \|T - I_n\|_1 \leqslant \|T\|_1 + \|I_n\|_1 = 1 + 1 = \frac{2}{1}$

Si $k > 1$, on a :

$TR_k - R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^{j+1} - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j = \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} T^j - \sum_{j=0}^{k-1} T^j\right) = \frac{1}{k}(T^k - I_n)$, donc $\|TR_k - R_k\|_1 = \left\|\frac{1}{k}(T^k - I_n)\right\|$ $\frac{1}{k}\left(\left\|T^k\right\|_1 + \|I_n\|_1\right) \leqslant \frac{2}{k}$

21

21°] Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrons que la suite vectorielle $(R_k x)_k$ a au moins une valeur d'adhérence

Comme R_k est stochastique pour tout $k > 0$, on a d'après la question $19)$: $\|R_k x\|_1 \leqslant \|R_k\|_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_1$. La suite $(R_k x)_k$ est bornée dans l'espace de dimension finie $\mathbb{C}^n$, donc par le théorème de Bolzano-Weiestrass, la suite $(R_k x)_k$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}^n$.

22

22°] Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x)_{k\geqslant 1}$ et $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $k \mapsto \varphi(k)$ une extraction telle que $\lim_{k\infty} R_{\varphi(k)}x = y$. Or $\left\|TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x\right\|_1 \leqslant \left\|TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)}\right\|_1\|x_1\|_1 \leqslant \frac{2}{\varphi(k)}\|x_1\|_1 \underset{k\infty}{\to} 0$, donc $\lim_{k\infty}\left(TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x\right) = 0$ (toutes les normes sur C^n sont équivalentes) et comme T est continue sur C^n (application liéaire sur un espace de dimension finie) et que $\lim_k R_{\varphi(k)}x = y$, il en résulte que $\lim_k TR_{\varphi(k)}x = Ty$ et puis $Ty = y$.

Pour tout $j \in N$, $T^j y = y$ (y point fixe de T), donc $R_k y = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j y = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} y = y$.

23

23°] Soient y et z deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_kx)_k$ et m, l deux entiers naturels, on a : $R_l(R_mx-z)-R_m(R_lx-y)=-R_lz+R_my=y-z$ (resulte de la question 20) et du fait que R_l et R_m commutent car des polynômes en T) .

24

24°] Montrons que la suite $(R_kx)_k$ admet une seule valeur d'adhérence.
Si y et z sont des vaelurs d'adhérence de la suite $(R_kx)_k$, alors d'après la question 23)

$$\begin{aligned}\|y-z\|_1 &= \|R_l(R_mx-z)-R_m(R_lx-y)\|_1\\ &\leqslant \|R_l(R_mx-z)\|_1+\|R_m(R_lx-y)\|_1\\ &\leqslant \|R_l\|_1\|R_mx-z\|_1+\|R_m\|_1\|R_lx-y\|_1\\ &\leqslant \|R_mx-z\|_1+\|R_lx-y\|_1 \qquad \text{car } \|R_k\|_1\leqslant 1\end{aligned}$$

On prend alors $l=\varphi(k)$ et $m=\psi(k)$ où φ et ψ sont deux extractions telles que $\lim\limits_{k\infty}\left\|R_{\psi(k)}x-z\right\|_1=0$ et $\lim\limits_{k\infty}\left\|R_{\varphi(k)}x-y\right\|_1=0$, pour déduire que $\lim\limits_{k\infty}\|y-z\|_1=0$ et puis $y=z$.

25

25°] Soit $x\in C^n$, la suite $(R_kx)_k$ est bornée et admet une unique valeur d'adhérence dans C^n, donc converge dans C^n. Sa limite dépond à priori de x, notons la Rx : $Rx=\lim\limits_{k\infty}R_kx$.
Par linérité de R_k et de la limite, on déduit que R est linéaire (R est donc une matice, d'après d'identification faite au début du problème) .

Si l'on prend $x=E_j$ où $(E_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est la base canonique de C^n, on a : $\lim\limits_{k}R_kE=RE_j$, donc les suites composantes de $(R_k)_k$ convergent vers les composantes de R et par suite $(R_k)_k$ converge vers R ..

26

26°] Montrons que T et R commutent .
T et R_k commutent car R_k est un polynôme en T. Comme $TR_k=R_k$ pour tout $k\geqslant 1$ et que les applications $\begin{array}{rcl}M_{n,n}(\mathbb{C}) & \to & M_{n,n}(\mathbb{C})\\ M & \mapsto & MT\end{array}$ et $\begin{array}{rcl}M_{n,n}(\mathbb{C}) & \to & M_{n,n}(\mathbb{C})\\ M & \mapsto & TM\end{array}$ sont continues (car linéaires sur un espace de dimensions finie) , on a donc : $TR=\lim\limits_{k}TR_k=\lim\limits_{k}R_kT=RT$.

27

27°] Montrons que $RT=R$ et $R^2=R$.
D'après al question 20) la suite $(TR_k-R_k)_k$ converge vers 0 et par la question 25) la suite $(R_k)_k$ converge vers R, donc $(TR_k)_k$ converge vers R. Mais $(TR_k)_k$ converge aussi vers TR, donc $TR=R$..
Pour $k\in\mathbb{N}^*$, $R_kR=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}T^jR=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}RT^j$ et puisque $RT=R$, on a aussi $RT^j=R$ pour tout $j\geqslant 0$, donc $R_kR=\dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1}R=R$.
On fait tendre alors k vers $+\infty$ (l'application $M\mapsto MR$ est continue), il en resulte que $R^2=R$.

28

28°] Par $TR=R$, on a : $(T-I_n)R=R(T-I_n)=0$ (T et R commutent). Donc : $\begin{cases}Im(T-I_n)\subset \text{Ker}(R)\\ Im(R)\subset \text{Ker}(T-I_n)\end{cases}$
De plus $R^2=R$, donc R est un projecteur tel que $Im(R)\subset \text{Ker}(T-I_n)$.

29

29°] On suppose que $\text{Ker}(T-I_n)=1$, alors par la question 28) , $rg(R)\leqslant 1$.
Notons $u=(1,...,1)$, on a : $R_ku=u$ pour tout $k\geqslant 1$ car R_k est stochastique. Donc $Ru=\lim\limits_{k\infty}R_ku=u$ et par suite $R\neq 0$ (R est même stochastique).
D'où $rg(R)\geqslant 1$.
On conclut que $Im(R)=\text{Ker}(T-I_n)$ et $\text{Ker}(R)=Im(T-I_n)$.
On sait que x_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre 1 (voir questions 13 et 17), donc $\text{Ker}(T-I_n)=vect(x_0)$.
Soit $x\in B$, on a $Rx\in Im(R)=\text{Ker}(T-I_n)=vect(x_0)$, donc il existe $\lambda\in R$ tel que $Rx=\lambda x_0$ (**).
De (**) on déduit que $\lambda\geqslant 0$ car $R\geqslant 0$ et $x_0>0$

$$\begin{aligned}
\text{De plus}\quad |\lambda|\,\|x_0\|_1 \quad = \|Rx\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}(Rx)_i && \text{car } R \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(R)_{ij}x_j\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(R)_{ij}x_j\\
&= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(R)_{ij}}_{=1}x_j && R \text{ est stochastique}\\
&= \sum_{j=1}^{n}x_j = \|x\|_1
\end{aligned}$$

Donc $\lambda = |\lambda| = \dfrac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$ et par suite $Rx = \dfrac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}x_0$

Remarque : Si $y \in B \cap \sum = C$, alors $y \in B$ et $\|y\|_1 = 1$, et par suite

$$\lim_{k\infty} R_k y = Ry = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

À la prochaine