Former pour réussir

Sommaire

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Sommaire

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

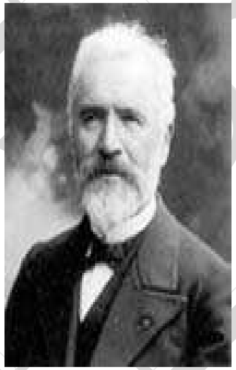
Algebre Lineaire : Revision Sup

15 SEPTEMBRE 2012

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).

- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Mathématicien du jour

Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un poyltechnicien (1855) fils de polytechnicie (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

Problème I. Polynômes de Lagrange, de Bernstein.

Notation et vocabulaire.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts, on pose $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$, appelés polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $a_0, \ldots, a_n$.

- Dans tout le problème, $l^\infty([0,1], \mathbb{R})$ désignera l'ensemble des fonctions définies de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, bornées.

- On pose :

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$
$$P_{0,0} = 1$$

- pour tout $f \in l^\infty([0,1], \mathbb{R})$, les polynômes de Bernstein associés sont définies par les relations suivantes :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$
$$B_0(f) = 1$$

- Pour tout $f \in l^\infty([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.
- On dira qu'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f, quand $\lim_{n\longrightarrow+\infty\rightarrow|} |f_n - f|| = 0$.
- On rappelle qu'une fonction f est dite continue uniformément sur $[0,1]$ si elle vérifie la propriété suivante :
  $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ on a :
  $|x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$

Partie I.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts.

① Calculer $L_k(a_j)$ pour $0 \leq j,k \leq n$.

② En déduire que la famille $(L_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.

③ Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$.

On pourra s'intéresser aux racines de $Q(X) = P(X) - \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$.

④ En déduire que la famille $(L_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est une base $\mathbb{R}_n[X]$.

⑤ En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exists! P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_k) = f(a_k), \forall k \in [|0,n|]$.
On dit que P interpole f aux points $(a_k)_{0\leq k\leq n}$.

⑥ En déduire que l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P(X) & \longmapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array}$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie II.

① Montrer que $(l^\infty([0,1],\mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

② Montrer que la famille $(P_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.
On admettra dans la suite qu'elle en génératrice, donc base.

③ Exprimer $(X^n(1-X)^n)^{(n)}$ dans cette base.

④ En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

⑤ Montrer que $B_n : \begin{array}{ccc} l^\infty([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ f & \longmapsto & B_n(f) \end{array}$ est linéaire.

⑥ **a** Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = 1$.

b En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} (k-nX)^2 P_{n,k} = nX(1-X)$.

c Établir la formule suivante :

$$B_n(Xf) = \frac{1}{n} X(1-X)\left(B_n(f)\right)' + XB_n(f)$$

⑦ **a** Montrer que pour tout $m \leq n$, $B_n(X^m)$ est un polynôme de degré m.

b En déduire que B_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III.

① Soit $x \in [0,1]$ et $\alpha \in]0,1[$.

On pose : $K_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq k \leq n \text{ et } \alpha < \left| \frac{k}{n} - x \right| \right\}$.

Montrer que : $\sum_{k \in K_n} P_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

On pourra d'abord remarquer que $\max_{t \in [0,1]} t - t^2 = \frac{1}{4}$.

② **a** On suppose f continue en un point $x_0 \in [0,1]$, montrer alors que : $\lim_{n \to +\infty} B_n(f)(x_0) = f(x_0)$.

b On suppose f continue sur $[0,1]$, montrer alors que $B_n(f)$ converge uniformément vers f dans l'intervalle $[0,1]$.

Partie IV.

① Montrer que l'application Δ est linéaire.

② Préciser le noyau de sa réstriction, Δ_n définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

③ Montrer que $\deg(\Delta P) = \deg(P) - 1$, pour tout polynôme P non constant.

④ En déduire que $\operatorname{Im} \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On pourra d'abord montrer que X^k admet un antécédant dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in [|0, n-1|]$.

⑤ Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que :

a $\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+n-k)$.

Où $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{\text{n fois}}$ et la convention $\Delta^0(f) = f$.

b $B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(g)(0)$

Où g est la fonction définié par $g(x) = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Problème II. Crochet de Lie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tous éléments f et g de $\mathcal{L}(E)$, on pose $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I.

① Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est liée $\forall x \in E$.

a Montrer que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x . x$.

b Montrer que $\forall (x,y) \in E \setminus \{0_E\} \times E \setminus \{0_E\}$, on a : $\lambda_x = \lambda_y$

On pourra étudier les cas : $\{x,y\}$ libre et $\{x,y\}$ liée.

c En déduire que f est une homothétie de E.

② Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f,g] = 0, \quad \forall g \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que f n'est pas une homothétie.

a justifier l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $(x, f(x)$ soit libre.

b Soit $F = Vect\{x\}$ et H un supplémentaire de F contenant $f(x)$, dont on admettra l'existence, et g la symétrie par rapport à F parallélement à G.
Calculer $g(f(x))$ et $f(g(x))$, puis en déduire une contradiction.

c Conclure.

Partie II.

Dans toute cette partie on se donne $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f, g] = \alpha f + \beta g$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

① On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.

a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $[f^n, g] = \alpha n f^n$.
On rappelle que $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n fois}}$ avec la convention $f^0 = \text{id}_E$.

b On suppose que $f^{n+1} = 0$ et $f^n \neq 0$, montrer alors que la famille $(\text{id}_E, \ldots, f^n)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

② Dans cette question on suppose que f et g sont des projecteurs de E distincts, et $\alpha \notin \{0, 1\}$.

a Montrer que $2\alpha(g \circ f) + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$.

b En déduire que $\text{Im } f \subset \text{Im } g$, puis que $g \circ f = f$.

c On suppose $f \neq 0$, montrer que $\alpha = -1, \beta = 1$ et $\text{Im } f = \text{Im } g$.

d Réciproquement montrer que si p et q sont des projecteurs de E, vérifiant $\text{Im } q \subset \text{Im } p$ et $q \circ p = p$, alors $[p, q] = -p + q$.

③ Dans cette question on suppose que f et g sont des projecteurs de E distincts avec $f \neq 0$, et $\alpha \notin \{0, -1\}$.

a Montrer que $\ker g \subset \ker f$, $f \circ g = f$.

b Montrer que $\alpha + \beta = 0, \alpha = 1$.

c En déduire que $\ker g = \ker f$.

d Réciproquement montrer que si p et q sont des projecteurs de E, vérifiant $\ker p \subset \ker q$ et $p \circ q = p$, alors $[p, q] = p - q$.

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Arithmétique des polynômes

29 SEPTEMBRE 2012

Blague du jour

Un homme regarde un match de foot dans un café, lorsque son équipe nationale marque un but, le chien se met à courir dans tout les sens. Le voisin demande à l'homme : Qu'est ce qui lui arrive votre chien ?
- Il est supporter de l'équipe nationale, il est content.
- Ben dites donc, juste pour un but ! Et qu'est-ce-qu'il fait quand elle gagne un match ?!!
- Je ne sais pas, je ne l'ai que depuis 5 ans...

Mathématicien du jour

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894)

Mathématicien russe, connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. Tchebychev appartient à l'école mathématique russe fondée par Daniel Bernoulli et Euler. Il démontra en 1850 une conjecture énoncée par Bertrand : Pour tout entier n au moins égal à 2, il existe un nombre premier entre n et $2n$.

Commutant d'un endomorphisme. CNC 99, TSI.

Définitions et notations

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $h, g \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $h \circ g$ sera noté simplement hg, l'identité se notera I.
Si f est un endomorphisme quelconque de E, on note $f^0 = I$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k désigne l'endomorphisme composé de k endomorphismes égaux à f ; si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{p} a_k f^k$. On note aussi $\mathbb{K}[f] = \{P(f);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E);\ fg = gf\}$.

Partie I

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Soit f un endomorphisme quelconque de E.

① **a** Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

b Montrer que $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenue dans $C(f)$.

c Si f est une homothétie, déterminer $C(f)$ et $\mathbb{K}[f]$.

Dans la suite on montre que si $C(f) = \mathcal{L}(E)$ alors f est une homothétie.

② Dans cette question, on suppose que pour tout vecteur $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

a Démontrer que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x.x$.

b Soit $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$, démontrer que si la famille (x,y) est liée alors $\lambda_x = \lambda_y$.

c Soit $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$, démontrer que si la famille (x,y) est libre alors $\lambda_x = \lambda_y$.

d En déduire alors que f est une homothétie.

③ On suppose maintenant que f n'est pas une homothétie.

a Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre.

b Justifier l' existence d'une famille $(e_3, \dots, e_n)$ d'éléments de E telle que la famille $(x, f(x), e_3, \dots, e_n)$ soit une base de E.

c On désigne par h la symétrie de E par rapport au sous-espace vectoriel $\mathbb{K}.x$ parallèlement au sous-espace vectoriel $Vect(\{f(x), e_3, \dots, e_n\})$.

Comparer $h(f(x))$ et $f(h(x))$ puis en déduire que $h \notin C(f)$.

④ On suppose maintenant que $C(f) = \mathcal{L}(E)$. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que f est une homothétie.

Partie II

Soit f un endomorphisme quelconque de E.

① Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des scalaires distincts. On désigne par φ l'application qui à tout élément P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ fait correspondre l'élément $(P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n))$ de $\mathbb{K}^n$.

a Montrer que φ est un morphisme d'espaces vectoriels.

b Déterminer son noyau et en déduire que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels .

c On pose $L_i = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \dfrac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$.

☞ Calculer $\varphi(L_i)$ pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$ et en déduire que $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

☞ Exprimer l'antécédent par φ d'un élément $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ à l'aide de $L_1, \dots, L_n$ et $a_1, \dots, a_n$.

② On suppose dans cette question que f possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i désigne un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i et E_{λ_i} le sous-espace propre associé.

a

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

- Montrer que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
- Qu'en déduit-on pour f ?
- Exprimer E_{λ_i} à l'aide du vecteur e_i.

b Soit $g\in C(f)$.

- Montrer que pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $g(e_i)\in E_{\lambda_i}$ et en déduire que e_i est un vecteur propre de g. Soit alors α_i la valeur propre associée.
- A l'aide de la question **1**, justifier l'existence d'un unique polynôme $Q\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $Q(\lambda_i)=\alpha_i$ pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$.
- Pour chaque $i\in\{1,\ldots,n\}$ calculer $f^k(e_i)$, $k\in N^*$, puis $Q(f)(e_i)$.
- En déduire que $Q(f)=g$.

c Montrer que $C(f)=Vect(\{I,f,\ldots,f^{n-1}\})=\mathbb{K}[f]$.

d En utilisant la question 1 de cette partie, montrer que la famille $(I,f,\ldots,f^{n-1})$ de $\mathcal{L}(E)$ est libre et en déduire $\dim C(f)$.
(On pourra vérifier, en calculant les $P(f)(e_i)$, que si $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $P(f)=0$ alors $\varphi(P)=0$ pour φ à préciser).

③ Dans cette question, on suppose que $\dim E=2$ et que f n'est pas une homothétie.

a Etudier la famille (I,f) et en déduire un minorant de la dimension de $\mathbb{K}[f]$ puis de celle de $C(f)$.

b Justifier l'existence de $e\in E$ tel que $(e,f(e))$ soit une base de E et montrer que l'application $H: C(f)\longrightarrow E$ qui à $g\in C(f)$ fait correspondre $g(e)$ est un morphisme injectif d'espaces vectoriels .

c En déduire la dimension de $C(f)$ et de $\mathbb{K}[f]$ puis exprimer $C(f)$ et $\mathbb{K}[f]$ à l'aide de I et f.

d Déduire de ce qui précède que la famille (I,f,f^2) de $\mathcal{L}(E)$ est liée et déterminer les composantes de f^2 dans la base (I,f) de $C(f)$.

Partie III

Soit A un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par la composition des applications. Dans cette partie, on suppose que $\dim A=n^2-1$. On veut montrer que $I\in A$. Pour cela, raisonnant par l'absurde, on suppose que $I\notin A$.

① **a** Montrer que A et $\mathbb{K}.I$ sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

b Soit p la projection sur $\mathbb{K}.I$ parallèlement à A. Montrer que p est un morphisme d'algèbres.

② Montrer que si $f\in\mathcal{L}(E)$ et $f^2\in A$, alors $f\in A$.

③ Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. f_{ij} désigne l'élément de $\mathcal{L}(E)$ définit par :

$$\begin{cases} f_{ij}(e_j) = e_i \\ f_{ij}(e_k) = 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

a Calculer f_{ij}^2 pour $i \neq j$.

b Montrer que si $i \neq j$ alors $f_{ij} \in A$.

c En déduire que $f_{ii} \in A$. (On pourra calculer $f_{ij}f_{ji}$ pour un $j \neq i$).

④ Calculer $\sum_{i=1}^{n} f_{ii}$ et conclure.

⑤ ☞ Montrer que $(f_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ constitue une base de $\mathcal{L}(E)$.

☞ Vérifier les relations $f_{ij}f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}$ où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$.

Partie IV

Dans cette partie, on suppose que : dim E=2 et dim A=3.

① ① Montrer que A possède une base du type (I, φ, ψ).

② Montrer que $\varphi\psi \neq \psi\varphi$.
(On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question **3** de la partie **II**)

③ Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $\varphi\psi = \lambda\varphi + \mu\psi + \nu I$.

④ Calculer alors $(\varphi - \mu I)(\psi - \lambda I)$ et montrer que $(\varphi - \mu I)(\psi - \lambda I) = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde).

⑤ Montrer alors que A possède une base du type (I, φ_1, ψ_1) avec $\varphi_1\psi_1 = 0$.

② ① Montrer que $\operatorname{Im} \psi_1 \subset \operatorname{Ker} \varphi_1$ et que les endomorphismes φ_1 et ψ_1 sont de rang 1.

② Montrer que φ_1 et ψ_1 ont un vecteur propre commun qu'on notera e_1.

③ En déduire qu'il existe une base (e_1, e_2) de E telle que la matrice de tout élément de A dans cette base soit triangulaire supérieure.

③ Soit maintenant (e_1', e_2') une base de E et A' la partie de $\mathcal{L}(E)$ formée de tous les endomorphismes dont les matrices dans cette base sont triangulaires supérieures. Montrer que A' est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3.

FIN FIN

Á la prochaine

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

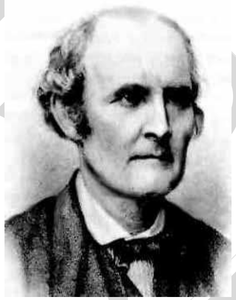
Devoir Surveillé

Algèbre Linéaire-Arithmétique

1 OCTOBRE 2012

Blague du jour

Un vieux milliardaire téléphone à une conseillère : J'ai 60 ans et je veux me marier avec une jeune fille de 20 ans. Pensez-vous que j'aie plus de chance de l'amener à m'épouser si je lui dis il y a quelques année, j'avais juste 50 ans ? La conseillère lui répond : A mon avis, vous feriez mieux de lui dire que quelques année, vous approchez des 80 ans !



Arthur Cayley (1821-1895)

Mathématicien du jour

Mathématicien et avocat britannique, l'un des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices. Il a donné le premier, une définition qui s'approche de la notion moderne de groupe. Il a reçu la Médaille Copley en 1882. On lui doit aussi la découverte des nombres de Cayley, les octonions.

Problème I : Endomorphismes nilpotents de rang $n-1$, e3a 2007, PSI

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.
La matrice unité de cet espace sera noéte I_n et la matrice nulle O_n.
L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

- v^0 est l'endomorphisme unité,
- $\forall m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v \circ v^m$.

L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).
Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$J(\lambda) = (u_{i,j}) \text{ avec } \begin{cases} \forall i \in \{1,\ldots,n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall i \in \{1,\ldots,n\},\ u_{i,i} = \lambda \\ u_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.
2.
   2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n-1$, puis pour $k \in \mathbb{N}, k \geq n$.

   2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.
3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.
4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.
5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\text{Ker}\,(u^i) \subset \text{Ker}\,(u^{i+j})$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim\,(\text{Ker}\,(u^m))$. Prouver l'existence de
$$r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$
3. Montrer que :

   (i) $\forall m < r$, $\text{Ker}\,(u^m)$ est strictement inclus dans $\text{Ker}\,(u^{m+1})$,

   (ii) $\text{Ker}\,(u^r) = \text{Ker}\,(u^{r+1})$,

   (iii) $\forall m \geq r$, $\text{Ker}\,(u^m) = \text{Ker}\,(u^{m+1})$.

Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\text{Im}(v^p)$.

   1.1. Déterminer $\text{Im}(w)$.

   1.2. Prouver que $\text{Ker}\,(w) \subset \text{Ker}\,(v^q)$.

   1.3. Vérifier alors que l'on a
   $$\dim\,(\text{Ker}\,(v^{p+q})) \leq \dim\,(\text{Ker}\,(v^p)) + \dim\,(\text{Ker}\,(v^q))$$

   1.4. En déduire
   $$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \dim\,(\text{Ker}\,(v^i)) \leq i$$

   1.5. Démontrer qu'en fait $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $\dim\,(\text{Ker}\,(v^i)) = i$.
2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.
3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que
$$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \ldots, v^{n-1}(e))$$
soit une base de E.
4. Ecrire la matrice de v dans cette base. Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.
5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

Problème II : Indice de cyclicité, CCP 2010, TSI

Notations.

- Etant donné un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on note $\det(l)$ son déterminant, $\mathrm{tr}(l)$ sa trace et χ_l son polynôme caractéristique. En notant id l'endomorphisme identité, on définit $l^0 = id$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $l^{k+1} = l \circ l^k$.

Objectifs.

Etant donné un vecteur non nul u et un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on définit un entier $r(l,u)$ à partir des itérées du vecteur par l'endomorphisme. Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme, liées à la valeur de l'entier $r(l,u)$. On fait établir des résultats généraux sur les endomorphismes étudiés.

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ avec $n \geq 2$ et l est un endomorphisme de E.

II.1. Soit u un vecteur non nul de E.

1.1. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de $k+1$ vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. On note $r(l,u)$ ce plus petit entier.

1.2. Justifier l'encadrement $1 \leq r(l,u) \leq n$.

1.3. Montrer que $r(l,u) = 1$ si et seulement si u est un vecteur propre de l. Montrer que $r(l,u) = n$ si et seulement si la famille $(u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$ est une base de E.

II.2. Un exemple.
Dans cette question, on suppose $n = 4$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E représenté par $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$.
Montrer que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre. Déterminer trois réels x, y, z tels que $f^3(e_1) = xf^2(e_1) + yf(e_1) + ze_1$. En déduire $r(f, e_1)$.
On reprend le cas général où E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et l un endomorphisme de E. Soit u un vecteur non nul de E.

II.3. On suppose $n = r(l,u)$. D'après $II.1.3$, la famille $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$ est une base de E. On note $l^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.

3.1. Déterminer la matrice $Mat_{\mathcal{B}(u)}(l)$ de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathcal{B}(u)$. Calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$

3.2. Déterminer $\chi_l(\lambda) = \det(l - \lambda id)$, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme l (on pourra calculer ce déterminant en ajoutant à la première ligne une combinaison linéaire des autres lignes, opération codée $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} L_i$ où L_i est la ligne d'indice i).

II.4. On note $\mathcal{I}(l,u)$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que l'endomorphisme $P(l)$ vérifie $P(l)(u) = 0$.

4.1. Montrer que $\mathcal{I}(l,u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté $G(l,u)$, tel que $\mathcal{I}(l,u)$ est formé de tous les polynômes produits du polynôme $G(l,u)$ par un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

4.2. Justifier que le polynôme $G(l,u)$ divise le polynôme χ_l. Montrer que le polynôme $G(l,u)$ est de degré $r(l,u)$.

4.3. On reprend l'exemple de $II.2$. Déterminer le polynôme $G(f,e_1)$. En déduire le polynôme caractéristique de f puis les valeurs propres de f. Dans la question $II.2$, on montre que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre ; en utilisant ce résultat et le spectre de f, en déduire que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

4.4. On suppose que l'endomorphisme l et le vecteur u vérifient les hypothèses de la question $II.3$: $r(l,u) = n$ et
$$l^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u).$$
Déterminer le polynôme $G(l,u)$ et retrouver ainsi l'expression du polynôme caractéristique de l'endomorphisme l.

II.5. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $l^p = 0$.

5.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l.

5.2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe un vecetur non nul u tel que $r(l,u) = n$

(2) $l^{n-1} \neq 0$

II.6. On suppose que l'endomorphisme l est diagonalisable. Soit $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ une base de vecteurs propres avec pour tout $k \in [1,n]$, $l(w_k) = \lambda_k w_k$.

6.1. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u tel que $r(l,u) = n$ et on considère la base de E : $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$. On note $u = \sum_{k=1}^{n} x_i w_i$. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{B}(u)$. En déduire que les valeurs propres de l sont toutes distinctes.

6.2. On suppose que les valeurs propres λ_i de l sont toutes distinctes.

6.2.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et on note $C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne telle que $AC = 0$. Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est nul. En déduire que A est inversible.

6.2.2 Montrer qu'il existe un vecteur u non nul tel que $r(l,u) = n$.

Fin

Bonne Chance

Corrigé Problème I : Pr. Devulder, CPGE France

Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Les $n-1$ premières colonnes de $J(0)$ sont clairement indépendantes. La dernière est nulle et donc combinaison des $n-1$ premières. Le rang de $J(0)$ vaut donc $n-1$.

2.1. Soit j l'endomorphisme canoniquement associé à J et $(u_1,\dots,u_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\forall l\in[1..n-1],\ j(e_l)=e_{l+1}\ \text{ et }\ j(e_n)=0$$

On en déduit alors, en itérant, que pour $k\in[1..n-1]$,

$$\forall l\in[1,n-k],\ j^k(e_l)=e_{l+k}\ \text{ et }\ \forall l\in[n-k+1,n],\ j^k(e_l)=0$$

On en déduit que $J(0)^k=\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0\\ \vdots & & & & & & \vdots\\ 0 & & & & & & \vdots\\ 1 & \ddots & & & & & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$

où la diagonale de 1 commence sur la ligne $k+1$. On peut aussi écrire que

$$\forall i,j\in[1..n],\ (J(0)^k)_{i,j}=\delta_{j+k,j}$$

On remarque que cei est encore valable si $k=0$ (on obtient alors la matrice I_n).

On en déduit aussi que $j^n(e_l)=0$ pour tout l et que donc $J(0)^n=O_n$ et donc (on continue à multiplier par $J(0)$ et on obtient toujours la matrice nulle) :

$$\forall k\geq n,\ J(0)^k=O_n$$

2.2. Soit $k\geq 1$ (l'énoncé oublie de préciser que l'exposant n'est pas nul). $(J(0)^k)^n=J(0)^{nk}=O_n$ car $nk\geq n$. $J(0)^k$ est donc nilpotente.

3. Dans la somme définissant $\alpha(J(0))$, il n'y a qu'un nombre fini de matrices non nulles et on vient de les calculer :

$$\alpha(J(0))=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{1}{1!} & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1\end{pmatrix}=(v_{i,j})\ \text{avec}\ v_{i,j}=\begin{cases} 0 \text{ si } i\leq \\ \dfrac{1}{(i-j)!}\end{cases}$$

$U=\alpha(J(0))-I_n$ est la même matrice où l'on a remplacé les 1 diagonaux par des zéros.

4. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. On peut trouver des entiers p et q tels que $A^p=B^q=O_n$. Soient α,β deux scalaires. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir

$$(\alpha A+\beta B)^{p+q}=\sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}\alpha^k\beta^{p+q-k}A^kB^{p+q-k}$$

Si $k\geq p$, $A^k=A^pA^{k-p}$ est nulle et si $k\leq p$ alors $p+q-k\geq q$ et c'est alors B^{p+q-k} qui est nulle. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et $(A+B)^{p+q}=O_n$. $\alpha A+\beta B$ est nilpotente. On en déduit par récurrence que pour tout p, une combinaison linéaire de p matrices nilpotentes qui commutent deux à deux est encore une matrice nilpotente.

5. On a

$$U=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}J^k$$

qui est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Avec la question précédente, U est nilpotente.
Les $n-1$ premières colonnes de U sont indépendantes (famille "échelonnée" dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) et la dernière est nulle (et donc combinaison des précédentes). U est donc de rang $n-1$.

Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall x \in E,\ u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x))$$
Si $u^i(x) = 0$ alors $u^{i+j}(x) = u^j(0) = 0$ et on a donc l'inclusion
$$\operatorname{Ker}(u^i) \subset \operatorname{Ker}(u^{i+j})$$

2. En particulier, la suite $(\operatorname{Ker}(u^m))_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion et, en passant aux dimension, la suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par la dimension de E, elle converge. Et comme elle est constituée d'entiers, elle est stationnaire à partir d'un certaine rang. Il existe donc un entier m_0 tel que $t_{m_0} = t_{m_0+1}$ et l'ensemble $\{m \in \mathbb{N} /\ t_m = t_{m+1}\}$ est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum (ce qui est mieux qu'une borne inférieure). On peut poser
$$r = \min\{m \in \mathbb{N} /\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Par définition de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$. On a donc $\operatorname{Ker}(u^m) \subset \operatorname{Ker}(u_{m+1})$ et les sous-espaces n'ayant pas même dimension, l'inclusion est stricte.
r étant un minimum, on a $t_r = t_{r+1}$. Comme $\operatorname{Ker}(u^r) \subset \operatorname{Ker}(u_{r+1})$ et comme on a égalité des dimensions, on a donc $\operatorname{Ker}(u^r) = \operatorname{Ker}(u_{r+1})$.

Enfin, on montre par récurrence sur l'entier m que l'affirmation
$$\operatorname{Ker}(u^m) = \operatorname{Ker}(u^{m+1})$$
est vraie pour tout $m \geq r$.

- Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $m = r$.
- Etape de récurrence : soit $m \geq r$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang m. Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^{m+2})$; on a $u^{m+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in \operatorname{Ker}(u^{m+1})$. Par hypothèse de récurrence, $\operatorname{Ker}(u^m) = \operatorname{Ker}(u_{m+1})$ et donc $u^m(u(x)) = 0$ c'est à dire $x \in \operatorname{Ker}(u^{m+1})$. On a prouvé que $\operatorname{Ker}(u^{m+2}) \subset \operatorname{Ker}(u_{m+1})$ et comme l'inclusion réciproque a déjà été prouvée, on a l'égalité et le résultat au rang $m+1$.

Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

1.1. On a
$$\operatorname{Im}(w) = v^q(\operatorname{Im}(v^p)) = \operatorname{Im}(v^{p+q})$$

1.2. $w(x) = 0$ équivaut $x \in \operatorname{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$ c'est à dire à $x \in \operatorname{Im}(v^p)$ et $v^q(x) = 0$. On a donc
$$\operatorname{Ker}(w) = \operatorname{Im}(v^p) \cap \operatorname{Ker}(v^q) \subset \operatorname{Ker}(v^q)$$

1.3. D'après le théorème du rang,
$$\dim(\operatorname{Im}(w)) + \dim(\operatorname{Ker}(w)) = \dim(\operatorname{Im}(v^p))$$
En utilisant les deux questions précédentes, on a donc
$$\dim(\operatorname{Im}(v^p)) \leq \dim(\operatorname{Ker}(v^q)) + \dim(\operatorname{Im}(v^{p+q}))$$
Le théorème du rang donne aussi
$$\dim(\operatorname{Im}(v^p)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(v^p))$$
$$\dim(\operatorname{Im}(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Ker}(v^{p+q}))$$

En injectant ces relations dans l'inégalité, on obtient
$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^{p+q}\right)\right)\leq\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^{p}\right)\right)+\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^{q}\right)\right)$$

1.4. On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

- Initialisation : le résultat est vrai pour $i=1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim\left(\operatorname{Ker}(v)\right)=1$ (l'inégalité est une égalité).
- Etape de récurrence : soit $i\in[1..n-1]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i. La question précédente indique que
$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^{i+1}\right)\right)\leq\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^{i}\right)\right)+\dim\left(\operatorname{Ker}(v)\right)$$
Comme $\operatorname{Ker}(v)$ est de dimension 1 et comme le résultat est vrai au rang i, on a donc
$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^{i+1}\right)\right)\leq i+1$$
ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

1.5. v étant nilpotente, on a $v^n=0$ et $\dim\left(\operatorname{Ker}(v^n)\right)=n$. D'après la partie 3 la suite $\left(\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^i\right)\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ commence par croître strictement puis stationne à la valeur n. D'après la question précédente, elle ne peut donc pas stationner avant le rang n et on a
$$1=\dim\left(\operatorname{Ker}(v)\right)<\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^2\right)\right)<\cdots<\dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^n\right)\right)\leq n$$
Pour que ces inégalité puissent avoir lieu, on doit nécessairement avoir
$$\forall i\in[1..n],\ \dim\left(\operatorname{Ker}\left(v^i\right)\right)=i$$

2. Comme $\operatorname{Ker}\left(v^{n-1}\right)$ est de dimension $n-1$, il n'est pas égal à E et $v\neq\theta$.

3. Il existe donc $e\in E$ tel que $v^{n-1}(e)\neq0$. Montrons que $(e,v(e),\dots,v^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que
$$\alpha_0e+\alpha_1v(e)+\cdots+\alpha_{n-1}v^{n-1}(e)=0$$
On a bien sur $v^k=\theta$ pour tout $k\geq N$.
En composant par v^{n-1}, on a alors $\alpha_0v^{n-1}(e)=0$ et donc $\alpha_0=0$.
Si on compose par v^{n-2}, on obtient de même $\alpha_1=0$. C'est donc un processus récurrent qui nous permet de montrer la nullité de tous les α_i.
La famille est libre et possède $n=\dim(E)$ éléments : c'est une base de E.

4. La matrice de v dans cette base est tout simplement $J(0)$.

5. Si v et w sont deux endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ alors il existe des bases dans lesquelles ces deux endomorphismes sont représentés par $J(0)$. Les matrices de ces endomorphismes sont donc semblables (transitivité de la relation de similitude).
Il est difficile de savoir ce qu'attend l'énoncé à la question "déterminer tous les endomorphismes nilpotents d'ordre $n-1$". On peut, per exemple, dire que ce sont ceux dont la matrice dans la base canonique est semblable à $J(0)$.

Corrigé Problème II : Pr. Devulder, CPGE France

1.1. $(u,l(u),\dots,l^n(u))$ est une famille de $n+1$ vecteurs de E qui est de dimension n et cette famille est donc liée. L'ensemble
$$A=\{k\in\mathbb{N}/\ (u,l(u),\dots,l^k(u))\ \text{ est liée}\}$$
est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum $r(l,u)$.

1.2. u étant non nul, $r(l,u)\geq1$ (la famille (u) est libre et $0\notin A$). On a de plus vu que $n\in A$ et on a donc aussi $r(l,u)\leq n$.

1.3. Si $r(l,u) = 1$ alors $(u,l(u))$ est liée. Comme $u \neq 0$, cela se traduit par l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $l(u) = \lambda u$ et u est vecteur propre de l. Réciproquement, si u est vecteur propre alors $(u,l(u))$ est liée et $1 \in A$. Comme $0 \notin A$ on a alors $r(l,u) = 1$.
Si $r(l,u) = n$ alors $n-1 \notin A$ et la famille $(u,l(u),\dots,l^{n-1}(u))$ est libre. Comme elle possède n élément et que E est de dimension n, c'est une base de E. Réciproquement, si $(u,l(u),\dots,l^{n-1}(u))$ est une base de E alors $n-1 \notin A$ et donc $r(l,u) \geq n$. Comme $r(l,u) \leq n$, on a en fait une égalité.

2. La trace de f est la somme des coefficients diagonaux de la matrice et $\det(f)$ son déterminant que l'on peut calculer avec une machine (par exemple). On obtient

$$\det(f) = 4 \text{ et } \operatorname{tr}(f) = 6$$

On a directement (les coordonnées s'entendent dans la base $\mathcal{B}$)

$$e_1 = (1,0,0,0),\ f(e_1) = (1,1,1,1),\ f^2(e_1) = (2,1,0,-1)$$

Si $ae_1 + bf(e_1) + cf^2(e_1) = 0$ alors $b = 0$ (troisième coordonnée) puis $c = 0$ (seconde coordonnée) puis $a = 0$. La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est donc libre. On obtient aussi

$$f^3(e_1) = (5,-1,-5,-9) = 2e_1 - 5f(e_1) + 4f^2(e_1)$$

et $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est liée. Par définition,

$$r(f,e_1) = 3$$

3.1. On a immédiatement

$$Mat_{\mathcal{B}(u)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La trace est la somme des éléments diagonaux et le déterminant s'obtient en développant par rapport à la première ligne :

$$\operatorname{tr}(f) = a_{n-1} \text{ et } \det(f) = (-1)^{n+1}a_0$$

3.2. L'opération proposée laisse invariant le déterminant et amène à

$$\det(l - \lambda id) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i-1}a_i - \lambda^n \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Un développement par rapport à la première ligne donne ensuite

$$\det(f - \lambda id) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i-1}a_i \right)$$

4.1. Un idéal d'un anneau commutatif A est un sous-groupe de A qui est stable par multiplication par un élément de A. On rapelle aussi que l'application $P \mapsto P(l)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ ce qui indique en particulier que $(PQ)(l) = P(l) \circ Q(l)$.

- $\mathcal{I}(l,u)$ est une partie de $\mathbb{K}[X]$ qui est non vide (elle contient le polynôme nul par exemple, ou encore le polynôme caractéristique de l avec le théorème de Cayley-Hamilton).

- Si $P,Q \in \mathcal{L}(I,u)$ alors $(P+Q)(l)(u) = (P(l)+Q(l))(u) = P(l)(u)+Q(l)(u) = 0$. Ainsi, $P+Q \in \mathcal{L}(I,u)$.

- Si $P \in \mathcal{L}(I,u)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $(PQ)(l)(u) = (QP)(l)(u) = Q(l)\circ P(l)(u) = Q(l)(0) = 0$ et $PQ \in \mathcal{L}(I,u)$.

Les deux premiers points donnent la structure de sous-groupe et avec le troisième on a celle d'idéal.
Le cours nous indique que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont *principaux* c'est à dire du type $P\mathbb{K}[X]$ (ensemble des multiples de P). $\mathcal{I}(l,u)$ est donc l'ensemble des multiples d'un polynôme P (non nul car il y a dans $\mathcal{I}(l,u)$ un polynôme non nul : le polynôme caractéristique de l). En divisant P par son coefficient dominant on se ramène au cas où P est unitaire (et on ne change pas l'ensemble de ses multiples).
Si $G(l,u)$ convient, c'est un multiple unitaire de P et donc c'est forcément P.
On a ainsi prouvé qu'il existe un unique polynôme unitaire $G(l,u)$ tel que

$$\mathcal{I}(l,u) = G(l,u)\mathbb{K}[X]$$

4.2. Comme $\chi_l \in \mathcal{I}(l,u)$ (avec le théorème de Cayley-Hamilton qui donne $\chi_l(l)=0$), χ_l est multiple de $G(l,u)$.
Soit d le degré de $G(l,u)$; on peut donc écrire $G(l,u) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ et $G(l,u) \in \mathcal{I}(l,u)$ s'écrit

$$l^d(u) = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k l^k(u)$$

d'où l'on tire que $d \geq r(l,u)$ (puisque $(u, l(u), \dots, l^d(u))$ est liée).
Par ailleurs, si $l^k(u)$ est combinaison linéaire de $(u,\dots,l^{k-1}(u))$, il existe des b_k tels que $l^k(u) = b_0 u + \cdots + b_{k-1}l^{k-1}(u)$ et donc $X^k - b_{k-1}X^{k-1} - \cdots - b_0 \in \mathcal{I}(l,u)$ et est multiple non nul de $G(l,u)$. On a ainsi $k \geq d$. On peut appliquer ceci avec $k = r(l,u)$ ($(u, l(u), \dots, l^{k-1}(u))$ est alors libre et $(u, l(u), \dots, l^k(u))$ liée donc $l^k(u)$ est combinaison linéaire de $(u,\dots,l^{k-1}(u))$) pour obtenir $r(l,u) \geq d$.
On a montré que

$$r(l,u) = \deg(G(l,u))$$

4.3. Avec l'analyse précédente, on obtient $G(f,e_1)$ grâce à la combinaison linéaire de $e_1, e(e_1), f^2(e_1)$ donnant $f^3(e_1)$:

$$G(l,e_1) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-2)(X-1)^2$$

Le polynôme caractéristique est multiple de $G(l,e_1)$ et admet donc 2 et 1 comme racines avec des multiplicités au moins égales à 1 (pour 2) et 2 (pour 1). Il s'écrit donc (son coefficient dominant vaut 1 car on est en dimension 4) $(X-a)(X-2)(X-1)^2$. Avec le déterminant (ou la trace) on trouve que $a=2$ et donc que

$$\chi_f = (X-1)^2(X-2)^2$$

Les valeurs propres de f sont ainsi 1 et 2.
Si f était diagonalisable, on aurait $(X-1)(X-2)$ qui annule f et donc $G(f,u)$ de degré ≤ 2 ce qui est faux. f n'est donc pas diagonalisable.

4.4. La situation est la même que ci-dessus et on obtient $G(l,u)$ grâce à la combinaison linéaire de $u,\dots,l^{n-1}(u)$ donnant $l^n(u)$:

$$G(l,u) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

χ_l est multiple de $G(l,u)$ et de coefficient dominant $(-1)^n$, c'est donc que

$$\chi_l = (-1)^n G(l,u) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$$

5.1. X^p annulant l, 0 est la seule valeur propre complexe possible pour l. Comme les racines de χ_l sont valeurs propres et que χ_l est scindé sur $\mathbb{C}$ (comme tout polynôme) et de coefficient dominant $(-1)^n$ et de degré n, c'est que

$$\chi_l = (-1)^n X^n$$

5.2. Supposons qu'il existe u non nul tel que $r(l,u) = n$. $G(l,u)$ est de degré n et donc $X^{n-1} \notin \mathcal{I}(l,u)$ ce qui donne $l^{n-1}(u) \neq 0$ et donc a fortiori $l^{n-1} \neq 0$.
Réciproquement, si $l^{n-1} \neq 0$, il existe u tel que $l^{n-1}(u) \neq 0$. On a alors $X^{n-1} \notin \mathcal{I}(l,u)$ et donc X^{n-1} qui n'est pas multiple de $G(l,u)$. Or, $G(l,u)$ est un diviseur unitaire de χ_l et est donc égal à $X^{r(l,u)}$. X^{n-1} n'en étant pas un multiple, $r(l,u) \geq n$. Comme on a l'inégalité inverse de manière générale, on en déduit que $r(l,u) = n$.

6.1. Une récurrence immédiate sur j montre que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ l^j(u) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^j w_k$$

On en déduit que

$$Pass(\mathcal{W}, \mathcal{B}(u)) = \begin{pmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \dots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{pmatrix}$$

Si deux λ_i sont égaux alors la matrice précédentes est non inversible (deux lignes égales) ce qui est exclus (c'est une matrice de passage et donc inversible). Les valeurs propres sont donc deux à deux distinctes.

6.2.

6.2.1 La nullité de AC se traduit par

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k = 0$$

c'est à dire que tous les λ_i sont racines de $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.
P est alors nul (polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant au moins n racines) et $\forall i,\ \alpha_i = 0$. On a donc l'endomorphisme canoniquement associé à A qui est injectif et, comme on est en dimension finie, bijectif. A est ainsi inversible.

6.2.2 Si on pose $u = w_1 + \cdots + w_n$, A est la matrice de $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ dans la base $\mathcal{W}$ et son inversibilité montre que $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est une base de E. En particulier $r(l,u) \geq n$ et comme on a l'inégalité inverse en général, c'est que

$$r(l,u) = n$$

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Hyperplans d'un evn

5 OCTOBRE 2012

Source : e3a 2007, MP

✉ : *mamouni.myismail@gmail.com*

Question :1

Soit n un entier naturel .On a Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$,on a

$$u_n(P)=\sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}=\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k : (*)$$

Ce qui montre que $u_n(P)\in\mathbb{R}_n[X]$ et par suite u_n est bien définie .La linéarité de u_n est évidente .D'autre part on a

$$(u_n o u_n)(P)=u_n\left(X^n P\left(\frac{1}{X}\right)\right)=X^n\left(\frac{1}{X^n}P(X)\right)=P$$

ce qui montre que u_n est une symétrie vectorielle de $\mathbb{R}_n[X]$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

.

Corrigé Pr. Dufait, CPGE France

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

.

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Matrices à diagonale propre (CCP 2008, MP)

19 OCTOBRE 2013

Blague du jour

Êtes-vous accro l'Internet ? La réponse serait oui si :

- A trois heures du matin, vous vous levez pour un besoin pressant et regardez en revenant si vous avez reçu des mails.
- Vous inclinez la tête gauche quand vous souriez
- Sur la porte de la cuisine est écrit : "upload"
- Sur la porte des toilettes est écrit : "download"

Sophus Lie (1842-1899)

Mathématicien norvégien. Il a participé activement à la création de la théorie des symétries continues, et l'a appliquée à la géométrie et aux équations différentielles. On lui doit la création de l'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie. Soupçonné d'être un espion allemand, il profite de son incarcération pour avancer sa thèse sur « une classe de transformation géométrique. Il était marié à la petite fille de Niels Henrik Abel.

Mathématicien du jour

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.
Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$. On dira qu'une matrice $A = (aij)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à diagonale propre si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X)$$

On pourra noter en abrégé : A est une matrice MDP pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

Partie I. EXEMPLES

1. Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$
   a. Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.
   b. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?
3. Cas n = 2 : Déterminer $\mathcal{E}_2$ puis montrer que $\mathcal{E}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Partie II. TEST DANS LE CAS n = 3

4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}
5. Soit $A = (aij)$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes : $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$
6. *Utilisation de la calculatrice*
   a. Écrire un algorithme en français qui, à partir d'une matrice $A = (aij) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, teste si la matrice est ou n'est pas une matrice à diagonale propre. On considère que l'algorithme suppose connu le calcul du déterminant.
   b. Écrire ensuite cet algorithme sur la calculatrice (il n'est pas demandé d'écrire sur la copie le programme en langage calculatrice). Parmi les matrices suivantes, indiquer les matrices à diagonale propre :
   $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
   $A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ $A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
   $A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   c. Conjecturer une condition nécessaire et suffisante sur les produits $a_{12}a_{21}$; $a_{13}a_{31}$ et $a_{23}a_{32}$ pour qu'une matrice $A = (aij) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à diagonale propre inversible soit telle que A^{-1} soit également une matrice à diagonale propre (on demande juste de donner cette conjecture sans chercher à la prouver).

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Partie III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7. Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), démontrer que
$$\det M = (\det A)(\det C)$$
(on pourra utiliser les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ en donnant des précisions sur les tailles des matrices qui interviennent).

8. Donner un exemple d'une matrice M à diagonale propre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :
   a. La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).
   b. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

Partie IV. QUELQUES PROPRIÉTÉS

9. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a,b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $a^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.

10. Si on note G_n l'ensemble des matrices à diagonale propre inversibles, démontrer que G_n est dense dans $\mathcal{E}_n$.

11. *Matrices trigonalisables*
    a. Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?
    b. Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.
    c. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.

12. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Partie V. MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTR

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

13. *Question préliminaire* Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $trace(^tAA)$.

14. *Matrices symétriques à diagonale propre*
    a. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique dont

les valeurs propres sont notées $\lambda_1, .., \lambda_n$. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

b. Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

15. *Matrices antisymétriques à diagonale propre*
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a. Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.

b. Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.

c. Conclure que A est la matrice nulle.

Partie VI. DIMENSION MAXIMALE DANS $\mathcal{E}_n$

16. *Question préliminaire*
Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on ne demande aucune démonstration, la réponse suffit).

17. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$. Démontrer que

$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

18. Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Fin

Á la prochaine

Corrigé : Pr. Baudin, CPGE Pontoise, France

I. EXEMPLES

① ① Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est
$P_{M(\alpha)}(X) = -X^3 + \mathrm{tr}(M(\alpha))X^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{Com}\,(M(\alpha)))X + \det(M(\alpha))$
$= -X^3 + (5-\alpha)X^2 - (8-3\alpha)X + (4-2\alpha)$
$= (1-X)(2-X)((2-\alpha)-X)$.
Les racines de $P_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.

$\boxed{\text{Pour tout } \alpha, \text{ la matrice } M(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$

② Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.

$\mathrm{rg}(M(0) - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la dimension de E_2 est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.

Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.

$\mathrm{rg}(M(1) - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1.}$

② $P_A(X) = -X^3 + \mathrm{tr}(A)X^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{Com}\,(A))X + \det(A) = -X^3 - X$.
P_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas à diagonale propre}}$

③ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad-bc)$.
Soit $Q(X) = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$.
la matrice A est à diagonale propre si et seulement si $P_A = Q$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$.

$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.}}$

L'ensemble des matrices trianglaires supérieures est fermé comme sous-espace vectoriel en dimension finie, de même pour l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
$\mathcal{E}_2$ est donc la réunion de deux fermés.

$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc une partie fermée de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

II. TEST DANS LE CAS $n = 3$

④ Pour une matrice à diagonale propre, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.

$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est inversible si et seulement si ses élé-} \\ \text{sont tous non nuls}}$

Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⑤ Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynône caractéristique est égal à $(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$
En développant ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve que

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ est une matrice à diagonale propre si et seulement si} \\ \det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0 \end{array}}$$

⑥ ① Si $(\det A = a_{11}a_{22}a_{33})$ et $(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0)$ alors la matrice est MDP
sinon la matrice n'est pas MDP.

② $\boxed{\text{Les matrices à diagonale propre sont } A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 \text{ et } A_8}$

③ $\boxed{a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0}$

III. EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

⑦ Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On note r et s les dimensions des matrices A et C.
Alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.
En développant r fois par rapport à la première colonne, on montre que
$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$
En développant s fois par rapport à la dernière ligne, on montre que
$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det A$.

$\boxed{\text{On a donc bien } \det M = \det A \det C.}$

⑧ ① Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre.
En effet, d'après la question précédente,
$P_M(X) = \det \begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r)\det(C - XI_s) = P_A(X)P_C(X)$
Les matrices A et C étant à diagonale propre, les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux.
On prend alors $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = A_5$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{M \text{ est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls}}$

② Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul.
De même qu'en a), $P_M(X) = P_A(X)P_C(X)$.
Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors P_A est scindé et $\text{tr}A = a+d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.

On en déduit $P_A(X) = (X-e)(X-h)$ et $P_C(X) = (X-a)(X-d)$.

En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients, on obtient les relations : $\begin{cases} a+d = e+h \\ ad-bc = eh \\ eh-gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a,b,c,d,e,f,g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. QUELQUES PROPRIETES

⑨ On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$.

Les valeurs propres de $aA+bI_n$ sont $a.a_{11}+b$, $a.a_{22}+b$ ... $a.a_{nn}+b$.

Ce sont les termes diagonaux de $aA+bI_n$,

$\boxed{aA+bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et ${}^t(aA+bI_n) = a^tA+bI_n$,

$\boxed{a^tA+bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$

⑩ Soit $A \in \mathcal{E}_n$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \dfrac{1}{p}I_n$.

D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre.

D'autre part, $\det U_p = P_A(\dfrac{1}{p})$ est nul si et seulement si $\dfrac{1}{p}$ est valeur propre de A. U_p est donc inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

Il existe donc un entier P_0 tel que la suite $(U_p)_{p\geq P_0}$ soit une suite d'éléments de G_n. Cette suite converge vers A.

De la caractérisation séquentielle de la densité, on déduit que $\boxed{G_n \text{ est dense dans } \mathcal{E}_n.}$

❶ ① $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale p}}$

② Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est trigonalisable}}$

③ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $P_A = P_B$ et P_B est scindé, donc P_A est scindé.

Si P_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si } P_A \text{ est scindé.}}$

❷ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc

$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

V. MATRICES SYMETRIQUES ET MATRICES ANTISYMETRIQUES

❸ $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

❹ ① A est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PD{}^tP$.

$\operatorname{tr}({}^tAA) = \operatorname{tr}(PD{}^tPPD{}^tP)$

$= \operatorname{tr}(PDD{}^tP)$ (car ${}^tPP = I_n$.)

$= \operatorname{tr}(D^2)$ (car $PD^2{}^tP$ semblable à D^2 et deux matrices semblables ont la même trace.)

Or $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\operatorname{tr}(D^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$$

② Si de plus A est une matrice à diagonale propre, alors les valeurs propres de A sont $a_{11}, a_{22} \ldots a_{nn}$.

Donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 = 0$, la matrice A est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

$\boxed{\text{Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc}}$

❺ ① A est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles. On a donc $P_A(X) = (-1)^n X^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton $\boxed{A^n = 0.}$

$({}^tAA)^n = (-AA)^n = (-1)^n A^{2n} = 0.$ $\boxed{({}^tAA)^n = 0.}$

② ${}^tAA$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.
$({}^tAA)^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles.
On en déduit $\boxed{{}^tAA = 0.}$

③ De ce qui précède, on déduit que $\mathrm{tr}({}^tAA) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0.$

$\boxed{A \text{ est donc la matrice nulle.}}$

VI. DIMENSION MAXIMALE DANS $\mathcal{E}_n$

❻ $\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}.$

❼ Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.
Donc $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$

On en déduit $\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\boxed{\dim F \leq \dfrac{n(n+1)}{2}.}$

Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$.

$\boxed{\text{La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifi}}$

❽ On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec
$A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ qui n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.
Les matrices A et C sont à diagonale propre et d'après ce que l'on a vu dans la question 8., on en déduit que M est diagonale propre et que donc $F \subset \mathcal{E}_n$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{On a déterminé un sous-espace vectoriel } F \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } F \subset \mathcal{E}_n \\ \text{mais tel que } F \text{ ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulai}\end{array}}$

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Survéillé

Réduction-EVN

12 NOVEMBRE 2012 (4 HEURES)

Blague du jour

Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de notes et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de notes !

Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien du jour

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. En théorie des nombres, il est l'origine du résultat suivant : La probabilité pour que deux nombres entiers, choisis aléatoirement, soient premiers entre eux est égale à 0,6.Sa mort fût survenue alors qu'il tenta de sauver son plus jeune fils, en train de se noyer.

Problème I, e3a 2011, MP : Commutant en dimension 3

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, le polynôme caractéristique d'une matrice A est noté χ_A, le polynôme minimal de la matrice A est noté P_A.

On appelle commutant de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(A)$ qui commutent avec la matrice A.

On suppose dans tout ce problème $P_A = \chi_A$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

① On suppose dans cette question que P_A est à racines simples α, β et γ.

① Montrer que la matrice A est diagonalisable.

② Soit B une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A, montrer que la matrice B est diagonalisable.

③ Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$\begin{cases} T(\alpha) = a \\ T(\beta) = b \\ T(\gamma) = c \end{cases},$$
où a, b et c sont les valeurs propres de la matrice B.

④ En déduire que le polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifie l'égalité
$$B = T(A).$$

⑤ En déduire le commutant de la matrice A.

② On suppose, dans cette question, qu'il existe un nombre complexe λ tel que $P_A = (X - \lambda)^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice A.

① Montrer que l'endomorphisme $g = f - \lambda Id$ est nilpotent d'indice 3, c'est à dire vérifie les relations suivantes : $\begin{cases} g^3 = 0 \\ g^2 \neq 0 \end{cases}$.

② Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{C}^3$ tel que la famille $(u, g(u), g^2(u))$ soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.

③ Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A. On appelle h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice H et on note $h(u) = x_1 u + x_2 g(u) + x_3 g^2(u)$, où x_1, x_2, x_3 sont trois nombres complexes. Déterminer, en fonction de x_1, x_2, x_3, la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.

④ Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant
$$H = Q(A).$$

⑤ En déduire le commutant de la matrice A.

③ On suppose, dans cette question, qu'il existe deux nombres complexes distincts λ_1 et λ_2 tels que
$$P_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2.$$

① Montrer
$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2.$$

② Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, avec $U = \lambda_2 I_2 + N$, I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2, c'est à dire vérifiant les propriétés suivantes : $\begin{cases} N^2 = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$.

③ On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, où $\begin{cases} \mu \in \mathbb{C} \\ L \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}) \\ C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \end{cases}$, on suppose que les matrices M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ commutent.

(a) Montrer $\begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ NV = VN \end{cases}$.

(b) Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $R(U) = V$.

(c) Montrer qu'il existe un polynôme S de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\begin{cases} X - \lambda_1 \text{ divise } S - \mu \\ (X - \lambda_2)^2 \text{ divise } S - R \end{cases}$.

(d) En déduire $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$.

④ Déterminer le commutant de la matrice A.

Problème II, cnc 98, MP : Norme subordonnée de la moyenne

Le problème porte sur l'étude d'applications linéaires agissant comme une moyenne sur des suites ou des fonctions. On notera par la suite :

- S l'espace vectoriel des suites réelles. On note $(u_n)_{n\geqslant 0} = (u_n)$ les éléments de S.
- S_b l'espace vectoriel des éléments bornés de S. On munit S_b de la norme définie par $N_\infty((u_n)) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$
- $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{C}_b$ l'espace vectoriel formé des éléments de $\mathcal{C}$ bornés sur $\mathbb{R}_+$. On munit cet espace vectoriel de la norme $||f||_\infty = \sup\limits_{x\geqslant 0} |f(x)|$.
- L^2 l'espace vectoriel des applications f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ continues telles que $|f|^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour f dans L^2, on pose $||f||_2 = \left(\int_{]0,+\infty[} |f|^2\right)^{1/2}$.

Question préliminaire :

Soit f un élément de $\mathcal{C}$. Montrer que l'application g définie par

$$g(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0 \;\; g(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f$$

est un élément de $\mathcal{C}$.

Pour tout le problème, on définit les applications suivantes

(i) $h : S \to S$, $h((u_n)) = (v_n)$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\; v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

(ii) $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ par

$$H(f)(0) = f(0) \text{ et } \forall x > 0,\; H(f)(x) = \frac{1}{x}\int_{[0,x]} f.$$

Pour $(E, ||\ ||)$ un espace vectoriel normé, on note $L_c(E)$ l'espace des endomorphismes continus de E. On rappelle que l'application $|||\ |||$ définie par

$$\forall \phi \in L_c(E),\; |||\phi||| = \sup\left\{\frac{||\phi(x)||}{||x||},\; x \in E\backslash\{0\}\right\}.$$

est la norme d'opérateur associée sur $L_c(E)$.

S'il existe x dans $E\backslash\{0\}$ tel que $|||\phi||| = \dfrac{||\phi(x)||}{||x||}$, on dit que la norme de ϕ est atteinte en x.

I – Première partie

① L'application h est-elle injective ? Est-elle surjective ?

② ① Pour $f \in \mathcal{C}$, montrer que $H(f)$ est continuement dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

② L'application H est-elle injective ?

③ Est-elle surjective ?

③ Trouver les éléments propres (valeurs et sous-espaces propres associés) de h.

④ Mêmes questions pour l'application H.

II – Seconde partie

Dans cette partie on munit S_b de la norme N_∞ et $\mathcal{C}_b$ de la norme $|| \ ||_\infty$.

① Montrer que S_b et $\mathcal{C}_b$ sont des sous-espaces vectoriels stables par h et H respectivement.

Dans cette partie du problème on notera h_∞ (respectivement H_∞) l'endomorphisme induit par la restriction de h à S_b (respectivement de H à $\mathcal{C}_b$).

② Vérifier que les applications linéaires h_∞ et de H_∞ sont continues, préciser leurs normes et montrer qu'elles sont atteintes.

③ Soit (u_n) une suite croissante de réels positifs convergente vers une limite λ.

① Etablir que la suite $h_\infty((u_n))$ converge vers λ.

② Montrer que $N_\infty(h_\infty((u_n))) = N_\infty((u_n))$.

④ Soit (u_n) un élément non nul de S_b tel que $|u_0| \neq N_\infty((u_n))$, et on suppose que $|||h_\infty|||$ est atteinte en (u_n).

① Montrer que la suite $(|u_n|)$ vérifie $N_\infty((|u_n|)) = N_\infty(h_\infty((|u_n|)))$.

② On suppose que le réel $N_\infty((|u_n|))$ n'est pas valeur d'adhérence de $(|u_n|)$, c'est à dire
$$\exists c \in [0, N_\infty((|u_n|))[, \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geqslant n_0, \ \ |u_n| \leqslant c.$$
Établir que $N_\infty(h_\infty((|u_n|))) < N_\infty((|u_n|))$.

③ En déduire que $N_\infty((|u_n|))$ est une valeur d'adhérence de la suite $(|u_n|)$.

⑤ Soit f un élément de $\mathcal{C}_b$ admettant une limite en $+\infty$. Montrer que $H_\infty(f)$ admet une limite en $+\infty$ dont on précisera la valeur.

IV – Quatrième partie

① Etablir que, pour tout couple (f, g) d'éléments de L^2, le produit fg est sommable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que l'application
$$(f, g) \to \int_{]0,+\infty[} f(t)g(t)dt$$
définit un produit scalaire sur L^2.

En conséquence, $(L^2, || \ ||_2)$ est donc un espace vectoriel normé.

② Soit f un élément de L^2.

① Etablir que pour tout $x > 0$ la fonction f est sommable sur $]0, x]$ et que
$$\frac{1}{x}\left(\int_{]0,x]} f(t)dt\right)^2 \leqslant \int_{]0,x]} f^2(t)dt.$$

② Soit $\phi_f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{]0,x]} f(t)dt.$

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que ϕ_f appartient à L^2 et qu'il existe une constante $K > 0$ telle que
$$\forall f \in L^2, \ \ ||\phi_f||_2 \leqslant K||f||_2.$$

Dans toute la suite du problème, on notera H_2 l'endomorphisme continu de L^2 défini par
$$\forall f \in L^2, \ H_2(f) = \phi_f.$$

③ ① Montrer que pour tout couple (f, g) d'éléments de L^2, l'application $fH_2(g)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

② Établir que
$$\forall f \in L^2, \forall x > 0, \ \left(\int_{[x,+\infty[} \frac{1}{t} f(t)dt\right)^2 \leqslant \frac{1}{x}\int_{[x,+\infty[} f^2(t)dt.$$

③ Soit f un élément de L^2. Montrer que l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ qui à x fait correspondre $\int_{[x,+\infty[} \frac{1}{t} f(t)dt$ est bien définie et appartient à L^2.

④ Soit f dans L^2. Montrer l'existence d'un unique élément f^* de L^2 tel que :

$$\forall g \in L^2, \int_{]0,+\infty[} fH_2(g) = \int_{]0,+\infty[} f^* g.$$

⑤ Montrer que l'application $L_2 : L^2 \to L^2$ qui à f associe f^* est linéaire et continue.

⑥ Etablir l'égalité $|||L_2||| = |||H_2|||$.

V – Cinquième partie

On utilise dans cette partie les endomorphismes H_2 et L_2 de L^2 introduits dans la partie IV.

① Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^p$ de la structure euclidienne canonique ; le produit scalaire est défini par $< (x_1,\dots,x_p)|(y_1,\dots,y_p) >= \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$, et la norme euclidienne est notée n_2.

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$.

① Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ tel que $n_2(Ax) = |||A|||n_2(x)$

② Montrer que tout élément de $\mathbb{R}^p\backslash\{0\}$ vérifiant l'égalité précédente est un vecteur propre de $A^* oA$, où A^* est l'adjoint de A pour la structure euclidienne de $\mathbb{R}^p$.

② Etablir que si $f \in L^2\backslash\{0\}$ vérifie $||H_2(f)||_2 = |||H_2|||\, ||f||_2$ alors f est un vecteur propre de $L_2 o H_2$.

③ Montrer qu'un tel élément ne peut exister et que $\sup\left\{\frac{||H_2(f)||_2}{||f||_2},\ f \in L^2\backslash\{0\}\right\}$ n'est pas atteint.

Indication : On pourra étudier l'appartenance à L^2 des solutions d'une équation différentielle.

④ Montrer de même qu'il ne peut exister un élément $f \neq 0$ dans L^2 tel que $||L_2(f)||_2 = |||L_2|||\, ||f||_2$.

F i n

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Survéillé

Réduction-EVN

LUNDI 12 NOVEMBRE 2012

Problème I : Corrigé Pr. Patte, CPGE France

Le commutant $\mathcal{C}(A)$ d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On suppose dans tout ce problème que : $\chi_A = P_A$ pour une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. »est pour le moins mal venue. Dans tout l'exercice, on fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $\chi_A = P_A$. On peut noter que, dans les trois questions du problème, la donnée est P_A, polynôme de degré 3 ; le théorème de Cayley-Hamilton assure donc l'égalité $\chi_A = P_A$ (à un facteur $(-1)^3$ près, suivant la convention sur le polynôme caractéristique).

① ① La matrice A a un polynôme caractéristique scindé, à racines simples, donc est diagonalisable ; de plus ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

② Si B commute avec A, elle stabilise les trois sous-espaces propres de A, qui sont des droites. Ces trois droites sont donc dirigées par des vecteurs propres de B. Une base de vecteurs propres de A est donc ausi une base de vecteurs propres de A : B et A sont simultanément diagonalisables.

③ Interpolation de Lagrange (α, β, γ distincts). On peut imposer la condition supplémentaire $\deg T \leqslant 2$.

④ D'après la remarque faite en 1.b, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P.\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma).P^{-1}$ et $B = P.\text{diag}(a, b, c).P^{-1}$. Alors $\text{diag}(a, b, c) = T(\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma))$ et $B = T(A)$.

⑤ Le commutant de A est donc inclus dans l'algèbre commutative $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A. L'inclusion inverse est vérifiée pour tout matrice. Donc $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$. Avec la remarque du 1.c, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$ et, comme P_A est de degré 3, (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{C}(A)$.

② ① Par définition, P_A est un polynôme annulateur de A, donc $(A - \lambda I_3)^3 = 0$. En termes d'endomorphismes, $g^3 = 0$. De plus, comme P_A est le polynôme minimal de A, $(A - \lambda I_3)^2 \neq 0$, donc $g^2 \neq 0$: g est nilpotent d'indice

2.

② On vérifie facilement que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{C}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$, la famille $\mathcal{B} = (u, g(u), g^2(u))$ est libre. Comme l'espace vectoriel est de dimension 3, cette famille est une base de $\mathbb{C}^3$. Dans une telle base, g a pour matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

③ Tout d'abord, h commute avec f, donc avec g. On en déduit $h(g(u)) = g(h(u)) = x_1 g(u) + x_2 g^2(u)$ et $h(g^2(u)) = g^2(h(u)) = x_1 g^2(u)$. La matrice de h dans $\mathcal{B}$ vaut donc $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 I_3 + x_2 N + x_3 N^2$.

④ On en déduit $h = x_1 Id + x_2 g + x_3 g^2$, puis, en substituant $f - \lambda Id$ à g, l'existence d'un polynôme T de degré au plus 2 tel que $h = T(f)$. Matriciellement, $H = T(A)$.

⑤ On conclut comme au 1.e.

③ ① Le polynôme P_A est annulateur de A, donc de f. Comme $X - \lambda_1$ et $(X - \lambda_2)^2$ sont premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux, $\mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \operatorname{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2$.

② Comme λ_1 est une valeur propre simple de f (de multiplicité 1 dans χ_A), le sous-espace propre associé $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ est de dimension 1 ; donc $\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2$ est de dimension 2. De plus, c'est le noyau d'un polynôme en f, donc il est stable par f. Dans une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ adaptée à la décomposition du 3.a, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, où U représente $\widetilde{f} = f|_{\operatorname{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2}$.
Comme $(\widetilde{f} - \lambda_2 Id)^2 = 0$, $N = U - \lambda_2 I_2$ vérifie $N^2 = 0$.
Si $N = 0$, alors la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est diagonale, f est diagonalisable et son polynôme minimal est à racines simples. Comme ce n'est pas le cas, $N \neq 0$: N est nilpotente d'indice 2.

③ (α) $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2)C = 0 \\ UV = VU \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} L(U - \lambda_1 I_2) = 0 \\ (U - \lambda_1 I_2)C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$
Comme U admet comme polynôme annulateur $(X - \lambda_2)^2$, sa seule valeur propre est λ_2, donc $U - \lambda_1 I_2$ est inversible. On en déduit $M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$

(β) Il s'agit de reprendre avec U le raisonnement des questions 2.a, b, c et d. On peut imposer la condition supplémentaire $\deg R \leqslant 1$.

(γ) Les conditions imposées signifient que λ_1 est racine de $S - \mu$ et que λ_2 est racine au moins double de $S - R$; autrement dit, que S vérifie $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ (S - R)(\lambda_2) = 0 \\ (S - R)'(\lambda_2) = 0 \end{cases}$, ou encore

$$\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}.$$

Or l'application Δ définie de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}^3$ par $\Delta(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), P(\lambda_2))$ est linéaire, injective (si $\Delta(P) = 0$, alors P est de degré au plus 2 et possède au moins 3 racines comptées avec leur multiplicité, donc vaut 0), entre deux espaces vectoriels de même dimension finie ; donc Δ est un isomorphisme. D'où l'existence de $S \in \mathbb{C}_2[X]$ satisfaisant les conditions $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}$.

(δ) $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & 0 \\ 0 & S(U) \end{pmatrix}$. Or $S(\lambda_1) = \mu$; de plus, comme $(X-\lambda_2)^2$ est annulateur de U, $S(U) = R(U)$. Donc $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & R(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = M$.

④ Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et b l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B. Alors B commute avec $A \iff b$ commute avec f, i.e, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$ commute avec $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$. C'est encore équivalent (la réciproque de 3.c.δ est évidente) à l'existence d'un polynôme $S \in \mathbb{C}_2[X]$ tel que $S\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}\right) = M$, i.e, $S(f) = b$, i.e, $S(A) = B$. Comme dans les questions 1 et 2, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$ et $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 3.

Problème II : Corrigé Pr. Deruelle, Ex-CPA, Maroc

CPA : Centre de Préparation à l'Agrégation

Question préliminaire

g est clairement de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. Il reste à vérifier la continuité de g en $x = 0$. L'application définie par $F(x) = \int_0^x f$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ avec : $\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) = f(x)$. Or $\forall x \in]0,+\infty[, g(x) = \dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}$ et donc $\lim_{x\to 0} g(x) = F'(0) = f(0)$. D'où la continuité de g sur $\mathbb{R}^+$.

Première Partie

① La linéarité de h est immédiate . Supposons $h((u_n)) = (0)$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 0$. On en déduit que $s_0 = u_0 = 0$ et que $\forall n \geq 1, u_n = s_n - s_{n-1} = 0$. D'où l'injectivité de h . Soit $v_n \in S$. La recherche de $(u_n) \in S$ telle que $v_n = h((u_n))$ conduit à

$u_0 = v_0$

et $\forall n \geq 1, u_n = s_n - s_{n-1} = (n+1).v_n - n.v_{n-1}$ où $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

. On en déduit la surjectivité de h .

② ① immédiat : cf. question préliminaire .

② La linéarité de l'opérateur H est immédiate . Pour $F \in \mathcal{C}, H(f) = 0$ donne $H(f)(0) = f(0) = 0$ et $\forall x > 0, F(x) = \int_{[0,x]} f = 0$. D'où $\forall x > 0, F'(x) = f(x) = 0$. H est donc bien injective .

③ Pour tout $f \in \mathcal{C}, H(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, ce qui n'est pas le cas de toute fonction de $\mathcal{C}$. H n'est donc pas surjective .

③ Soit λ une valeur propre de h et (u_n) associée . Soit p le plus petit entier tel que $u_p \neq 0$. On a alors $\lambda.u_p = \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{p+1} \cdot u_p$ et nécessairement $\lambda = \frac{1}{p+1}$. Il vient alors pour tout $n \geq p+1$, $u_n = s_n - s_{n-1} = (n+1).v_n - n.v_{n-1} = \frac{n+1}{p+1} \cdot u_n - \frac{n}{p+1} \cdot u_{n-1}$ d'où $u_n = \frac{n}{n-p} \cdot u_{n-1}$. Ceci donne $\forall n \geq p+1, u_n = C_n^p.u_p$. En conclusion les valeurs propres de h sont les valeurs $\frac{1}{p+1}$, $p \in \mathbb{N}$: le sous-espace propre associé à $\frac{1}{p+1}$ est de dimension un et est engendré par la suite définie par $u_n = 0$ pour $n < p$ (s'il y a lieu) , $u_p = 1$ et $\forall n \geq p, u_n = C_n^p$

④ Soit λ une valeur propre de H et $f \in \mathcal{C}$ associée . λ est non nul car H est injective d'après $I-2-b$ et d'autre part f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+s$ d'après $I-2-a$. On a alors $\forall x > 0, F(x) = \int_{[0,x]} f = \lambda x.f(x)$ d'où $\forall x > 0, (1-\lambda).f(x) = \lambda x.f'(x)$. L'équation différentielle linéaire $(1-\lambda).y = \lambda x.y'$ admet pour solutions sur $\mathbb{R}^+s$ les fonctions $y(x) = C.x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$. Ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $0 < \lambda \leq 1$. L'ensemble des valeurs propres obtenu est $]0,1]$ et pour $\lambda \in]0,1]$, le sous-espace propre associé est de dimension 1 et engendré par la fonction $f(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ On peut aussi énoncer ce résultat sous la forme : les fonctions propres sont les fonctions $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \geq 0$ et $H(f_\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \cdot f_\alpha$.

Deuxième Partie

① On a pour (u_n) dans S_b , $|v_n| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} N_\infty((u_n)) = N_\infty((u_n))$. Et : $\forall f \in \mathcal{C}, \forall x > 0$, $|H(f)(x)| \leq \frac{1}{x} \cdot x.\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$, majoration qui reste valable pour $x = 0\ldots$

② Les majorations ci-dessus montrent que h_∞ et H_∞ sont continues et vérifient $|||h_\infty||| \leq 1$ et $|||H_\infty||| \leq 1$ L'image de la suite constante et égale à 1 par h_∞ est elle-même et par conséquent $|||h_\infty||| = 1$ et est atteinte pour cette suite . On obtient un résultat analogue pour H_∞ avec la fonction constante égale à 1 .

③ ① Donnons une démonstration directe , sans reproduire la démonstration classique du théorème de Césaro . Observons que $v_n = h_\infty((u_n))$ est également croissante (ce qui est clair dans la mesure où, lorsque l'on passe de v_n à v_{n+1} , on ajoute dans la moyenne un terme plus grand que les précédents ...) : $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+2} \cdot [\sum_{k=0}^{n} u_k + u_{n+1}] - \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n+2} \cdot [u_{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} u_k] = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n}(u_{n+1} - u_k)}{n+1} \geq 0$. Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$ (immédiat) et donc v_n est majoré par λ . Par conséquent v_n converge vers un réel l vérifiant $l \leq \lambda$. On a également : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{2n} \geq \frac{1}{2n+1} \cdot [\sum_{k=0}^{n} u_k + n.u_n] = \frac{n+1}{2n+1} \cdot v_n + \frac{n}{2n+1} \cdot u_n$. Un passage à la limite donne $l \geq \frac{l}{2} + \frac{\lambda}{2}$, d'où $l \geq \lambda$. Finalement $l = \lambda$.

② L'égalité est immédiate puisque $l = N_\infty(v_n) = N_\infty(h_\infty((u_n)))$ et $N_\infty((u_n)) = \lambda$, les deux suites étant croissantes . Ceci montre que la norme de h_∞ est atteinte en de telles suites (u_n) .

④ ① Notons $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} |u_k|$. On a de façon immédiate $\forall n \in \mathbb{N}, V_n \leq N_\infty((u_n)) = N_\infty((|u_n|))$. D'où $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq V_n \leq N_\infty((|u_n|))$, puis $N_\infty((u_n)) = N_\infty((|u_n|)) = N_\infty(v_n) \leq N_\infty(v_n) \leq N_\infty((|u_n|))$. Finalement on obtient $N_\infty((|u_n|)) = N_\infty(v_n) = N_\infty(h_\infty((|u_n|)))$.

② Pour simplifier les notations , en utilisant le résultat de la question précédente , on peut se ramener au cas où (u_n) est une suite positive . On notera aussi $N_\infty((u_n)) = \lambda$. Pour tout $n \geq n_0, v_n = \frac{1}{n+1} \cdot [\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k] \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \frac{n-n_0+1}{n+1} \cdot c$ D'où $v_n \leq c + \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$. Le second terme du membre de droite de cette inégalité est le terme général d'une suite qui converge vers zéro : $\exists N_0 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N_0, v_n \leq c + \frac{\lambda - c}{2} = \frac{c+\lambda}{2} < \lambda$ Par ailleurs l'hypothèse $0 \leq u_0 < \lambda$ implique que $\forall n < N_0$, $v_n < \lambda$. En conséquence , si l'on note $V = \max_{n \in [0, N_0 - 1]} v_n$, il vient : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq \text{Max}\{V, \frac{c+\lambda}{2}\} = d < \lambda$.

③ L'hypothèse faite à la question précédente contredit le fait que h_∞ atteint sa norme en la suite $(|u_n|)$.

⑤ Supposons $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$. Soit $\varepsilon > 0$, puis $A \geq 0$ tel que $\forall x > A, |f(x) - l| \leq \varepsilon$. On a $\forall x > A, |H(f)(x) - l| =$

$|\frac{1}{x}\cdot\int_{[0,x]}(f(x)-l).dx| \leq \frac{1}{x}\cdot\int_0^A |f(x)-l|.dx+\frac{1}{x}\cdot\int_A^x |f(x)-l|.dx$
$\leq (\|f\|_\infty+|l|).\frac{A}{x}+\frac{1}{x}\cdot(x-A).\varepsilon \leq (\|f\|_\infty+|l|).\frac{A}{x}+\varepsilon$. On en déduit aisément que $\lim_{x\to+\infty} H(f)(x)=l$ en utilisant le fait que $\lim_{x\to+\infty}\frac{A}{x}=0$.

Quatrième partie

① De l'inégalité $|f.g| \leq \frac{1}{2}\cdot(f^2+g^2)$ on déduit la sommabilité de $f.g$ sur $\mathbb{R}^+s$. On notera que si f et g sont de carré sommable , $f+g$ l'est aussi puisque $(f+g)^2=f^2+g^2+2.fg$ et que fg est sommable ce qui permet d'obtenir la structure d'espace vectoriel de L^2 ... Les diverses vérifications concernant le produit scalaire sont sans difficultés .

② ① La majoration $|f| \leq \frac{1}{2}\cdot(1+f^2)$ et la sommabilité de f^2 sur $\mathbb{R}^+s$ donc sur $]0,x]$ montre que f est bien sommable sur $]0,x]$. On a par Cauchy-Schwarz $\left(\int_{]0,x]}f\right)^2 \leq \left(\int_{]0,x]}1\right).\left(\int_{]0,x]}f^2\right)=x.\int_{]0,x]}f^2$ d'où le résultat demandé

② Avec pour $x>0$, $F(x)=\int_{]0,x]}f$, on a $F'(x)=f(x)$. Il vient : $\int_\alpha^x\phi_f^2=\left[-\frac{1}{t}\cdot F^2(t)\right]_\alpha^x+2\int_\alpha^x\frac{f(t)}{t}\cdot F(t).dt$. Par ailleurs Cauchy-Schwarz donne $\int_\alpha^x\frac{f(t)}{t}\cdot F(t).dt \leq \left(\int_\alpha^x f^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\alpha^x\phi_f^2\right)^{\frac{1}{2}}$ D'où : $\int_\alpha^x\phi_f^2 \leq \frac{1}{\alpha}\cdot F^2(\alpha)+2\left(\int_\alpha^x f^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\alpha^x\phi_f^2\right)^{\frac{1}{2}}$ On a donc : $\left(\int_\alpha^x\phi_f^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left[\left(\int_\alpha^x\phi_f^2\right)^{\frac{1}{2}}-2\|f\|_2\right] \leq \frac{1}{\alpha}\cdot F^2(\alpha)$. Or la question $2-a$ a pour conséquence $\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{\alpha}\cdot F^2(\alpha)=0$: l'hypothèse $\{\int_\alpha^x\phi_f^2\ ;\ 0<\alpha\leq x\}$ non borné contredirait ce résultat . En conséquence ϕ_f est de carré sommable sur $\mathbb{R}^+s$ et un passage à la limite quand $\alpha\to0$ et $x\to+\infty$ donne : $\|\phi_f\|_2 \leq 2\|f\|_2$

③ ① Le résultat est une conséquence immédiate de $IV-1$.

② Pour tout $x>0$, $t\mapsto\frac{1}{t}$ et f sont de carré sommable sur $[x,+\infty[$. Il en résulte , comme précédemment, que leur produit est sommable sur $[x,+\infty[$: l'application $G(x)=\int_x^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\cdot dt$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}^+s$. Par ailleurs Cauchy-Schwarz donne : $\forall x>0, G^2(x) \leq \left(\int_x^{+\infty}\frac{dt}{t^2}\right).\left(\int_x^{+\infty}f^2\right)=\frac{1}{x}\cdot\int_x^{+\infty}f^2$.

③ On a déjà montré que G est bien définie sur $\mathbb{R}^+s$. Une intégration par parties donne : $\int_\alpha^x G^2=\left[t.G^2(t)\right]_\alpha^x+2\int_\alpha^x f(t).G(t).dt$ On en déduit $\int_\alpha^x G^2 \leq x.G^2(x)+2\int_\alpha^x f(t).G(t).dt \leq x.G^2(x)+2\left(\int_\alpha^x f^2\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\int_\alpha^x G^2\right)^{\frac{1}{2}}$ D'où $\int_\alpha^x G^2 \leq x.G^2(x)+2\|f\|_2.\left(\int_\alpha^x G^2\right)^{\frac{1}{2}}$. On conclut alors par un raisonnement identique à celui fait dans la question $IV-2-b$: $G \in L^2$ et $\|G\|_2 \leq 2.\|f\|_2$.

④ Notons désormais , pour $f \in L^2$ et $x > 0$, $f^*(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \cdot dt$ Une intégration par parties donne : $\int_\alpha^x f.H_2(g) = [-f^*(t).\int_{]0,t]} g]_\alpha^x + \int_\alpha^x g.f^*$ Les applications $f, g, H_2(g)$ et f^* sont dans L^2 , donc $f.H_2(g)$ et $g.f^*$ sont bien sommables sur $\mathbb{R}^+s$ Il s'agit donc de montrer que $t \rightarrow f^*(t).\int_{]0,t]} g$ tend vers zéro quand $t \rightarrow 0$ ou $t \rightarrow +\infty$. Or de précédentes majorations ont montré que , pour f et g dans L^2 , $\left(\int_{[0,x]} g\right)^2 \leq x.\int_{[0,x]} g^2$ et $(f^*(x))^2 = \left(\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} \cdot dt\right)^2 \leq \frac{1}{x} \cdot \int_x^{+\infty} f^2$. Ceci permet d'obtenir la majoration $\forall x > 0$, $\left|f^*(x).\int_{]0,x]} g\right|^2 \leq \left(\int_{]0,x]} g^2\right).\left(\int_x^{+\infty} f^2\right)$ qui donne le résultat escompté . <u>Reste l'unicité</u> : soient f_1^* et f_2^* deux éléments de L^2 répondant à la question . On a alors $\forall g \in L^2, (f_1^* / g) = (f_2^* / g)$, d'où $\forall g \in L^2, (f_1^* - f_2^* / g) = 0$ et on conclut en prenant $g = f_1^* - f_2^*$.

⑤ La linéarité de L_2 est immédiate . La question $IV-3-c$ a déjà montré que $\forall f \in L^2, \|f^*\|_2 \leq 2\|f\|_2$, ce qui donne la continuité de L_2 et $|||L_2||| \leq 2$.

⑥ On a d'après ce qui précède : $\forall (f,g) \in L^2, (f / H_2(g)) = (L_2(f) / g)$. On en déduit : $\forall g \in L^2, \|H_2(g)\|_2^2 = (L_2(H_2(g)) / g) \leq |||L_2|||.|||H_2|||.\|g\|_2^2$ qui donne $|||H_2||| \leq |||L_2|||$. De même en partant de : $\forall f \in L^2, \|L_2(f)\|_2^2 = (f / H_2(L_2(f)))$, on obtient $|||L_2||| \leq |||H_2|||$.

Cinquième Partie

① ① L'application $x \mapsto n_2(Ax)$ est continue sur la sphère-unité de $\mathbb{R}^p$ qui est un compact de $\mathbb{R}^p$: $\exists x_0 \in \mathbb{R}^p \backslash \{0\}$ / $n_2(Ax_0) = \sup_{n_2(x)=1} n_2(Ax) = |||A|||$.

② $A^* \circ A$ est un endomorphisme symétrique positif , donc diagonalisable , de $\mathbb{R}^p$. Soient $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_p$ les valeurs propres de $A^* \circ A$ rangées par ordre croissant et $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthonormale de vecteurs propres adaptée . On a pour $x = \sum_{i=1}^p x_i.e_i$ appartenant à la sphère unité , $\lambda_1 \leq n_2(Ax)^2 = (A^* \circ A(x) / x) = (\sum_{i=1}^p x_i \lambda_i.e_i / \sum_{i=1}^p x_i.e_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_p$. On en déduit que $|||A||| \leq \sqrt{\lambda_p} = (\max_{\lambda \in \text{sp}(A^* \circ A)} \lambda)^{\frac{1}{2}}$. On en fait égalité car on atteint cette valeur en tout vecteur propre unitaire associé à λ_p . Réciproquement si $\sqrt{\lambda_p} = |||A||| = n_2(Ax)$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ appartenant à la sphère-unité (sans perte de généralité) , on a : $n_2(Ax)^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 = \lambda_p$ qui donne $\sum_{i=1}^p x_i^2(\lambda_p - \lambda_i) = 0$ et donc pour tout i tel que $x_i \neq 0$, $\lambda_i = \lambda_p$; x est bien un vecteur propre (associé à λ_p).

② Supposons , sans perte de généralité , que $\|f\|_2 = 1$. On a : $|||H_2|||^2 = \|H_2(f)\|_2^2 = (\, L_2 \circ H_2(f)\ /\ f\,) \leq \|L_2 \circ H_2(f)\|_2 \leq |||L_2|||.|||H_2||| = |||H_2|||^2$ d'après $V-6$. Cela entraîne en particulier l'égalité $(\, L_2 \circ H_2(f)\ /\ f\,) = \|L_2 \circ H_2(f)\|_2$: nous sommes en présence d'un cas d'égalité dans une inégalité de Schwarz et ceci implique l'existence d'un réel λ tel que $L_2 \circ H_2(f) = \lambda.f$.

③ La recherche d'éléments $f \in L^2$ et de $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $L_2 \circ H_2(f) = \lambda.f$ nous amène (dériver deux fois) à chercher les solutions non nulles dans L^2 d'équations différentielles de la forme :

$$\lambda x^2.f''(x) + 2\lambda x.f'(x) + f(x) \ ,\ x \in \mathbb{R}^+s$$

Le changement de variable $x = e^t$ transforme cette équation différentielle en :

$$\lambda.y''(t) + \lambda.y'(t) + y(t) = 0 \ ,\ t \in \mathbb{R}$$

On observera que $\|H_2(f)\|_2^2 = (\, L_2 \circ H_2(f)\ /\ f\,) = (\,\lambda.f\ /\ f\,) = \lambda.\|f\|_2^2$ et donc $\lambda \geq 0$. Par ailleurs $|\lambda| \leq |||L_2 \circ H_2||| = |||H_2|||^2 \leq 4$. D'où nécessairement $\lambda \in]0,4]$ puisque $\lambda = 0$ conduit à $f = 0$. Les solutions de l'équation différentielle initiale s'écrivent alors $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot [a.\cos(\beta.\ln x) + b.\sin(\beta.\ln x)]$ où a , $b \in \mathbb{R}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{\lambda(4-\lambda)}}{2\lambda}$. Il ne reste plus qu'à constater que de telles fonctions , sauf dans le cas trivial $f = 0$, ne sont pas de carré sommable sur $\mathbb{R}^+s$.

④ La démarche est rigoureusement la même que dans la question précédente .

Fin

Á la prochaine

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Règle de Raabe Duhamel (e3a 2009, PSI)

9 NOVEMBRE 2012

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
- Les deux vous explosent le système de temps en temps.
- Bill, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Il est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable. Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës

Mathématicien du jour

Introduction :

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières.
Soit (α_n) une suite réelle.
On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

① Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

② Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} -$

$\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{\mu}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

③ On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.

① Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.

② Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq K v_n$.

③ Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

④ On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

⑤ Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

Partie B.

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

① Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)}$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

② Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

① Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

② Établir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

③ En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

③ Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1\,;\ \forall n \geq 1,\ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\ ;\ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x$$

① Indiquer (sans démonstration) le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et pour $x \in]-R, R[$, la valeur de $S(x)$.

② Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

③ Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

④ Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

⑤ On suppose que $-1 < \alpha < 0$.

i) Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

ii) Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

iii) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Libre

Règle de Raabe-Duhamel

9 NOVEMBRE 2012

Corrigé Pr. Devulder, CPGE France

Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

① Si $\lambda < 0$ alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1^+$ et la règle de D'Alembert s'applique à la série positive $\sum(u_n)$ pour donner sa divergence (à partir d'un certain rang, $u_{n+1}/u_n \geq 1$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n_0} > 0$ et on a même divergence grossière de la série).

② On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

③ ① Comme $\beta - \lambda < 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers 0^- et est asymptotiquement négatif. Ainsi

$$\exists N / \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

② Ce qui précède s'écrite $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq N,\ u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

③ Comme $\sum v$ converge (car $\beta > 1$), il en est de même de $\sum(K v_n)$. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la convergence de $\sum(u_n)$.

④ Si $\lambda \in [0,1[$, on peut choisir $\beta \in]\lambda,1[$. On a alors

$$\exists N / \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

Comme $K \neq 0$ et $\sum v$ diverge (car $\beta < 1$), $\sum(K v_n)$ diverge. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la divergence de $\sum(u_n)$.

⑤ $\sum(x_n)$ est une série de Riemann divergente et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Une comparaison série intégrale donne (grâce à la décroissance de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)^2}$ sur $]1,+\infty[$)

$$\forall n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{n} y_k \leq \int_2^n \frac{dt}{t\ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$\sum(y_n)$ est ainsi convergente (les sommes partielles forment une suite croissante et, on vient de le voir, majorée ; la suite des sommes partielles converge donc). De plus $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + o(1/n)$ donne

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes > 0).

Partie B.

① On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme (w_n) est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \dfrac{1}{6} < 1$ et $\sum(w_n)$ diverge.

② ① $t \mapsto \dfrac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^{4n}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux fonctions de Riemann ($4n \geq 4 > 1$). La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale I_n sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

② Une intégration par parties donne

$$\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^b + 4n\int_0^b \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt$$
$$= \frac{b}{(1+b^4)^n} + 4n\left(\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}}\right)$$

Les différents termes admettent une limite quand $b \to +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$$

③ On a ainsi $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{4n}$. Comme $\sum(I_n)$ est une séries à termes > 0, on est dans le cas de la partie A avec $\lambda = 1/4 < 1$ et $\sum(I_n)$ diverge.

③ ① On reconnaît les coefficients du développement de $S(x) = (1+x)^\alpha$. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (on pourrait, par exemple, utiliser la règle de D'Alembert pour le voir).

② α n'étant pas un entier naturel, les a_k sont tous non nuls. On a

$$\forall n \geq \alpha,\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o$$

On est dans le cadre de la partie A (suite à termes > 0) avec $\lambda = \alpha + 1$. Ici, α n'est pas entier naturel et donc $\alpha + 1 \neq 1$. Comme il y a convergence de $\sum(a_n)$ pour $\alpha + 1 < 1$ et divergence si $\alpha + 1 > 1$, il y a donc convergence si et seulement si $\alpha > 0$.

③ On a

$$\forall x \in [-1,1],\ |a_n x^n| \leq |a_n|$$

On est dans le cas ($\alpha > 0$) où le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(a_n x^n)$ converge normalement sur $[-1,1]$. Comme c'est une série de fonctions continues, la somme S est continue sur $[-1,1]$. On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x\to (-1)^+} S(x) = \lim_{x\to (-1)^+} (1+x)^\alpha = 0$$

④ On suppose $\alpha < -1$. On est dans le cadre de $A.1$ pour $\sum(|a_n|)$. On y a vu qu'il y a avit divergence grossière. $(|a_n|)$ n'étant pas de limite nulle, il en est de même de (a_n) et $\sum(a_n)$ diverge grossièrement elle aussi.

⑤ On a

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|\alpha-k|}{k+1}\right)$$

Or, on remarque que (pour $k \geq 1$)

$$\ln\left(\frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \ln\ln\left(1-\frac{\alpha+1}{k+1}\right) \sim -\frac{\alpha+1}{k+1}$$

C'est le terme général d'une série divergente négative dont les sommes partielles tendent donc vers $-\infty$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$$

Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Mais d'après 3.b, $(|a_n|)$ décroît à partir d'un certian rang (le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ tendant vers 1^-) et la suite (a_n) est alternée (on passe de a_n à a_{n+1} en multipliant par un nombre négatif). La règle spéciale s'applique et indique que $\sum(a_n)$ converge.
Si $x \in [0,1]$, on peut de même appliquer la règle spéciale pour prouver la convergence de $\sum(a_n x^n)$ et obtenir

$$\forall x \in [0,1],\ \left|\sum_{k\geq n} a_k x^k\right| \leq |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Le majorant est indépendant de x et de limite nulle quand $n \to +\infty$. $\sum(a_n x^n)$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ et S est donc continue sur $[0,1]$. Comme en question c, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

Fin

Á la prochaine

Problèmes Corrigés MP

Corrigé Devoir Libre

Ordre sur les matrices symétriques

Pr. Debarbieux

Blague du jour

Les types d'ingénieurs en informatique sont :
- L'ingénieur DISQUE DUR : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
- L'ingénieur CD-ROM : il va toujours plus vite avec le temps.
- L'ingénieur RAM : il oublie tout de vous, dès le moment où vous lui tournez le dos.

Hermann Minkowski (1864 - 1909)

Mathématicien et un physicien théoricien allemand. On lui doit surtout l'espace à 4 dimension (espace-temps) appelé de Minkowski, considéré comme la base de tous les travaux sur la théorie de la relativité. Son travail le plus original est sans aucun doute sa géométrie des nombres. Ces travaux posent de nombreuses questions sur le gain de place, ou comment faire rentrer une forme donnée à l'intérieur d'une autre forme donnée.

Mathématicien du jour

PARTIE 1

1a) Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = (y_i)_{i=1}^n$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$$^tXY = ^tYX = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1b) Développement sans problème :

$$\begin{aligned} (^tXY)^2 &= (^tXY)(^tXY) = (^tXY)(^tYX) \text{ calcul précédent} \\ &= (^tX)\,(Y^tY)\,(X) \text{ par associtivité} \\ &= (^tYX)(^tXY) = ^tY(X^tX)Y \ \text{ symétriquement} \end{aligned}$$

1c) Si on considère que " $^tXY = \langle x, y\rangle$ dans une base orthonormée" n'est pas un formule classique on refait le calcul et

$$^tX(SY) = \sum_{(i,j)} x_i s_{i,j} y_j = \langle X, SY\rangle$$

puis comme S est symétrique $^tX(SY) = ^tX^tSY = ^t(SX)Y = \langle SX, Y\rangle$

2a) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $^tXS_1X \geq 0$ et $^tXS_2X \geq 0$ et donc en ajoutant $^tX(S_1+S_2)X \geq 0$

$$(S_1, S_2) \in \left(\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})\right)^2 \Rightarrow S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

2b) idem car la somme d'un réel positif et d'un réel strictement positif est un réel strictement positif.

2c) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $^tX(^tAA)X = ^t(AX)(AX) =$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

$\langle AX, AX\rangle = \|AX\|^2 \geq 0$. Et donc

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ , {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

3a) Si $SX = \lambda X$ on a ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$. Donc si ${}^tXSX = 0$ on a $\lambda = 0$ (car X est non nul donc $\|X\| \neq 0$)
S est donc une matrice diagonalisable (car symétrique réelle) ayant une unique valeur propre 0 . S est donc la matrice nulle : $S = P.0.P^{-1} = (0)$

3b) On veut que MX soit orthogonal à X pour tout X . c'est une propriété classique du produit vectoriel . Il suffit de prendre pour M la matrice de $x- > i \wedge x$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors bien ${}^tXMX = 0$

4a) S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = diag(\lambda_k)$ telle que $\forall k$, $SV_k = \lambda_k V_k$
Si toutes les valeurs propres sont positives on a alors pour toute matrice colonne $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$${}^tXSX = \langle X, SX\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X un vecteur propre asocié.le calcul du **3a** donne ${}^tXSX = \lambda \|X\|^2$. comme on suppose ${}^tXSX \geq 0$ et que $X \neq \overrightarrow{0}$ on a bien $\lambda \geq 0$

4b) deux matrices semblables ont même spectre . Donc si S' est symétrique réelle semblable à S symétrique positive les valeurs propres de S (donc de S') sont toutes positives donc S' est positive.

5a) Sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation $\geq$ est bien :

- binaire
- réflexive : $(0)_n$ est bien positive donc $S_1 \geq S_1$
- antisymétrique : si $S_1 \geq S_2$ et si $S_2 \geq S_1$ les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont toutes à la fois positives et négatives. $S_2 - S_1$ est donc diagonalisable (car symétrique réel) ayant une seul valeur propre 0 donc c'est la matrice nulle. . $S_2 = S_1$
- transitive : Si $S_1 \geq S_2$ et $S_2 \geq S_3$ on a $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_2 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après **2a** la somme $S_1 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $S_1 \geq S_3$.

5b) il suffit de prendre $S_1 = 0$ et pour S_2 une matrice symétrique ayant une valeur propre positive et une négative . Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5c) la relation $>$ n'est pas réflexive car $(0)_n \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

5d) On peut se douter (ou montrer) qu'une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a des valeurs propres strictement positives.
On prend donc $S_2 = 0$ et S_1 symétrique ayant des valeurs propres positives et ayant la valeur propre 0 . Par exemple $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On a $S_1 \neq (0)$ ${}^tXS_1X = z^2 \geq 0$ et si $X = \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ${}^tXS_1X = 0$

6a) question de cours .On doit montrer $x \in E_\lambda(u) \Rightarrow v(x) \in E_\lambda(u)$

. Donc $u(x) = \lambda x \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$. Or

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) \\ &= (v \circ u)(x) \text{ par hypothèse sur } u \text{ et } v \\ &= v(u(x)) = v(\lambda(x)) \\ &= \lambda v(x) \text{ par linéarité de } v \end{aligned}$$

6b) L'endomorphisme induit par v diagonalisable sur un sous espace stable est lui même diagonalisable. Donc l'endomorphisme v_i est diagonalisable et il existe une base de $E_{\lambda_i}(u)$ qui est une base de vecteurs propres de v_i. u étant diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres .L'union des bases précédente est donc une base de E . Par construction ces vecteurs sont des vecteurs propres de v et de u (car éléments des sous espaces propres) . Dans cette base u et v sont donc simultanément diagonalisables.

7a) Si A et B commutent A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage . On prend la question précédente avec $A = Mat_{\mathcal{C}}(u)$ et $B = Mat_{\mathcal{C}}(v)$. P est alors la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

Réciproquement si A et B son diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage . On a $A = PDP^{-1}$, $B = P\Delta P^{-1}$ et comme deux matrices diagonales commutent $AB = BA = P(D\Delta)P^{-1}$

7b)

A est de rang 1 et $E_0(A)$ est le plan $(x+y-z=0)$. Par la trace on en déduit que la troisième valeur propre est 3 puis on trouve $E_3(A) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Pour B le calcul du polynôme caractéristique en commençant par exemple par faire $C_2 + C_3- > C_3$ donne deux valeurs propres 4(double) et 1(simple) . Puis le calcul des sous espaces propres donne : $E_4(B)$ est le plan $-2x+y-z=0$ et $E_1(B) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

. On vérifie alors que $E_1(B) \subset E_0(A)$, $E_3(A) \subset E_4(B)$. Les trois droites $E_1(B), E_3(A), E_0(A) \cap E_4(B)$ sont trois droites de vecteurs propres communs qui engendrent l'espace . Une matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

remarque : je ne pense pas que le passage par l'endomorphisme induit par v sur $E_0(A)$ soit plus simple

8) S_1 et S_2 sont diagonalisables (symétriques réels) , et commutent . S_1 et S_2 sont donc diagonalisables avec une même matrice de passage ($S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$). Cette matrice de passage diagonalise aussi $S_1S_2 = S_2S_1 = PD\Delta P^{-1}$, la matrice diagonale semblable à S_1S_2 étant le produit des deux matrices semblables à S_1 et S_2. S_1 et S_2 étant positives ont toutes leurs valeurs propres positives. Les valeurs propres de S_1S_2 sont donc aussi toutes positives et S_1S_2 est symétrique positive.(toujours **4a**)

9a) Avec les notations précédentes ($S_1 = PDP^{-1}, S_2 = P\Delta P^{-1}$). On donc $\Delta - D$ positives . Donc pour les termes diagonaux $\delta_i - d_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$. La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall i$, $\delta_i^2 \geq d_i^2$. $\Delta^2 - D^2$ est donc positive et $S_2^2 - S_1^2$ est une matrice symétrique semblable à une matrice symétrique positive donc est aussi positive. $S_2^2 \geq S_1^2$ (cf **4b)**

9b) On a $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 0 et $5/2$ réels

positifs. La mtrice est positive est $S_2 \geq S_1$
S_1 de valeurs propres 0 et 1 donc $S_1 \geq 0$
et $S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ de déterminant $-9/4$. Le produit des valeurs est négatif. L'une des valeurs propres es négatives.$S_2^2 - S_1^2$ n'est pas positive.

Partie II

1)

a $\Leftrightarrow$ **b** : idem **I4a**

S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = diag(\lambda_k)$ telle que $\forall k$, $SV_k = \lambda_k V_k$
Si toutes les valeurs propres sont strictement positives on a alors pour toute matrice colonne non nulle $X = \sum_{k=1}^{n} y_k V_k$

$$^tXSX = \langle X, SX\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} y_k V_k, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 > 0$$

En effet on a une somme de termes positifs , un au moins étant strictement positif.
Réciproquement si λ est valeur propre de S et X vecteur propre asocié on a $^tXSX = \lambda \|X\|^2$. comme on suppose $^tXSX > 0$ et que $X \neq \overrightarrow{0}$ on a bien $\lambda > 0$

b $\Rightarrow$ **c** . S étant diagonalisable dans une base orthonormée (symétrique réelle) on peut écrire $S = PD^tP$. avec $D = diag(d_i)$. Par hypothèses les d_i sont strictement positifs . On peut donc définir $\Delta = diag(\sqrt{d_i})$ qui est inversible car les termes diagonaux sont non nuls. $M = \Delta^t P$ est alors une solution du problème.

$$^tMM = P\Delta\Delta^tP = PD^tP = S$$

c $\Rightarrow$ **d** si $S =^t MM$ avec M inversible , S est inversible (comme produit de matrices inversibles) et S est positive d'après **I2c**

d $\Rightarrow$ **b** : S est positive donc toutes les valeurs propres de S sont positives et S est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de S . Les valeurs propres de S sont donc strictement positives.

On a la chaînes $b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow b$ et $a \Leftrightarrow b$ donc l'équivalence des 4 propositions.

2a) A est bien une matrice symétrique.

Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = AX = (y_j)_{j=1}^n$ on a :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ \forall j \in [[2, n-1]] , y_j = -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2x_n \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} ^tXAX &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=2}^{n} x_{i-1}x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=2}^{n} x_i^2 + x_1^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\right) - \sum_{j=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1}^2 + x_1^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2\right) - 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2\right) \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

2b pour toute colonne X on constate que ^tXAX est une somme de carré donc est un réel positif. De plus la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall i \in [[1..n-]] \ , x_{i+1} - x_i = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Tous les x_i sont donc nuls . Donc si $X \neq (0)$ ${}^tXAX$ est strictement positif.

2c) Avec la matrice M du sujet notons $S =^t MM = (s_{i,j})$ on a en faisant le produit :

$$\begin{cases} s_1 = u_1^2 \\ i > 1 \Rightarrow s_i = u_i^2 + v_{i-1}^2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow s_{i,i+1} = s_{i+1,i} = u_i v_i \\ |j - i| > 1 \Rightarrow s_{i,j} = 0 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} u_1^2 = 2 \\ i > 1 \Rightarrow u_i^2 + v_{i-1}^2 = 2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow u_i v_i = -1 \end{cases}$$

On a donc $v_i = -\dfrac{1}{u_i}$ et en reportant $u_i^2 = 2 - \dfrac{1}{u_{i-1}^2}$. Soit en posant $a_i = u_i^2$ la suite homographique :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_i = 2 - \dfrac{1}{a_{i-1}} \end{cases}$$

l'équation $l = 2 - 1/l$ donne un point fixe double $l = 1$. La suite $\dfrac{1}{a_i - 1}$ est donc arithmétique . Or

$$\frac{1}{a_i - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i-1}}} = \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} - 1} = 1 + \frac{1}{a_{i-1} - 1}$$

d'où $\dfrac{1}{a_i - 1} = i$ et

$$u_i = \sqrt{\frac{i+1}{i}}, v_i = -\sqrt{\frac{i}{i+1}}$$

3a) $\mathcal{U}$ est une base car S est une matrice inversible d'après **II1c**

3b) C'est la méthode d'orthogonalisation de Schmidt .Démonstration par récurrence

- (V_1) est réduit à un seul vecteur non nul donc est une famille orthogonale de vecteurs non nuls
- (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et $Vect(V_1, V_2) = Vect(U_1, U_2)$. En effet
  - p_1 est la projection orthogonale sur $Vect(U_1) = Vect(V_1)$ donc $V_2 = U_2 - p_1(U_2)$ est orthogonal à V_1
  - si V_2 était nul , on aurait $U_2 = p_1(U_2) \in Vect(U_1)$. Absurde car (U_1, U_2) est libre
  - (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls , c'est donc une famille libre.
  - Enfin $Vect(V_1, V_2) \subset Vect(U_1, U_2)$ par construction,et comme les deux familles de deux vecteurs sont libres il y a égalité.
- On suppose que $(V_i)_{i=1}^{k-1}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1} = Vect(U_i)_{i=1}^{k-1}$. Montrons que $(V_i)_{i=1}^{k}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $Vect(V_i)_{i=1}^{k} = Vect(U_i)_{i=1}^{k}$.
  - par hypothèse de récurrence on doit seulement montrer que V_k est un vecteur non nul orthogonal à $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1}$ puis $Vect(V_i)_{i=1}^{k} = Vect(U_i)_{i=1}^{k}$.

- Par construction p_{k-1} est la projection orthogonale sur $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1} = Vect(U_i)_{i=1}^{k-1}$ donc $V_k = U_k - p_{k-1}(U_k)$ est orthogonal à $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1}$
- Si V_k est nul alors $U_k = p_{k-1}(U_k) \in Vect(U_i)_{i=1}^{k-1}$ et la famille $(U_i)_{i=1}^{n}$ est lié . Absurde
- Enfin par construction $V_k \in Vec(U_k) \oplus Vect(U_i)_{i=1}^{k-1} = Vect\,(U_i)_{i=1}^{k}$ et $Vect(V_i)_{i=1}^{k-1} = Vect(U_i)_{i=1}^{k-1} \subset Vect(U_i)_{i=1}^{k}$. Donc $Vect(V_i)_{i=1}^{k} \subset Vect(U_i)_{i=1}^{k}$. Les deux familles étant libres de même cardinal , les deux sous espaces sont égaux.

pour $k = n$ on obtient que $\mathcal{V}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.
3c) La base est orthonormale car on norme une base orthonormée (et les dénominateurs sont non nuls car les V_i sont des vecteurs non nuls)
Par construction de $\mathcal{V}$ on a vu que $V_k \in Vect(U_i)_{i=1}^{k}$. Les coordonnées de V_k sur $U_{k+1}, \cdots U_n$ sont donc nuls .
$Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ est triangulaire supérieure. Diviser chaque colonne par sa norme ne change pas les coefficients nuls . $Mat_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})$ est triangulaire supérieure.
3d) notons $\mathcal{B}$ la base canonique . On a

$$M = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{W})\, Mat_{\mathcal{W}}(\mathcal{U}) = PT$$

où T est l'inverse de la matrice triangulaire supérieure construite à la question précédente.
On a alors $S = {}^t MM = {}^t T\,{}^t PPT$. Mais P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{W}$ toutes deux bases orthonormées . Donc P est orthogonale et ${}^tPP = I_n$. Il reste donc $S = {}^t TT$

3e) Si on pose à priori $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ le calcul donne :

$${}^tTT = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2+d^2 & bc+de \\ ac & bc+de & c^2+e^2+f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en résolvant le système ligne par ligne et en choisissant pour a, d, f les racines carrées positives on obtient

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que T est inversible et donc d'après **II 1** S est définie positive.

4a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a ${}^tXA_0X = by^2 + 2cxy$ donc $y = 0$ ou $by + 2cx = 0$

4b)

- si A est définie positive les valeurs propres de A sont strictement positives (cf **II 1**). Leur somme (la trace) et leur produit (le déterminant) le sont aussi. On a donc $a + b > 0$ et $ab - c^2 > 0$. On en déduit que $a + b$ et ab sont strictement positifs donc a et b le sont.
- Si $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$ on a $b > \dfrac{c^2}{a} > 0$ donc $Tr(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. La somme et le produit des valeurs propres sont strictement positifs donc les valeurs propres sont strictement positives . D'après **II 1** A est définie positive.

4c) calcul par bloc :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & {}^tX' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & S' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xa+{}^tX'V & x^tV+{}^tX'S' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} \\
&= xax+x^tX'V'+x^tVX'+{}^tX'S'S' \\
&= ax^2+x({}^tVX'+{}^tX'V)+{}^tX'S'X' \\
&= ax^2+2x^tVX'+{}^tX'S'X' \text{ car } {}^tVX'={}^tX'V \\
&= a\left(x+\frac{{}^tVX'}{a}\right)^2-\frac{1}{a}\left({}^tVX'\right)^2+{}^tX'S'X' \\
&= a\left(x+\frac{{}^tVX'}{a}\right)^2-\frac{1}{a}\left({}^tX'V^tVX'\right)+{}^tX'S'X' \text{ d'après I 1 b} \\
&= a\left[\left(x+\frac{{}^tVX'}{a}\right)^2+\frac{1}{a^2}{}^tX'\left(-V^tV+aS'\right)X'\right]
\end{aligned}$$

On vérifie que tous les produits matriciels ont un sens les matrices étant de tailles compatibles.
On en déduit donc :

- si $a>0$ et $aS'-V^tV$ définie positive, pour toute matrice colonne $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\left(x+\frac{{}^tVX'}{a}\right)^2\geq 0$ et ${}^tX'\left(aS'-V^tV\right)X'\geq 0$ donc ${}^tXSX\geq 0$. De plus si ${}^tXSX=0$ on a une somme nulle de réelles positives donc chaque terme est nulle. En particulier ${}^tX'\left(aS'-V^tV\right)X'=0$ et donc $X'=0$ car $aS\prime-V^tV$ est définie positive on trouve alors $x=0$ en reportant dans $\left(x+\frac{{}^tVX'}{a}\right)^2=0$. Donc $X\neq 0\Rightarrow {}^tXSX>0$ et S est définie positive.
- Si S est définie positive alors $a>0$ car pour $X=\begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix}$, ${}^tXSX=a$ d'après le calcul précédent (avant la division par a) et $aS'-V^tV$ est définie positive car pour toute matrice non nul $X'\in\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX'\left(aS'-V^tV\right)X'=a^2\,{}^tXSX>0 \text{ en prenant } X=\begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}$$

4d) d'après **I 1a**

- Si S est définie positive la question précédente donne par une récurrence évidente que toutes les S_i sont définies positives et tous les a_i positifs pour $i<n$. Enfin $a_n>0$ comme valeur propre de la matrice S_n définie positive.
- Réciproquement si les (a_i) sont tous strictement positifs $S_n=(a_n)$ est définie positive. S_n est définie positives et $a_{n-1}>0$ donc S_{n-1} est définie positive et par récurrence si S_{i-1} est définie positive S_i est définie positive car $a_{i-1}>0$.

4e) Si $S=\begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ on a $a_1=a, V_1=\begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, S_1'=\begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix}$ d'où

$$S_2=\begin{pmatrix} ab-d^2 & af-de \\ af-de & ac-e^2 \end{pmatrix}$$

S est donc définie positive si et seulement si $a>0$ et S_2 définie positive. Donc en utilisant **II 4b** si et seulement si $a>0, ab-d^2>0$ et $\det(S_2)>0$ or $\det(S_2)=(ab-d^2)(ac-e^2)-(af-de)^2=a\det(S)$

S est définie positive si seulement si a>0, $\begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}>0$

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Surveillé (4h)

Un procédé de sommation

LUNDI 3 DÉCEMBRE 2012

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?
- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon

Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien du jour

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.
Son nom est lié à la suite de matrices (H_{2^k}) utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Problème I : CCP 2006, PSI

Etude d'un procédé de sommation

Objectifs.
Dans les parties I et II, on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier à une fonction à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

Notations. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note $|z|$ son module, et pour tout entier naturel n, on note :

① $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$,

② $[|0, n|]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $0 \leq k \leq n$,

✉ : *mamouni.myismail@gmail.com*

③ $\binom{n}{k}$ le nombre de parties ayant k élément d'un ensemble de n éléments, pour $k \in [|0, n|]$.

On rappelle :

① la valeur de $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ pour $k \in [|0, n|]$,

② la formule du binôme : si z_1 et z_2 sont des nombres complexes et n un entier naturel, alors

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$$

Enfin, si n est un entier naturel non nul, on note σ_n la somme $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ et on pose $\sigma_0 = 0$.
Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes.
Toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ étant une suite complexe, si a est une telle suite, on utilise la notation usuelle $a(n) = a_n$.
A toute suite complexe a, on associee la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$$

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$.

Partie I : deux exemples.

I.1. **Cas d'une suite constante.**
Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha$.

I.1.1. Expliciter $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3. La série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ (resp. $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2. **Cas d'une suite géométrique.**
Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = z^n$.

I.2.1. Exprimer a_n^* en fonction de z et n.

I.2.2. On suppose que $|z| < 1$.

1.2.2.1. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

1.2.2.2. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3. On suppose que $|z| \geq 1$.

I.2.3.1. Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$?

I.2.3.2. Quelle est la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3. On suppose que $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : étude du procédé de sommation.

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

II.1. **Comparaison des convergences des deux suites.**

II.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in [|0, n|]$.

II.1.1.1. Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2. En déduire la limite de $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2. Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé. On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n,a) = \sum_{k=0}^{q}\binom{n}{k}\frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n,a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4. On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

II.2. **Comparaison des convergences des séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

II.2.1. Pour $n \in [|0,3|]$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k, c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k$.

II.2.2. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in [|0,n|]$:

$$(\mathcal{E})\ \ U_n = \sum_{k=0}^{n}\lambda_{n,k}S_k \ \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

II.2.2.1. A quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question $II.2.1$?

II.2.2.2. Etablir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in [|0,n|]$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

II.2.3. On suppose que la série $\sum(a_n)$ est convergente. Montrer que la série $\sum(a_n^*)$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4. La convergence de la série $\sum(a_n)$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum(a_n^*)$?

Partie III : une étude de fonctions.

On rappelle que : $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_0 = 0$.

Pour x réel, lorsque cela a du sens, on pose : $\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sigma_n x^n$

III.4. **La série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\ln(n)$ le logarithme népérien de n.

III.4.1. Soit $w_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

III.4.1.1. Montrer que la série $\sum_{k\geq 1} w_k$ est convergente.

III.4.1.2. En déduire que la suite de terme général $\sigma_n - \ln(n)$ admet une limite finie (que l'on ne demande pas de calculer) lorsque n tend vers $+\infty$.

III.4.2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Exprimer τ_{2n} en fonction de σ_{2n} et σ_n.

III.4.3. Montrer en utilisant $III.4.1$ et $III.4.2$ que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ est convergente et déterminer sa somme $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

III.5. **Étude de la fonction ϕ.**

III.5.1. Déterminer le domaine de convergence R de la série $\sum_{n\geq 1} \sigma_n x^n$.

III.5.2. Préciser l'ensemble de définition Δ de la fonction ϕ, et étudier ses variations sur $[0, R[$.

III.5.3. **Valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.**

En utilisant les résultat de la partie II et de la question $III.4.3$ expliciter la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

III.5.4. Expliciter $\phi(x)$ pour $x \in \Delta$ et retrouver la valeur de $\phi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Problème II : Mines-Ponts 2008, MP

Espaces de Lorentz

Notations :

- Soit Q une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note B_Q la forme bilinéaire associée : pour tout x et y de $\mathbb{R}^n$,
$$B_Q(x,y) = {}^t x.Q.y$$
et on note Φ_Q la forme quadratique associée : $\Phi_Q(x) = B_Q(x,x)$.
- Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on dira que Φ_Q est définie positive (respectivement positive, respectivement définie négative) sur V lorsque $\Phi_Q(x) > 0$ pour tout x appartenant à V (respectivement $\Phi_Q(x) \geqslant 0$, respectivement $\Phi_Q(x) < 0$). On notera $\mathcal{V}^+$ (respectivement $\mathcal{V}_0^+$, respectivement $\mathcal{V}^-$) l'ensemble des sous-espaces vectoriels sur lesquels Φ_Q est définie positive (respectivement positive, respectivement définie négative).
- On pose $r(\Phi_Q) = \max\limits_{V\in\mathcal{V}^+} \dim V$ et $s(\Phi_Q) = \max\limits_{V\in\mathcal{V}^+} \dim V$, avec la convention que $\max\limits_{V\in\emptyset} dim V = 0$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

☞ Dans toute cette partie, Q est une matrice symétrique réelle inversible. On note ${}^{(}Q) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la suite de ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité, $n^+(Q)$le nombre de termes strictement positifs dans ${}^{(}Q)$ et $n^-(Q)$ le nombre de termes strictement négatifs dans ${}^{(}Q)$.

① Soit $H \in \mathcal{V}^+$ et $G \in \mathcal{V}^-$, montrer que H et G sont en somme directe et que $r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) \leq n$

② Montrer que $r(\Phi_Q) \geq n^+(Q)$.
On a alors de même $s(\Phi_Q) \geq n^+(Q)$.

③ Montrer que $r(\Phi_Q) = n^+(Q)$ et que $s(\Phi_Q) = n^-(Q)$.

④ Soit R une autre matrice symétrique réelle inversible de taille n telle qu'il existe une constante λ satisfaisant la propriété suivante : $\|B_Q(x,y) - B_R(x,y)\| \leq \lambda \|x\| \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $r(\Phi_Q) = r(\Phi_R)$ si $\lambda \leq \delta$.

Espaces de Lorentz :

Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique et Φ_Q la forme quadratique associée. On dit que $(\mathbb{R}^n, Q)$ est un espace de Lorentz lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées :

- Q est inversible,
- $r(\Phi_Q) = 1$ et $s(\Phi_Q) = n - 1$.

⑤ On suppose dans cette partie que $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est telle que $(\mathbb{R}^n, Q)$ soit un espace de Lorentz. Soit a un vecteur tel que $\Phi_Q(a) > 0$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rho & \longmapsto & \Phi_Q(b + \rho a) \end{array}$$

a On suppose, dans cette question, que a et b sont linéairement indépendants. Montrer qu'il existe au moins une valeur de λ telle que $\varphi(\lambda) < 0$.

b Établir la propriété :

$$B_Q^2(a,b) \geq \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$$

avec égalité si et seulement si a et b sont colinéaires. On pourra s'inspirer de la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Fin

Bonne Chance

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Surveillé

Corrigé Problème I : Pr. Devulder

Partie I.

1.1. D'après la formule du binôme, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$

1.2. On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = 1$.

1.3. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ sont grossièrement divergentes.

2.1. La formule du binôme indique que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n^* = \frac{1}{2^n}(z+1)^n$

2.2.1. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ Pour $|z| < 1$ ce terme admet une limite. $\sum(a_n)$ converge et $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$

2.2.2. On a $\left|\frac{z+1}{2}\right| \leq \frac{1+|z|}{2} < 1$ et $\sum(a_n^*)$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme $\sum_{n\geq 0} a_n^* = \frac{1}{1-\frac{z+1}{2}} = \frac{2}{1-z} = 2A(z)$

2.3.1. La série $\sum(a_n)$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle).

2.3.2. Si $z = -2$ alors $a_n^* = (-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

2.3.3. (a_n^*) est une suite géométrique de raion $r = \frac{e^{i\theta}+1}{2} = \cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Comme $\theta \in]0,\pi[$, $|r| \in]0,1[$ et $\sum(a_n^*)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a_k^* = \frac{1}{1-r} = \frac{2}{1-e^{i\theta}} = \frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)} = 1 + i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

Partie II.

1.1.1. On a $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$

1.1.2. Par croissance comparées, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = 0$

1.2. q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une suite finie de suites de limite nulle et $\lim_{n\to+\infty} S_q(n,a) = 0$

1.3. Soit $\varepsilon > 0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k \geq q$, $|a_k| \leq \varepsilon/2$. La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $|S_q(n,a)| \leq \varepsilon/2$.

On a alors $\forall n \geq n_0$, $|a_n^*| = \left|S_q(n,a) + \frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$ Comme $\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \leq 2^n$, on a finalement $\forall n \geq n_0$, $|a_n^*| \leq \varepsilon$ et on a montré que $\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$

1.4. On a $a_n^* - l = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l)$ et on se ramène au cas précédent $(a_n - l \to 0)$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$

1.5. Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2.1. Un calcul au brouillon (non reporté) donne $U_0 = S_0$, $U_1 = 2S_0 + S_1$, $U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0$, $U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$

2.2.1. On peut donc supposer que $U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$

2.2.2. La formule précédente est vraie pour $n = 0,1,2,3$. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie jusqu'au rang $n-1$. On remarque que $U_n = 2^nT_n = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$ On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on obtient $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\right)S_k + S_n$ Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on a donc $U_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)S_k + S_n$ La formule $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ permet alors de montrer le résultat au rang n.

2.3. On suppose que $\sum(a_n)$ converge et on note S sa somme. On a donc $S_n \to S$ quand $n \to +\infty$. Avec la question précédente, on a $U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} - S_1$ Comme $S_{n+1} \to S$, la question $II.1$ indique que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = S$ ce qui donne $\frac{U_{n-1}+S_1}{2^n} \to S$ ou encore $T_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}} \to 2S$. La série $\sum(a_n^*)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n$

2.4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum(a_n)$ diverge alors que $\sum(a_n^*)$ converge. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ n'ont donc pas toujours même nature.

Partie III.

4.1.1. On a $w_k = -\ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{2(k+1)^2}$ et c'est donc le terme général d'une série absolument convergente.

4.1.2. Soit $v_n = \sigma_n - \ln(n)$; on a $v_n - v_{n+1} = w_n$. Or, la série $\sum(v_n - v_{n+1})$ et la suite (v_n) ont même nature et donc (v_n) est une suite convergente.

4.2. En regraoupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a $\tau_{2n} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ $\sigma_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} +$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ En faisant la différence, on obtient $\tau_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$

4.3. Sotons l la limite de $(\sigma_n-\ln(n))=(v_n)$. On a $v_{2n}-v_n=\sigma_{2n}-\sigma_n-\ln(2)=\tau_{2n}-\ln(2)$ Cette quantité étant de limite $l-l=0$, on a donc $\tau_{2n}\to\ln(2)$. Par ailleurs $\tau 2n+1-\tau_{2n}=\frac{1}{2n+1}$ et donc $\tau_{2n+1}\to\ln(2)$. Finalement, la suite τ est convergente de limite $\ln(2)$ ou encore $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)$

5.1. $(\sigma_n-\ln(n))$ admettant une limite finie, on a $\sigma_n\sim\ln(n)$. Ainsi, $(x^n\sigma_n)$ est bornée si et seulement si $|x|<1$. Le rayon de convergence R est donc égal à 1.

5.2. Comme $\sigma_n\to+\infty$, $\sum(\sigma_n)$ diverge et $\Delta=[-1,1[$. On peut dériver terme à terme la série entière pour obtenir $\forall x\in[0,1[,\ \phi'(x)=\sum_{n\geq 1}n\sigma_n x^{n-1}\geq 0$ et ϕ est donc croissante sur $[0,1[$.

5.3. La relation $\gamma_n=\frac{\sigma_n}{n!}$ peut s'écrire $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ Si on pose $a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $k\geq 1$ et $a_0=0$, on a donc $\frac{\sigma_n}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=a_n^*$ La partie II indique alors que $\sum(a_n^*)$ est convergente de somme égale à deux fois celle de $\sum(a_n)$. On a ainsi $\phi\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma_n}{2^n}=2\ln(2)$

5.4. Soit $u_k=\frac{1}{k}$ si $k\geq 1$ et $u_0=1$. Soit w la suite constante égale à 1. On a $\forall n\geq 0,\ \sigma_n=\sum_{k=0}^{n}u_k w_{n-k}=(u*w)_n$ où $u*w$ désigne le produit de Cauchy de u par w. Le cours indique alors que $\forall x\in]-1,1[,\ \phi(x)=\sum_{k\geq 0}u_k x^k\sum_{k\geq 0}x^k=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ On retrouve $\phi(1/2)=2\ln(2)$.

Corrigé Problème II : Pr. Deyris

① Si H et G ne sont pas en somme directe, alors leur intersection contient un vecteur u non nul, et donc le vecteur $v=u/\|u\|$ appartient à $H\cap G\cap S$. Mais alors on doit avoir $\Phi_Q(v)\geq 0$ puisque $H\in\mathcal{V}_0^+$, et $\Phi_Q(v)<0$ puisque $G\in\mathcal{V}^-$, contradiction.

Puisque les dimensions possibles des sous-espaces sont en nombre fini, il existe $H_0\in\mathcal{V}^+$ vérifiant $r(\Phi_Q)=\dim H_0$, et $G_0\in\mathcal{V}^-$ vérifiant $s(\Phi_Q)=\dim G_0$. Puisque $\mathcal{V}^+\subset\mathcal{V}_0^+$, ces deux sous-espaces sont en somme directe d'après ce qui précède, et donc $r(\Phi_Q)+s(\Phi_Q)=\dim(H_0+G_0)\leq\dim\mathbb{R}^n=n$.

② Puisque Q est symétrique réelle, on sait que $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormale de vecteurs propres pour Q. Posons $p=n^+(Q)$, et choisissons une telle base orthonormale $(e_1,\ldots,e_n)$, en numérotant les vecteurs de manière à ce que les p premiers vecteurs de la base soient associés à des valeurs propres strictement positives, notées $\mu_1,\ldots,\mu_p$. Soit enfin $H=\overrightarrow{(}e_1,\ldots,e_p)$.

Si $u = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in H \setminus \{0\}$, alors un calcul classique fournit $\Phi_Q(u) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i^2 > 0$ et donc $H \in \mathcal{V}^+$. Par suite $r(\Phi_Q) \geq \dim H = n^+(Q)$.

③ On a donc $n^+(Q) + n^-(Q) \leq r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) \leq n$. Or Q est inversible, donc 0 n'en est pas une valeur propre ; et Q est diagonalisable, donc a n valeurs propres réelles. Par suite $n^+(Q) + n^-(Q) = n$, ce qui entraine $r(\Phi_Q) = n^+(Q)$ et $s(\Phi_Q) = n^-(Q)$.

④ Soient $H \in \mathcal{V}^+$ de dimension $r(\Phi_Q)$, et $G \in \mathcal{V}^-$ de dimension $s(\Phi_Q)$.
Alors $S \cap H$ est la sphère unité de l'espace de dimension finie H, donc est un compact de H. D'autre part, Φ_Q, en tant que forme quadratique, est continue sur $S \cap H$. Elle atteint donc un minimum m en un point u_1 de $S \cap H$; et, puisque $u_1 \in S \cap H$, on a $m > 0$. Posons $\delta_1 = m/2$.
Supposons $\kappa \leq \delta_1$. Alors, si $x \in S \cap H$, $\Phi_R(x) \geq \Phi_Q(x) - \kappa\|x\|^2 \geq m - m/2 > 0$. Donc Φ_R est strictement positive sur $S \cap H$, et donc $r(\Phi_R) \geq \dim H = r(\Phi_Q)$.
De même, en prenant $\delta_2 = -M/2 > 0$ où M est le maximum de Φ_Q sur $S \cap G$, on montre que $s(\Phi_R) \geq \dim G = s(\Phi_Q)$ si $\kappa \leq \delta_2$.
Prenons alors $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $\kappa \leq \delta$, alors $r(\Phi_R) \geq r(\Phi_Q)$ et $s(\Phi_R) \geq s(\Phi_Q)$. Mais, d'après les questions précédentes, $r(\Phi_R) + s(\Phi_R) = r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) = n$, et donc les inégalités précédentes sont des égalités.

⑤ Supposons $\varphi(\lambda) \geq 0$ pour tout λ. Soit $H = \overrightarrow{(}a, b)$ (de dimension 2 puisque (a, b) est libre), soit $u = \alpha a + \beta b \in H$.
Si $\beta = 0$, alors $\Phi_Q(u) = \alpha^2 \Phi_Q(a) \geq 0$; sinon, $\Phi_Q(u) = \beta^2 \Phi_Q(b + (\alpha/\beta)a) = \beta^2 \varphi(\alpha/\beta) \geq 0$. Donc Φ_Q est positive ou nulle sur H, et donc $H \in \mathcal{V}_0^+$.
Soit alors $G \in \mathcal{V}^-$ de dimension $n - 1 = s(\Phi_Q)$. D'après la question 4, G et H sont en somme directe, alors que la somme de leurs dimensions est strictement plus grande que n : on aboutit donc à une contradiction, φ prend donc obligatoirement des valeurs strictement négatives.

⑥ Puisque $\Phi_Q(a) > 0$, a n'est pas nul. Si (a, b) est liée, on peut donc trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b = \alpha a$. On a alors $B_Q(a, b)^2 = \alpha^2 \Phi_Q(a) = \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$: l'inégalité est vérifiée, et on a égalité.
Supposons maintenant (a, b) libre. Alors $\varphi(\lambda) = \Phi_Q(a)\lambda^2 + 2B_Q(a, b)\lambda + \Phi_Q(b)$ est un trinôme du second degré en λ puisque $\Phi_Q(a) \neq 0$, dans lequel le coefficient de λ^2 est strictement positif, et qui prend des valeurs strictement négatives d'après la question précédente. Son discriminant est donc strictement positif, ce qui donne $B_Q(a, b)^2 > \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$. L'inégalité est donc vérifiée, et on n'a pas égalité.

Fin

Á la prochaine

Devoir Libre

Comparaison de convergence

JEUDI 6 DÉCEMBRE 2012

CCP 2012, MP

✉ : *mamouni.myismail@gmail.com*

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Libre
CCP 2012, MP

PR. GILBERT

Partie I

① (a.)La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge sur $\mathbb{R}_+$, où $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}\{|f(x)|/x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.
(pour que cette définition ait un sens, il faut que les fonctions soient bornées sur I, de manière à pouvoir parler de la norme infinie)

(b.) $\forall x \in I$, $0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument

② Pour x dans I notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 indépendamment de x, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

③ Pour x fixé dans $I = [0,1]$, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n} + \dfrac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Le CSSA est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0,1]$.
Le CSSA nous dit que, pour tout x de I, $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \dfrac{x^2}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n}$.
$\lim \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n} = 0$ donc la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$.
Enfin, pour x fixé, $|f_n(x)| = \dfrac{x^2}{n^2} + \dfrac{1}{n}$. La série $\sum \dfrac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I.

④ Considérons la fonction f_n définie sur $I = [0,1[$ par $f_n(x) = x^n$. Pour x dans I, la série $\sum |f_n(x)| = \sum x^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-x}$. Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0,1[$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Alors $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Montrons que cette suite de fonctions $(R_n(x))$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet $R_n(1-\frac{1}{n}) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = ne^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})} \sim \frac{n}{e}$ qui tend vers $+\infty$ avec n. Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0,1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I. **Partie II**

⑤ La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.
Soit $x \in I$. La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0 \leqslant x < 1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$ converge (linéarité).
$\forall n \geqslant 1, \forall x \in I,\ 0 \leqslant \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_0(1-x)x^n$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.

⑥ (a.) $\forall x \in I,\ f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. En construisant le tableau de variations de f_n on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\frac{n}{n+1}$ qui vaut
$f_n(\frac{n}{n+1}) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.

(b.) $\|f_n\|_\infty = \frac{\alpha_n}{n}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$

Or $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, et $(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$. Donc $\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$.

Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \frac{\alpha_n}{ne}$; de plus $\|f_n\| \geqslant 0$ et donc, par comparaison de séries positives,

$$\boxed{\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge } \Longleftrightarrow \sum \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$$

⑦ (a.) $\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.}$

(b.) On sait que la suite (α_n) décroît. Donc pour $k \geqslant n+1$, $\alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.
Alors $\forall k \geqslant n+1,\ \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$, et donc par inégalités sur les séries convergentes,
$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}$.

La suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x)$ est donc positive et majorée par une suite qui ne dépend pas de x et qui converge vers 0 , ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

(c.) La suite (α_n) décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle. Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$.
Dans ces conditions pour tout x dans I, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$.
Mais alors, $R_n(1+\frac{1}{n+1}) \geqslant \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\frac{\ell}{e}$ (voir question 6.a.)donc ne converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.
Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I, si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

⑧ (a.) Avec $\alpha_n = \frac{1}{n}$, la question 6.b. montre que la série $\sum f_n$ converge normalement (car $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge)

(b.) Il suffit de prendre $\alpha_n = 1$: la suite est constante, donc elle décroît (au sens large), et elle ne converge pas vers 0. Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$

(c.) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_n$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge .
La suite définie par $\alpha_n = \frac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient (elle est bien définie pour $n \geqslant 1$). Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.
La fonction $g : x \to \frac{2}{x\ln(x)}$ décroît sur $[2,+\infty[$ et est positive.
La série $\sum_{n\geqslant 2} g(n)$ est donc de même nature que l'intégrale $\int_2^{+\infty} g(x)dx$. Or $\int_1^M g(x)dx = \int_1^M \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln x)]_2^M = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2)$ qui a pour limite $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$diverge, et donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

⑨ CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple ($\mathbb{R}$ est complet)
CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple.
Aucune des réciproques n'est vraie. Et de plus :
CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme, et de même :
CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue

Problèmes Corrigés MP

Devoir Libre

Transformée Intégrale (CNC 2005, TSI)

Jeudi 13 Décembre 2012

Blague du jour

.
Le professeur de chimie inscrit la formule HN03 sur le tableau. Il interroge ensuite un élève :
- Que signifie cette formule ?
- Heu, je l'ai sur le bout de la langue, monsieur !
- Crachez-la tout de suite, c'est de l'acide nitrique !

Mathématicien du jour

Ibn Battuta, (1304 Tanger-1369 Marrakech)

Explorateur et voyageur marocain, parcourant 120 000 km en 28 ans de voyages qui l'amènent à l'Inde, la Chine, au Kazakhstan, l'Andalousie, au Mali. Ses récits, compilés par Ibn Juzayy en un livre appel Rihla (voyage) sont plus précis que ceux de Marco Polo, mais contiennent plusieurs passages qui relèvent clairement de la pure imagination, notamment ceux décrivant des êtres surnaturels.

Exercice

① ① Si c et d sont deux réels et k un entier naturel non nul, montrer que
$$\int_0^1 (ct^2+dt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{(2c+d)(-1)^k - d}{k^2\pi^2}.$$

② En déduire qu'il existe un unique couple (a,b) de réels tels que, pour tout entier $k \geqslant 1$,
$$\int_0^1 (at^2+bt)\cos(k\pi t)\,dt = \frac{1}{k^2}.$$

③ Calculer alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 (at^2+bt)\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\Big)\,dt$.

② Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in]0,\pi[$, $1+$

$$2\sum_{k=1}^{n}\cos(2k\theta) = \frac{\sin\left((2n+1)\theta\right)}{\sin\theta}.$$

③ Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

① Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\ dt = \frac{f(0)-f(1)\cos\lambda}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^1 f'(t)\cos(\lambda t)\ dt.$

② En déduire que la fonction $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\sin(\lambda t)\ dt$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

④ On considère la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par

$$f(t) = \frac{\pi^2(t^2-2t)}{4\sin(\frac{\pi}{2}t)} \quad \text{si} \quad t \neq 0 \quad \text{et} \quad f(0) = -\pi.$$

① Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

② Justifier que f est dérivable sur $]0,1]$ et que f' possède une limite finie à droite en 0.

③ Montrer alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

④ Vérifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $(at^2+bt)\left(\frac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi t)\right) = f(t)\sin\left((2n+1)\frac{\pi t}{2}\right).$

⑤ En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ ainsi que la valeur de sa somme.

PROBLÈME

Notations :

Dans ce problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Si f est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$, on lui associe l'équation différentielle

$$y'' + y = f. \qquad (\mathcal{E}_f)$$

Première partie

① Montrer que l'ensemble Σ_0 des solutions de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ est un espace vectoriel réel ; préciser sa dimension et en donner une base.

② On note Σ_λ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin(\lambda x), \qquad (E_\lambda)$$

où λ est un réel non nul tel que $\lambda^2 \neq 1$.

① Montrer qu'il existe un unique réel a, que l'on calculera, tel que la fonction

$$S_\lambda : x \longmapsto a\sin(\lambda x)$$

soit un élément de Σ_λ.

② Montrer alors que $\Sigma_\lambda = \{x \longmapsto \alpha\cos x + \beta\sin x + S_\lambda(x)\quad ;\quad (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\}$.

③ Vérifier que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont toutes 2π-périodiques.

④ Montrer que la fonction S_λ est périodique et préciser ses périodes puis en déduire que l'équation différentielle $(E_{\sqrt{2}})$ n'a pas de solutions 2π-périodiques.

Deuxième partie

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt, \quad \varphi_1(x) = \int_0^x f(t)\cos t\,dt \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = \int_0^x f(t)\sin t\,dt.$$

① Montrer que φ_1 et φ_2 sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer $\varphi_1'(x)$ et $\varphi_2'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

② ① Montrer que, pour tout réel x, $\varphi(x) = \varphi_1(x)\sin x - \varphi_2(x)\cos x$.

② En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

③ Montrer que φ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

③ Soit g une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$; montrer que la fonction $(g-\varphi)$ est solution de l'équation différentielle $y''+y=0$ et en déduire qu'il existe un unique couple $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout réel x,

$$g(x) = \alpha\cos x + \beta\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt.$$

④ **Application** : Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $h''+h \geqslant 0$.

① Vérifier que h est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$ où $f_1 = h''+h$.

② En déduire une expression de h puis montrer que, pour tout réel x, $h(x+\pi)+h(x) \geqslant 0$.

⑤ **Cas où f est 2π-périodique**

On revient au cas général et on suppose que f est en plus 2π-périodique.

① Si l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une solution 2π-périodique g.

① Montrer alors que la fonction φ est 2π-périodique.

② Montrer que, pour tout réel x, $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt = 0$ et en déduire que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0.$$

② Réciproquement, montrer que si $\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\ dt = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,dt = 0$ alors toutes les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont 2π-périodiques.

③ Si f est la fonction sinus, l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède-t-elle des solutions 2π-périodiques ?

Troisième partie

Dans cette partie, on considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et possédant une limite finie ℓ en $+\infty$.

① ① Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout réel $x \geqslant A$, $|f(x)| \leqslant 1+|\ell|$.

② Montrer alors que f est bornée sur $[0,+\infty[$.

② ① Justifier que la fonction f' est positive et montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ est convergente ; préciser la valeur de cette intégrale.

② En déduire que les intégrales $\int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)\sin t\,dt$ sont convergentes.

③ ① Montrer que, pour tout réel x,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,dt.$$

② En déduire que toute solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est de la forme

$$y_{\alpha,\beta} : x \longmapsto f(x) + \left(\alpha - f(0) - \int_0^x f'(t)\cos t\,dt\right)\cos x + \left(\beta - \int_0^x f'(t)\sin t\,dt\right)\sin x,$$

où α et β sont des réels.

③ Montrer alors que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont bornées sur $[0, +\infty[$.

④ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$; on suppose que la solution $y_{\alpha,\beta}$ de $(\mathcal{E}_f)$ admet une limite finie en $+\infty$.

① En étudiant la suite $\left(y_{\alpha,\beta}(n\pi)\right)_{n\geqslant 0}$, montrer que $\alpha = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)\cos t\,dt$.

② Trouver de même la valeur de β.

⑤ Montrer alors que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution, notée Y_f, ayant une limite finie en $+\infty$ à préciser, et que Y_f est définie par

$$Y_f(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} f'(t)\cos(x-t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

FIN

Á la prochaine

✉ : *mamouni.myismail@gmail.com*

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

.

.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

.

mamouni.myismail@gmail.com

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

mamouni.myismail@gmail.com

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Pseudo crochet de Lie (CNC 2003, MP)

JEUDI 10 JANVIER 2013

Blague du jour

• Une puce et un labrador discutent :
-Le chien : Qu'est-ce que tu a regardé hier soir la télé ?
-La puce : La deuxième chienne, et toi ?
- Moi, canal puce ...
• Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
Réponse : c'est un chameau qui bosse double !

André-Louis Cholesky (1875-1918)

Mathématicien du jour

Polytechnicien et officier français, ingénieur topographe et géodésien. Il est célèbre pour sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires, toujours intensément utilisée de nos jours. Durant la Première Guerre mondiale, il participe à l'amélioration d'une cartographie nécessaire à la préparation des tirs. il décède des suites de blessures reçues sur le champ de bataille.

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est tout simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n a coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se note I_n.
Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$, $Tr(A)$ sa trace et $rg(A)$ son rang.
Soeint A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on considére l'application, notée $\Phi_{A,B}$, suivante

$$\Phi_{A,B} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX + XB \end{array}$$

Si $B = A$, $\Phi_{A,B}$ sera notée simplement Φ_A .

1^{ere} Partie

① Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; montrer que $Sp_{\mathbb{K}}(C) = Sp_{\mathbb{K}}({}^tC)$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

② Montrer que l'application $\Phi_{A,B}$ est linéaire .

③ Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) un vecteur propre de A (resp. ${}^tB$) associé à la valeur propre a (resp. b) .

① Expliciter les coefficients de la matrice V^tW en fonction des coefficients $v_1, \ldots, v_n$ de V et $w_1, \ldots, w_n$ de W, et en déduire que la matrice V^tW n'est pas nulle .

② Montrer que la matrice V^tW est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé ?

④ Soit λ une valeur propre de $\Phi_{A,B}$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé .

① Montrer que pour tout entier naturel k, $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$.

② En déduire que pour tout polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$.

③ On suppose que le polynôme caracteristique P_A de A scindé sur $\mathbb{K}$ et s'ecrit

$$P_A = (-1)^n \prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} (X - \mu)^{\beta_\mu}.$$

- Montrer que $YP_A(\lambda I_n - B) = 0$ et en déduire que la matrice $P_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible .
-En déduire qu'il existe $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible .

⑤ Conclure que si le polynôme P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) = Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$.

⑥ Soient $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et $Z_1, \ldots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_p$ sont tous nuls .

⑦ On suppose ici que les matrices A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(U_1, \ldots, U_n)$ et $(W_1, \ldots, W_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$. En considérant la famille $(U_i^t W_j)_{1 \le i,j \le n}$, montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable .

⑧ On suppose que les deux matrices A et B sont réelles et symétriques d'ordre n.

① Montrer que l'application $<,>: (M, N) \mapsto Tr({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

② Montrer que si C et D sont deux matrices d'ordre n, alors $Tr(DC) = Tr(CD)$.

③ Montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$.

2^{eme} Partie

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considére une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et définie positive. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire définie à la fin de la partie précédente .

① Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives .

② En déduire alors que l'automorpisme autoadjoint Φ_S est definie positif .

③ Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que X est symetrique si et seulement si $\Phi_S(X)$ l'est aussi .

④ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symetrique réelle d'ordre 2 .

① On suppose que A est définie positive; montrer alors que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

② Soit $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de composantes x et y ; exprimer ${}^tUAU$ en fonction de a, b, c, x et y et montrer que si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors A est définie positive .

③ On suppose ici que A est définie positive. On considère une matrice $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$. Calculer la matrice $\Phi_A(X_\lambda)$ et montrer qu'on peut trouver des valeurs b et λ pour lesquelles cette matrice ne soit pas définie positive .

⑤ Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$S = PDP^{-1}.$$

Dans la suite, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de la matrice D : $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

⑥ Dans cette question, on considère une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $M = \Phi_S(X)$; on pose aussi $Y = P^{-1}XP$ et $N = P^{-1}MP$. On note $n_{i,j}$ les coefficients de la matrice N et $y_{i,j}$ ceux de Y .

① Vérifier que $N = \Phi_S(Y)$ et exprimer les coefficients $y_{i,j}$ à l'aide des λ_k et des coefficients de la matrice N .

On suppose désoramis que la matrice M est symétrique et définie positive .

② Montrer que la matrice N est symétrique et définie positive .

③ Soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \ldots, u_n$.

- Montrer que ${}^tUYU = \sum\limits_{1 \le i,j \le n} \dfrac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$.
- Soit $\alpha > 0$; montrer que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.
- On note $U(s)$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1 s^{\lambda_1 - \frac{1}{2}}, \ldots, u_n s^{\lambda_n - \frac{1}{2}}$, $s \in]0, 1]$. Justifier que l'application $s \mapsto^t U(s)NU(s)$ est continue et intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.
- Exprimer l'intégrale de la fonction précédente en fonction de ${}^tUNU$ et en déduire que si U est non nul, alors ${}^tUYU > 0$.

④ Conclure que la matrice X est symétrique définie positive .

3^{eme} Partie

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on étudie la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ dans le cas où $B = -A$. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'une de ses normes .

① On suppose que $A = \Delta$ où Δ la matrice $diag(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ avec les μ_i deux à deux distincts .

① On prend $n = 2$; déterminer $\text{Ker}\Phi_{A,-A}$; quelle est sa dimension ?

② On revient au cas général.
Déterminer $\text{Ker}\Phi_{A,-A}$; quelle est sa dimension ?

② Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distincts .

① Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

② En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que la dimension de $\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A}$ est égale à n .

③ ① Montrer que l'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

② Soit $q \in \mathbb{N}^*$, avec $q \leq n$. Montrer que l'application $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}\right)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

④ Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distincts est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.(on pourra utiliser la trigonalisation)

⑤ Soit r un entier naturel, avec $r \leq n$. On admet les deux résultats suivants : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;

- Si le rang de A est égal à r alors il existe une sous-matrice A qui est inversible d'ordre r.

- S'il existe une sous-matrice de la matrice A, qui soit d'ordre r et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r .

① Montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) > r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

② Soit $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 2$, toutes de rang $s > 0$ convergeant vers une matrice A. Montrer que le rang de A est inférieur ou égal à s .

⑥ En utilisant les questions 3. et 4. ainsi qu'une version vectorielle du résultat de la question 5.(b), montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieur ou égal à n .

FIN

Á la prochaine

✉ : *mamouni.myismail@gmail.com*

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Libre

Pseudo crochet de Lie

Corrigé Pr. Mamouni, CPGE Rabat

1^{ere} Partie

① Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; montrer que $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(C) \iff \det(A-\lambda I_n) = 0 \iff \det({}^tA-\lambda I_n) = 0 \iff \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}({}^tC)$. NB $\det(M) = \det({}^tM) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

② Il est clair que $\Phi_{A,B}(X+\lambda Y) = \Phi_{A,B}(X) + \lambda\Phi_{A,B}(Y)$.

③ ① En notant les coefficients de la matrice V^tW par $(V^tW)_{i,j}$ on a $(V^tW)_{i,j} = v_iw_j$. D'autre part $V \neq 0$ car vecteur propre, donc $\exists 1 \leq i \leq n$ tel que $v_i \neq 0$, de même $\exists 1 \leq j \leq n$ tel que $w_j \neq 0$, d'où $\exists 1 \leq i,j \leq n$ tel que $(V^tW)_{i,j} = v_iw_j \neq 0$ et donc la matrice V^tW est non nulle.

② On a $AV = av,^t BW = bW$ donc $AV = av,^t WB = b^tW$ $\Phi_{A,B}(V^tW) = AV^tW + V^tWB = (a+b)V^tW$, or $V^tW \neq 0$ donc V^tW est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $a+b$.

④ ① Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$.
Le résultat est évidemnt vrai pour $k = 0$. NB $M^0 = I_n \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposons maintenant $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$ et montrons que $A^{k+1}Y = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$. On a d'abord $\Phi_{A,B} = \lambda Y$, donc $AY + YB = \lambda Y$ et on trouve $AY = Y(\lambda I_n - B)$. Donc $A^{k+1}Y = AA^kY = AY(\lambda I_n - B)^k = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$.

② Soit un polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, et de degré d, donc $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_kX^k$, et donc $P(A)Y = \sum_{k=0}^{d} a_kA^kY = \sum_{k=0}^{d} a_kY(\lambda I_n - B)^k = Y\sum_{k=0}^{d} a_k(\lambda I_n - B)^k = YP(\lambda I_n - B)$.

③ D'aprés le théorème de *Cayley-Hamilton*, $P_A(A) = 0$ donc $YP_A(\lambda I_n - B) = 0$ notons $S = P_A(\lambda I_n - B))$ io S était inversible $YS = 0 \Longrightarrow YSS^{-1} = Y = 0$ ce qui est impossible puisque Y est un vecteur propre, donc la matrice $P_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible .
Il est clair que si un produit de matrices n'est pas inversible alors l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'est pas inversible.
Or $P_A(\lambda I_n - B) = (-1)^n \prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} ((\lambda-\mu)I_n - B)^{\beta_\mu}$ n'est pas inversible donc $\exists \mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $((\lambda-\mu)I_n -$

$B)^{\beta_\mu}$ n'est pas inversible et donc $\exists\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\lambda-\mu)I_n - B$ n'est pas inversible .En prenant $a=\mu$ on peut en déduire qu'il existe $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda-a)I_n - B$ ne soit pas inversible .

⑤ Si le polynôme P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors : $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \implies \exists a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda-a)I_n - B$ ne soit pas inversible c'est à dire $\det((\lambda-a)I_n - B) = 0$ et donc $\lambda - a \in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ donc $\exists b \in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ tel que $\lambda - a = b$ d'où $\lambda = a+b$ or $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ d'où $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$ et on conclut que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \subset Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$.
Inversement, d'aprés la question 3.b on voit que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \supset Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$. D'où l'égalité.

⑥ Supposons que $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$, on multiplie cette égalité à droite par un Z_j où $1 \leq j \leq n$ fixe, mais quelconque d'où $\sum_{i=1}^{p} a_i Y_i = 0$ où $a_i =^t Z_i Zj$, or $(Y_1, \dots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j =^t Z_j Z_j = \|Z_j\|_2 = 0$ et donc $Z_j = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$.
La réciproques est bien evidente.

⑦ La famille $(U_i^t W_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est formée par des vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, pour montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable il suffit de montrer que c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ or il est de cardinal n^2 égal à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il suffit donc de montrrer qu'elle est libre.
En effet $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} U_i^t W_j = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} U_i^t Z_i = 0$ où $Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j$ d'aprés la question précédente $Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ or $(W_j)_{1\leq j\leq n})$ est aussi libre donc $a_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$.

⑧ ① $\forall (M = (m_{i,j}), N, P) \in \mathcal{M}_n^3(\mathbb{R}), \forall\lambda \in \mathbb{R}$ on a : $< M + \lambda N, P > = \text{Tr}({}^tMP + \lambda {}^tNP) = \text{Tr}({}^tMP) + \lambda\text{Tr}({}^tNP) = < M, P > + \lambda < N, P >$.
$< M, N > = \text{Tr}({}^tMN) = \text{Tr}({}^t({}^tMN) = \text{Tr}({}^tNM) = < N, M >$.
$< M, M > \text{Tr}({}^tMM) =$ la somme des termes diagonaux de la matrice ${}^tMM$ or ces termes diagonaux sont $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$ d'où $< M, M > = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}^2 \geq 0$.
$< M, M > = 0 \implies \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}^2 = 0 \implies$ les $m_{i,j}$ sont tous nuls ce qui implique que $M = 0$ et ainsi les propriétes du produit scalaire sont tous verifiés.

② Question de cours à la portée de tous .

③ Pour montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$ il faut montrer que $< \Phi_{A,B}(X), Y > = < X, \Phi_{A,B}(Y) >$ $quad\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $< AX, Y > + < XB, Y > = < X, AY > + < X, YB >$, or $< AX, Y > = \text{Tr}({}^tX^tAY) = \text{Tr}({}^tXAY) = < X, AY >$ de même on montre que $< XB, Y > = < X, YB >$.

2^{eme} Partie

① Soit λ valeur propre de S et X un vecteur propre associé, donc $SX = \lambda X$ d'où
$0 <^t XSX = \lambda\|X\|_2^2$ or $X \neq 0$ car vecteur propre donc $\|X\|_2^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$.

② les valeurs propres Φ_S sont de la forme $\lambda + \mu$ où λ, μ des valeurs propres de S donc strictement positifs, ainsi les valeurs propres Φ_S sont strictement positifs or Φ_S est diagonalisable dans une base orthogonale donc est Φ_S definie positif .

③ Supposons $\Phi_S(X)$ symétrique donc $t^X S + S^t X = SX + XS$ d'où
$\Phi_S({}^tX - X) = ({}^tX - X)S + S({}^tX - X) = 0$ or Φ_S inversible car définie positive donc ${}^tX - X$ et donc X symétrique.
La réciproque est bien plus facile.

④ ① En prenant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. on $a =^t XAX > 0$, en plus A définie positive donc $\det(A) = ac - b^2 > 0$.

② ${}^tUAU = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + y^2\frac{ac - b^2}{a^2}\right) > 0$ alors A est définie positive .

③ $\Phi_A(X_\lambda) = \begin{pmatrix} 2a\lambda & (1+\lambda)b \\ (1+\lambda)b & 2c \end{pmatrix}$, $\det \Phi_A(X_\lambda) = -\lambda^2 b^2 + \lambda(4ac - 2b^2) - b^2 \longrightarrow -ß$ si $\lambda \longrightarrow +ß$ donc $\det \Phi_A(X_\lambda) < 0$ à partir d'un certain rang et dans ce cas $\Phi_A(X_\lambda)$ ne peut pas être definie positive.

⑤ Parceque S diagonalisable dans une base orthogonale, puisque définie positive.

⑥ ① $\Phi_D(Y) = DY + YD = P^{-1}SPP^{-1}XP + P^{-1}XPP^{-1}SP = P^{-1}\Phi_S(X)P = P^{-1}MP = N$.
D'autre part, tout calcul matriciel fait on trouve $DY + YD = (\lambda_i y_{i,j}\lambda_j)_{1\leq i,j\leq n}$
or $DY + YD = \Phi_D(Y) = N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ d'où l'égalité : $y_{i,j} = \dfrac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j}$.

② $P^{-1} =^t P$ car P matrice orthogonale donc $N =^t PMP$ d'où ${}^tN =^t P^tMP =^t PMP$ car M symétrique. En plus soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXNX =^t (PX)M(PX) > 0$ car M définie positive.

③ - Le calcul matriciel montre que ${}^tUYU = \sum_{1\leq i,j\leq n} u_i y_{i,j} u_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} \dfrac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$.

- Soit $\alpha > 0$ et $0 < x < 1$ on a $\int_x^1 t^{\alpha-1}dt = \dfrac{1 - x^\alpha}{\alpha} \longrightarrow \dfrac{1}{\alpha}$(finie) quand $x \longrightarrow 0^+$; ce qui montre que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

- Le calcul matriciel donne ${}^tU(s)NU(s) = \sum_{1\leq i,j\leq n} s^{\lambda_i+\lambda_j-1} n_{i,j} u_i u_j$ est intégrable en tant que somme finie de fonctions intégrables les $\lambda_i + \lambda_j$ joueront le rôle de α dans la question précédente.

- $\int_0^1 ({}^tU(s)NU(s)) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \dfrac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j =^t UYU$ or N symétrique définie

positive donc ${}^tU(s)NU(s) > 0$ car $U(s) \neq 0$
en particulier $\int_0^1 ({}^tU(s)NU(s))ds = {}^t UYU > 0$.

④ On a $X = PY{}^tP$, soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tUXU = {}^t({}^tPU)Y({}^tPU) > 0$ car la matrice Y est définie positive la matrice X est définie positive. D'autre part $M = \Phi_S(X)$ est symétrique donc X aussi d'aprés la question 3. de la 2ème partie.

3^{eme} Partie

① ① Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X \in \mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX = XA \iff (\mu_1 - \mu_2)c = (\mu_1 - \mu_2)b = 0$
$\iff b = c = 0 \iff X = \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & d \end{matrix}$; et donc $\dim \ker\Phi_{A,-A} = 2$.

② Soit $X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, le calcul matriciel donne encore une fois
$AX = (\lambda_i x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $XA = (\lambda_j x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, en particulier
$X \in \mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX - XA = 0 \iff (\lambda_i - \lambda_j)x_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$
$\iff x_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i,j \leq n$ tel que $i \neq j \iff X$ est une matrice diagonale, donc $\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A}$ est formé par les matrices diagonale et sa dimension est égale à n.

② ① Résultat trés classique .

② Soit P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $A = P^{-1}DP$, $X \in \mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} \iff AX = XA \iff P^{-1}DPX = XP^{-1}DP \iff DPXP^{-1} = PXP^{-1}D \iff PXP^{-1} \in \mathrm{Ker}\Phi_{D,-D} \iff X \in P^{-1}\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D}P$, d'où $\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A} = P^{-1}\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D}P$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}\Phi_{D,-D}$ à l'aide de l'ismorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ donc sont de même dimension or D diagonale donc $\dim \ker\Phi_{D,-D} = n$ d'où $\dim \ker\Phi_{A,-A} = n$ aussi .

③ ① L'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car linéaire définie un espace vectoriel de dimension finie.

② L'application $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}\right)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car somme et produit des applications $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto a_{i,j}$ qui sont continues car linéaires.

④ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc trigonalisable, il existe donc Q inversible et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ triangulaire telles que $A = Q^{-1}TQ$ où λ_i un valeur propre de M qui se répétent q fois et $\varepsilon = \min\limits_{\lambda_j \neq \lambda_i} |\lambda_j - \lambda_i|$ il est clair que $\lambda_i + \varepsilon \neq \lambda_j$ donc en remplaçant dans T, λ_i par $\lambda_i + \varepsilon$ alors dans T la valeur propre λ_i ne va se répéter que $q-1$ fois, on répéte l'itération jusqu'à ce qu'elle ne se répéte plus. Et on fait pareil pour les autres valeurs propres et on obtient une matrice triangulaire T_ε dont toutes les valeurs propres sont deux à deux distinctes et qui en plus tend vers T quand ε tends vers 0 (quitte à diviser ε par n et tendre n vers +ß). Ainsi T_ε est diagonalisable donc $Q^{-1}T_\varepsilon Q$ aussi, d'autre part $Q^{-1}T_\varepsilon Q \longrightarrow Q^{-1}TQ = A$, d'où la densité.

⑤ ① Pour montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) > r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que son complémentaire $\mathcal{F}_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) \leq r\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Notons φ_q l'application $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}\right)$. $C \in \mathcal{F}_r \iff \forall q \geq r \quad \varphi_q(C) = 0$ et donc $\mathcal{F}_r = \bigcup\limits_{q=r}^{n} \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } \varphi_q(C) = 0\}$ est ruénion finies d'ensembles fermés, car φ_q continue, donc fermé.

② Si $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 2$, toutes de rang $s > 0$ convergeant vers une matrice A avec les notations de la question précédente $A_p \in \mathcal{F}_s \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$ qui est fermé donc $A = \lim A_p \in \mathcal{F}_s$. D'où le rang de A est inférieur ou égal à s .

⑥ Soit un matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et (A_p) une suite de matrice ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, convergente vers A, (cette suite existe d'aprés la question 4.). d'autre part l'application $M \mapsto \Phi_{M,M}$ est continue donc $\Phi_{A_p,-A_p}$ converge vers $\Phi_{A,-A}$. Notons $\text{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) = s$ donc $s = n^2 - \dim\ker(\Phi_{A_p,-A_p})$ (d'aprés la formule du rang), et d'aprés la question 2.b. $\dim\ker(\Phi_{A_p,-A_p}) = n$ donc $\text{rg}(\Phi_{A_p,-A_p}) = s = n^2 - n$ et enfin d'aprés la question 5.b. $\text{rg}(\Phi_{A,-A}) \geq n^2 - n$, en utilisant encore une fois la formule du rang, mais cette fois pour $\Phi_{A,-A}$ on obteint que la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieur ou égal à n .

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Former pour réussir

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre (CNC 2007, MP)

Résolution d'une équation différentielle

LUNDI 21 JANVIER 2013

Blague du jour

C'est un prof,pensant au glaçon qui passe à l'état de vapeur, demande à ses élèves de prépas si tout le monde a bien compris ce que c'est que la sublimation.
« Est-ce que vous pouvez me donner un exemple de solide qui se transforme en gaz sans passer par l'état liquide ? »
Et du fond de la classe quelqu'un lance : « Les cigarettes m'sieur ! »

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué en 1838 les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation. Bessel est le premier à déterminer avec succès la parallaxe, et par là même la distance d'une étoile fixe. il émit, le premier, l'hypothèse que les queues de comètes pouvaient être dues à une force répulsive et l'existence d'une grande planète au-delà d'Uranus.

Mathématicien du jour

Définitions

Pour tout le problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}^+,\quad y''+\frac{1}{x}y'-(1+\frac{\lambda^2}{x^2})y=0. \qquad (F_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

La partie I du problème est largement indépendante des autres.

PARTIE I

① Soit x un réel.

① Étudier, selon les valeurs de x, l'intégrabilité sur l'intervalle $]0,1]$ de la fonction

$$t\longmapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

② Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

② À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t\longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$?

③ On pose $\Gamma(z)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt,\quad z\in\mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z)>0$.

① Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z)>0$; montrer que
$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z).$$

② En déduire, pour tout réel $\alpha>-1$ et tout $p\in\mathbb{N}^*$, l'identité
$$\Gamma(\alpha+p+1)=(\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1).$$

③ Montrer que pour tout $x>0$, $\Gamma(x)>0$.

④ Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

④ ① Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z)>0$; montrer soigneusement que
$$\Gamma(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

② Montrer que la fonction $z\longmapsto\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z}$ est définie sur la partie $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ du plan complexe et qu'elle y est continue.

La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ à $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$.

⑤ Soient a et b deux réels avec $0<a<b$, et soit $t>0$.

① Déterminer $\max(t^{a-1},t^{b-1})$ selon les valeurs de t.

② Montrer que
$$\forall x\in[a,b],\quad 0\leqslant t^{x-1}\leqslant\max(t^{a-1},t^{b-1}).$$

③ En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

④ Donner un équivalent de la fonction Γ au voisinage de 0.

PARTIE II

Soient $\lambda\geqslant 0$, α un réel et $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nz^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R>0$. Pour tout $x\in]0,R[$, on pose
$$y_\alpha(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+\alpha}.$$

① On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0\neq 0$. Montrer que
$\alpha^2=\lambda^2,\quad ((\alpha+1)^2-\lambda^2)a_1=0,\quad$ et $\quad\forall n\geqslant 2,\ ((\alpha+n)^2-\lambda^2)a_n=a$

② On suppose que $\alpha=\lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0\neq 0$.

① Montrer que
$$\forall p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0\quad\text{et}\quad a_{2p}=\frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{2^{2p}p!\Gamma(\alpha+p+1)}.$$

② Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}a_nz^n$.

③ Montrer que si $a_02^\lambda\Gamma(\lambda+1)=1$ alors
$$\forall x>0,\quad y_\lambda(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$
puis donner un équivalent de la fonction y_λ au voisinage de 0.

③ On suppose que $2\lambda\notin\mathbb{N}$; si $p\in\mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)$ par $\dfrac{\Gamma(\alpha+p+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ si $\alpha\in$

$\mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.

① En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

② Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

PARTIE III

Dans cette partie, on va construire, dans les cas $\lambda = 0$ ou 1, une solution z_λ de l'équation différentielle (F_λ), définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui soit linéairement indépendante de la solution y_λ.

A- Étude de (F_0)

On rappelle que

$$\forall\, x > 0, \quad y_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$

Soit $\alpha > -1$; on définit la suite $\left(a_{2p}(\alpha)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $a_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$a_{2p}(\alpha)\left(\alpha+2p\right)^2 = a_{2(p-1)}(\alpha),\ p \geqslant 1 \qquad (1).$$

① ① Montrer que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$,

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2}.$$

② On voit bien que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, les fonctions a_{2p} sont dérivables en 0 ; on pose alors

$$b_p = \frac{da_{2p}}{d\alpha}(0) = a'_{2p}(0) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$,

$$b_p = -\frac{1}{(2^p p!)^2} H_p.$$

③ Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 1} b_p z^{2p}$.

② ① En utilisant la relation (1), montrer que , pour tout entier naturel $p \geqslant 1$,

$$(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) = b_{p-1},$$

avec la convention $b_0 = 0$.

② En déduire que la fonction $z_0 : x \longmapsto y_0(x)\ln x + \sum_{p=1}^{+\infty} b_p x^{2p}$ est une solution de l'équation différentielle (F_0) , définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

③ Vérifier que la famille (y_0, z_0), d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_0).

B- Étude de (F_1)

On rappelle que

$$\forall\, x > 0, \quad y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}.$$

Soit $\alpha \in]0, 2[$; on définit la suite $\left(c_{2p}(\alpha)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ par la donnée de

$c_0(\alpha) = 1$ et la relation
$$c_{2p}(\alpha)\big((\alpha+2p)^2-1\big) = c_{2(p-1)}(\alpha),\ p \geqslant 1 \qquad (2).$$

① ① Montrer que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$,
$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2-1}.$$

② On voit là aussi que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, les fonctions c_{2p} sont dérivables en 1 ; on pose alors
$$d_p = \frac{dc_{2p}}{d\alpha}(1) = c'_{2p}(1) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}.$$
Montrer que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$,
$$d_p = -\frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)!}\big(H_p + H_{p+1} - 1\big).$$

③ Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geqslant 1} d_p z^{2p}$.

② ① En utilisant la relation (2), montrer que , pour tout entier naturel $p \geqslant 1$,
$$\big((1+2p)^2-1\big)d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1},$$
avec la convention $d_0 = 0$.

② En déduire que la fonction $u_1 : x \longmapsto 2y_1(x)\ln x + \sum_{p=1}^{+\infty} d_p x^{2p+1}$ est une solution de l'équation différentielle
$$y'' + \frac{1}{x}y' - \Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)y = \frac{2}{x}, \qquad (E_1)$$
définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

③ ① Montrer que l'équation différentielle (E_1) possède une solution v_1, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, qui est de la forme $v_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n x^{n-1}$.

② Vérifier que la fonction $z_1 = v_1 - u_1$ est une solution de l'équation différentielle (F_1), définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

④ Vérifier que la famille (y_1, z_1), d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_1).

Fin Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Libre

Résolution d'une équation différentielle

Corrigé Pr. Taibi, CPGE Rabat

Partie I

1. L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ pour tout réel x .

   a. On a : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ si, et seulement $1-x<1$ soit $x>0$.

   b. On a aussi $t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}(\frac{1}{t^2})$, donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

2. L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(z-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0,+\infty[$, et que pour tout $t>0$, $\left|e^{-t}t^{z-1}\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}$, donc par la question 1°), l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si $\Re(z)>0$.

3. Quelques formules utiles :

   a. Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes C^1 sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z)>0$, on a : $\left|e^{-t}t^z\right| = e^{-t}t^{\Re(z)-1} \underset{t\mapsto+\infty}{\to} 0$. On applique alors une intégration par parties à l'intégrale $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt$:

   $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-z-1}dt = [-e^{-t}t^z]_{t=0}^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$ pour tout z tel que $\Re(z)>0$

   b. Pour tout $z \in C$ tel que $\Re(z)>0$ et tout $p \in N^*$, on a : $\Gamma(z+p) = \Gamma((z+p-1)+1) = (z-p-1)\Gamma(z-p-1)$. D'où : $\prod_{k=1}^{p}\Gamma(z+k) = \prod_{k=1}^{p}(z-k-1)\Gamma(z-k-1) = \prod_{k=1}^{p-1}(z-k)\prod_{k=1}^{p-1}\Gamma(z-k)$ et par suite :

   $$\Gamma(z+p) = \prod_{k=1}^{p-1}(z-k)\Gamma(z)$$

   On prend $z=\alpha+1$, on a : $\Re(z) = \Re(\alpha+1) = \Re(\alpha)+$

$1 > 0$ et par suite

$$\Gamma(\alpha+1+p) = \gamma(\alpha+1)\prod_{k=1}^{p-1}(\alpha+1+k) = \Gamma(\alpha+1)(\alpha+1)...(\alpha+p)$$

c. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive, donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt > 0$.

d. Par un simple calcul, on a $\Gamma(1) = 1$ et par $b)$ pour $\alpha = 0$, $p = n$, on a ::

$$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^{n} k = n!$$

4. Développement en série de Γ.

a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $\Gamma(z) = \int_{]0,1[} t^{z-1}e^{-t}dt + \int_{[1,+\infty[} t^{x-1}e^{-t}dt$

Ecrivons $e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n$, on a alors : $t^{z-1}e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$

Si l'on pose $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!}t^{z+n-1}$ pour $t \in]0,1]$, on a : f_n est intégrable sur $]0,1]$ pour tout entier naturel n et que $\int_{]0,1]}|f_n(t)|\,dt \leqslant \int_{]0,1]}\frac{1}{n!}dt = \frac{1}{n!}$ et puisque la série $\sum\frac{1}{n!}$ converge, il en résulte par le théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 t^{z+n-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

b. Posons $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ (fraction rationnelle en z)
pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f_n(z)| = \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+\Re(z)|}$ car $|n+\Re(z)| \leqslant |n+z|$, donc $\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$.
Soit K un compact inclu dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, et $\alpha = d(Z^-,K)$, on a $\alpha > 0$ car $\mathbb{Z}^-$ fermé et K compact. On a alors pour tout $z \in K$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $|n+z| = d(-n,z) \geqslant \alpha$, donc $|f_n(z)| \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{|n+z|} \leqslant \frac{1}{n!}\frac{1}{\alpha}$. Comme la série $\sum\frac{1}{n!}$ converge, il en résulte que $\sum f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, donc par le théorème de continuité la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$.

On peut aussi montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ en effet : Comme $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$ est un ouvert, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, il existe $r > 0$ tel $B(z_0,r) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}^-$, on prend alors le compact $K = \overline{B}(z_0,\alpha)$ et on termine comme avant .

5. Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

a. Si $t \in]0,1]$,, alors $\ln(t) \leqslant 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geqslant (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geqslant t^{b-1}$. Soit $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.
Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1}$ et par suite $\max(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.
Conclusion finale : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :
$$\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leqslant t^{a-1} + t^{b-1}.$$

b. Pour $t \in]0,1]$, on a d'après a) $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$
de même si $t > 1$, on a : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \max(t^{a-1}, t^{b-1})$
En conclusion : $0 < t^{x-1} \leqslant \max(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0,+\infty[$

c. La fonction $f : (x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$

L'application $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\dfrac{d}{dx}f(x,t) = \ln(t)f(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
De plus pour tout compact $K = [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x,t) \in K \times \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left|\dfrac{d}{dx}f(x,t)\right| \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}t^{x-1} \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leqslant |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ et que la fonction $\varphi : t \mapsto |\ln(t)|\, e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\sqrt{t}\varphi(t) = \sqrt{t}(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}|\ln(t)| \underset{t\to 0^+}{\to} 0$. Pour $t \geqslant 1$, $\varphi(t) \leqslant (t^{a-1} + t^{b-1})te^{-t} = (t^a + t^b)e^{-t}$.
Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et que
$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}f(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

d. On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc
$$\Gamma(x) \sim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

Partie II :

$$\lambda > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \qquad y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^{n+\alpha}$$

a. $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0,R[$ de l'équation (F_λ) .

L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur R_+^* et que $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]0,R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe C^∞ sur $]0,R[$ (produit de fonctions de classes C^∞).
Par calculs : $y'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha+n)a_n x^{\alpha+n-1}$

$$y''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha+n)(\alpha+n-1)a_n x^{\alpha+n-2}$$
Donc

y_α est solution sur $]0,R[$ de (F_λ) $\Leftrightarrow$ $\forall x\in]0,R[,\quad -(x^2+\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\alpha+n}$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha+n)a_nx^{\alpha+n}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha+n)(\alpha+n-1)a_nx^{\alpha+n}=0$$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\in]0,R[$

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_nx^{\alpha+n}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{\alpha+n}=0$$

$\Leftrightarrow$ $\forall x\in]0,R[$

$$\sum_{n=0}^{\infty}((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_nx^{n}-\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n}=0 \text{ car } x^\alpha\neq 0$$

:

On fait tendre x vers 0^+, obtenir $\alpha^2-\lambda^2=0$ car $a_0\neq 0$ et puis $((\alpha+1)^2-\lambda^2)a_1=0$ et une recurrence $((\alpha+n)^2-\lambda^{\,2})a_n=a_{n-2}$..

b. $\alpha=\lambda$, $a_0\neq 0$ et y_λ est solution sur $]0,R[$ de (F_λ) .

i. On a : $y_\lambda(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{\lambda+n}=x^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. On sait que (1) $((\lambda+n)^2-\lambda^2)a_n=a_{n-2}$ pour tout $n\geqslant 2$ Puisque . $(\lambda+1)^2-\lambda^2\neq 0$, on a $a_1=0$ et par la relation (1), on a : $a_{2p+1}=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$ .et $a_{2p}=\dfrac{1}{(\lambda+2p)^2-\lambda^2}a_{2(p-1)}$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$.

Donc $\prod_{k=1}^{p}a_{2k}=\prod_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}\prod_{k=1}^{p}a_{2(k-1)}=\prod_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}\prod_{k=0}^{p-1}a_{2k}$ soit : $a_{2p}=\prod_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}a_0$.

Mais $(\lambda+2k)^2-\lambda^2=4\lambda k+4k^2=4k(\lambda+k)$, d'où $\prod_{k=1}^{p}\dfrac{1}{(\lambda+2k)^2-\lambda^2}=\prod_{k=1}^{p}\dfrac{1}{4k(\lambda+k)}=\dfrac{1}{4^pp!}\prod_{k=1}^{p}\dfrac{1}{\lambda+k}=\dfrac{1}{2^{2p}p!}\dfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$.

En conclusion :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad a_{2p}=\frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$$

ii. Pour $x\neq 0$, on a : $\left|\dfrac{a_{2p}x^{2p}}{a_{2(p-1)}x^{2(p-1)}}\right|=\dfrac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}}x^2=\dfrac{1}{(\lambda+2p)^2+\lambda^2}x^2\underset{p\to+\infty}{\to}0$, donc le rayon de convergence R est infini .

iii. On suppose $a_02^\lambda\Gamma(\lambda+1)=1$.

On a : $\forall x>0,\quad y_\lambda(x)$

$$=\sum_{p=0}^{+\infty}a_{2p}x^{2p+\lambda}$$
$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_0}{2^{2p}p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}x^{2p+\lambda}$$
$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{a_0}{p!}\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p+\lambda}2^\lambda$$
$$=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p+\lambda} \text{ car}$$

Equivalent au voisinage de 0 :

D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)}(\frac{x}{2})^{2p}\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Donc
$$y_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}(\frac{x}{2})^\lambda$$

c. On suppose ici que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

i. D'après la question 1 et 2) la fonction $y_{-\lambda}$ est aussi solution sur R_+^* de (F$_\lambda$) .

ii. Montrons $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur R_+^* de (F_λ) .
Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} = 0$.
Comme $y_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}(\frac{x}{2})^\lambda$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}(\frac{x}{2})^{-\lambda}$, on a : $y_\lambda(x) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x\to 0^+}{\to} +\infty$, donc si l'on suppose $\alpha \neq 0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.
On conclut que $\alpha = 0$ et puis $\beta = 0$, donc les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes .
(F_λ) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : ($y_\lambda, y_{-\lambda}$) est un système fondamental de solutions de (F_λ) et que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_λ) est de la forme :
$$y = \alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} \quad où \quad \alpha,\beta\in R$$

Partie III.

A- Etude de (F_0) :

Pour $x>0$, on a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2^p p!)^2}x^{2p}$.

a. .

i. Pour tout entier $k \geq 1$: $\prod_{k=1}^{p} a_{2k}(\alpha) = \prod_{k1}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2}\prod_{k=1}^{p}a_{2(k-1)}$, donc $a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2}a_0(\alpha)$.
Or $a_0(\alpha)=1$, d'où la formule cherchée :
$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2} \text{ pour tout } p\geq 1.$$

ii. D'après les notations de l'enoncé, pour tout $p\in N^*$, on a : $a_{2p}(\alpha) = \exp(\sum_{k=1}^{p}\ln(\frac{1}{(\alpha+2k)^2})) = \exp(-2\sum_{k=1}^{p}\ln(\alpha+2k))$, donc : $a'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^{p}\frac{2}{\alpha+2k}a_{2p}(\alpha)$ et puis
$$a'_{2p}(0) = -2\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{2k}a_{2p}(0) = -\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}a_{2p}(0) = -H_p.a_{2p}(0)$$
Or $a_{2p}(0) = \prod_{k=1}^{p}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2^{2p}(p!)^2} = \left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2$,

donc :

$$b_p = a'_{2p}(0) = -\left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2 H_p$$

iii. Calcul du rayon de convergence R_b :

On a $b_p \underset{p\to\infty}{\sim} -\frac{1}{(2^p p!)^2}\ln(p) = o(\frac{1}{2^p p!})$ car $H_p \sim \ln(p)$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum b_p x^p$ est infini :

$$R_b = +\infty$$

b. .

i. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\begin{aligned}(2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) &= -(2p)^2 a_{2p}(0) + 4pa_p(0)\\ &= a_{2p}(0)\left(-(2p)^2 H_p + 4p\right)\end{aligned}$

.

Mais $(2p)^2 a_{2p}(0) = a_{2(p-1)}(0)$, donc :

$$\begin{aligned}(2p)^2 b_p + 4pa_{2p}(0) &= -a_{2p}(0)H_p + 4pa_{2p}(0)\\ &= -a_{2(p-1)}(0)H_{p-1}\underbrace{-\frac{1}{p}a_{2(p-1)}(0) + 4pa_{2p}(0)}_{=0}\\ &= b_{p-1}\end{aligned}$$

D'où le résultat demandé .

ii. L'application $x \mapsto y_0(x)\ln(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (Opérations), donc z_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$z_0(x) = y_0(x)\ln(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p}$$

$$z'_0(x) = \frac{1}{x}y_0(x) + \ln(x).y'_0(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p b_p x^{2p-1}$$

$$z''_0(x) = -\frac{1}{x^2}y_0(x) + \frac{2}{x}y'_0(x) + \ln(x).y''_0(x) + 2\sum_{p=1}^{\infty} p(2p-1)b_p x^{2p-2}$$

Donc $x^2 z''_0(x) + xz'_0(x) - (x^2+0)z_0(x) = -y_0(x) + 2xy$

$+y_0(x) + \mathrm{l}$

$-x^2\ln($

En tenant compte du fait que y_0 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) et de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}x^2 z''_0(x) + xz'_0(x) - (x^2+0)z_0(x) &= 2xy'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p(2p\\ &= \sum_{p=1}^{\infty} 4pa_{2p}(0)x^{2p} + \underbrace{\sum_{p}}_{\sum_{p=1}^{\infty} b_{p-1}x^2}\end{aligned}$$

car xy

$$= b_0 x^2 = 0$$

Ce qui permet de conclure .

c. Comme $y_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(0+1)}(\frac{x}{2})^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x) = -\infty$, on a :

$z_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x)$.
ceci permet de prouver (comme à la question II 3.b) que les solutions y_0 et z_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) sont linéairement indépendantes .et avec les mêmes raisons que dans $III.3b)$, toute solution de (F_0) est de la forme :
$y = \alpha y_0 + \beta z_0$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires .

B- Etude de (F_1) :

a. .

i. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $c_{2p}(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha+2p)^2-1}c_{2(p-1)}$, donc $\prod_{k=1}^{p} c_{2k}(\alpha) = \prod_{k=}^{p}\dfrac{1}{(\alpha+2k)^2-1}\prod_{k=1}^{p}c_{2(k-1)}$ et par suite $c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=}^{p}\dfrac{1}{(\alpha+2k)^2-1}c_0(\alpha)$.
et comme $c_0(\alpha)=1$, on déduite que :
$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2-1}$$

ii. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $d_p = \dfrac{d}{d\alpha}c_{2p}(1)$. Comme $c_{2p}(\alpha) = \exp(-\sum_{k=1}^{p}\ln((\alpha+2k)^2-1)$, on a : $c'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^{p}\dfrac{2(\alpha+2k)}{(\alpha+2k)^2-1}c_{2p}(\alpha)$. D'où
$$d_p = -\sum_{k=1}^{p}\frac{2(1+2k)}{(1+2k)^2-1}\prod_{k=}^{p}\frac{1}{(\alpha+2k)^2-1} = -\sum_{k=1}^{p}\frac{2(1+2k)}{4k(1+k)}\prod_{k=}^{p}\frac{1}{(1+2k)^2-1}.$$
Or $\prod_{k=}^{p}\dfrac{1}{(1+2k)^2-1} = \prod_{k=}^{p}\dfrac{1}{4k(1+k)} = \dfrac{1}{2^{2p}}\prod_{k=}^{p}\dfrac{1}{k(1+k)} = \dfrac{1}{2^{2p}}$

$\dfrac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k}$
,
donc $\sum_{k=1}^{p}\dfrac{2(1+2k)}{4k(k+1)} = \dfrac{1}{2}(H_p + H_{p+1} - 1)$. D'où le résultat demandé :
$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)}(H_p + H_{p+1} - 1)$$

iii. On a :
$d_p = \dfrac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)}(H_p + H_{p+1} - 1) = \dfrac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)!}(2H_p + \dfrac{1}{p+1} - 1) \underset{p\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^{2p}}\dfrac{1}{p!(p+1)!}\ln(p)$,
donc le rayon de convergence demandé :
$$R_d = +\infty$$

b. .

i. On a : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\left((1+2p)^2-1\right)d_p + 2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$. En effet :
par dérivation de l'identité $c_{2p}(\alpha)\left((1+2p)^2-1\right) = c_{2(p-1)}(\alpha)$, on a : $c'_{2p}(\alpha)\left((\alpha+2p)^2-1\right) + 2(\alpha +$

$2p)c_{2p}(\alpha) = c'_{2(p-1)}(\alpha)$
Pour $\alpha = 1$, on a :

$$d_p((1+2p)^2-1)+2(1+2p)c_{2p}(1) = d_{p-1}$$

ii. Il est clair que les fonctions y_1 et $x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{2p+1}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation on obtient pout tout $x>0$:

$$\begin{aligned} x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x) &= x^2\left(2y_1'(x)\ln(x)+\frac{4}{x}y_1'(x)-\frac{2}{x^2}y_1(x)+\sum_{p=1}^{\infty}2p(2p+1)d_px^{2p-1}\right)\\ &+x\left(2y_1'(x)\ln(x)+\frac{2}{x}y_1(x)+\sum_{p=1}^{\infty}(2p+1)d_px^{2p}\right)\\ &-(1+x^2)\left(2y_1(x)\ln(x)+\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2p+1}\right)\\ &= 2\ln(x)\left(x^2y_1''(x)+xy_1'(x)-(1+x^2)y_1(x)\right)+4xy_1'(x)\\ &+\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2d_px^{2p+1}-(1+x^2)\sum_{p=0}^{\infty}d_px^{2p+1} \end{aligned}$$

Comme y_1 est xsolution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), on a : $x^2y_1''(x)+xy_1'(x)-(1+x^2)y_1(x) = 0$ et donc

$$\begin{aligned} x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x) &= 4xy_1'(x)+\sum_{p=0}^{\infty}(2p \ldots\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\frac{4(2p+1)}{p!(p+1)!2^{2p+1}}\ldots\\ &\quad -\sum_{p=0}^{\infty} \ldots\\ &= \sum_{p=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}}}_{=c_{2p}(1)}\ldots\\ &\quad +\sum_{p=0}^{\infty}(2p+1)^2\ldots\\ &= \sum_{p=1}^{\infty}\left(2(2p+1)c_{2p}(\ldots\right.\\ &= 2x \end{aligned}$$

On déduit alors que u_1 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1).

c. 1. On pose $u_1(x) = \frac{e_0}{x}+\sum_{p=1}^{\infty}e_px^{p-1}$ avec $R = Rcv\left(\sum e_px^p\right) > 0$.
Sur $]0,R[$, on a : $x^2u_1''(x)+xu_1'(x)-(1+x^2)u_1(x)-2x = x^2\left(\frac{2e_0}{x^3}+\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)(p-2)e_px^{p-2}\right)+$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

$x\left(\dfrac{-e_0}{x^2}+\sum_{p=1}^{\infty}(p-1)e_px^{p-2}\right)-2x=\sum_{p=0}^{\infty}(p(p-1)e_p-e_{p-2})x^{p-1}-(e_0+2)x-e_1=0.$ comme dans la question ...., on déduit : $\begin{cases} e_0=-2 \\ e_1=0 \\ \forall p\geqslant 3,\ p(p-2)e_p-e_{p-1}=0\end{cases}$, ce qui permet de conclure par une récurrence que : $\forall p\in N$, $e_{2p+1}=0$ et $e_{2p}=\dfrac{e_0}{2^{2p}p!(p+1)!=-2c_{2p}(1)}$ car $e_0=-2$ et par suite R est infini et que u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1).

ii. (F_1) est une équation différentielle linéaire sans second membre associée à (E_1) et comme z_1 et u_1 sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1), il en résulte que z_1-u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) .

d. Comme dans la question....., en étudiant le comportement des solutions z_1 et y_1 au voisinage de 0^+, on déduit que (y_1,z_1) est système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1), donc toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) est de la forme : $y:x\mapsto \alpha y_1(x)+\beta z_1(x)$ où α et β sont des constantes réelles arbitraires .

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Phénomène de Gibbs (CCP 2008, PC)

5 FÉVRIER 2013

Soit f la fonction 2π-périodique et impaire définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]0,\pi[, \quad f(x) = \pi/4 \\ f(0) = 0 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

1) Tracer le graphe de f sur deux périodes.

2) Déterminer la série de Fourier de f exprimée à l'aide des coefficients de Fourier trigonométriques de f.

3) Etudier la convergence de la série de Fourier de f sur $\mathbf{R}$. Lorsque cela est possible, donner la valeur de la somme de cette série.

4) **4a.** Soient $x \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)x] = \frac{\sin(2nx)}{2\sin x}$.

Indication : on pourra calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix}$ *en faisant apparaÓtre une suite géométrique.*

4b. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on définit la fonction g_n par : $\forall t \in]0,\pi[, \quad g_n(t) = \dfrac{\sin(2nt)}{2\sin t}$.

Quelle est la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$, où $x \in]0,\pi[$?

4c. Déterminer les zéros de g_n sur $]0,\pi[$.

5) Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on considère S_{n-1} la somme partielle de la série de Fourier de f au rang $N = n-1$.

5a. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R},\ S_{n-1}(\pi - x) = S_{n-1}(x)$.

5b. Justifier que l'étude de la fonction S_{n-1} peut être réduite à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

5c. Calculer $S'_{n-1}(x)$ et en déduire :

$$\forall x \in [0,\pi[,\ S_{n-1}(x) = \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$$

5d. Pour $k \in [\![0,n]\!]$ on définit $x_k = \dfrac{k\pi}{2n}$, et pour $k \in [\![1,n]\!]$ $I_k = \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ I_k = (-1)^{k-1}|I_k|$$

5e. En utilisant le changement de variable $u = t - x_{k-1}$ dans le calcul de I_k, montrer que :

$$\forall k \in [\![1,n-1]\!],\ |I_{k+1}| \leqslant |I_k|$$

5f. Déduire des questions **5c** à **5e** que le maximum M_n de S_{n-1} sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ est

$$M_n = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{2\sin t}\mathrm{d}t$$

6) On va déterminer dans cette question $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.

6a. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $M_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{4n\sin(\frac{t}{2n})}\mathrm{d}t$.

6b. On pose φ définie sur $[0,\pi]$ par $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que φ est bornée sur $[0,\pi]$. On notera K un majorant de φ sur cet intervalle.

6c. On pose ψ définie sur $]0,\pi[$ par $\psi(x) = \dfrac{x}{\sin x} - 1$. Montrer que ψ est monotone sur $]0,\pi[$.

6d. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\left|M_n - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{2}\int_0^{\pi}\left|\frac{t/(2n)}{\sin[t/(2n)]} - 1\right|\mathrm{d}t$$

6e. Soit $a \in]0,\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que :

$$\left|M_n - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{K}{2}\Big(a + (\pi - a)\psi(\frac{\pi}{2n})\Big)$$

6f. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$$

7) A l'aide du développement en série entière de la fonction sin, donner une expression de $M = \lim\limits_{n\to+\infty} M_n$ comme somme d'une série numérique alternée.

8) Montrer que $M = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi^3}{36} + \dfrac{\pi^5}{1200} + R$ avec $|R| \leqslant 0,1$.

9) Etablir le résultat suivant connu sous le nom de *Phénomène de Gibbs* : la limite, quand n tend vers $+\infty$, du maximum de la somme partielle au rang n de la série de Fourier de f, est strictement supérieure au maximum de la fonction f.

Fin

Á la prochaine

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

Eq. diff et séries entière (CCP 2008, PC)

5 FÉVRIER 2013

Blague du jour

✒ Que signifie le sigle B.U.S.H ?
-Réponse : Bombarder Uniquement Saddam Hussein ....
✒ Les Irakiens sont dans la rue et crient : A bas Clinton, à bas Clinton !
Un autre Irakien intervient et dit aux manifestants : Ce n'est plus Clinton le président, c'est Bush.
Les manifestants répondent : Mais ça n'a aucun sens ! On ne va tout de même pas crier "A babouche ! A babouche !"

La famille des Riccati

Mathématicien du jour

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati.

Etude et résolution d'une équation différentielle à l'aide de séries entières

Dans cet exercice, on appelle solution d'une équation différentielle sur un intervalle I toute fonction deux fois dérivable sur I, solution de cette équation sur I.

10) Rappeler les développements en séries entières des fonctions exp, ch et sh. On précisera pour chaque série entière le rayon de convergence qui lui est associé.

11) Soit l'équation différentielle (H) :

$$(H)\quad x^2y'' - 2xy' + (2-x^2)y = 0$$

On cherche une solution de (H) sous la forme

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

On note R le rayon de convergence de cette série entière.

11a. On suppose que $R > 0$ et que y est solution de (H) sur $]-R, R[$. Etablir des relations de récurrence portant sur les coefficients a_n, et donner la valeur de a_0.

11b. On suppose que les relations établies en **2a** sont satisfaites. Montrer alors que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est combinaison linéaire de deux séries entières (indépendantes des a_n) que l'on précisera.

11c. Pour chacune des deux séries entières mises en évidence en **2b**, déterminer le rayon de convergence et l'expression de la somme.

11d. En déduire que y est effectivement solution de (H). Donner son rayon de convergence R, et l'expression de sa somme sur $]-R, R[$.

12) On pose $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$.

12a. Vérifier que la fonction $y_1 : x \mapsto x\text{ch}(x)$ est solution de (H) sur I_1 et I_2.

12b. Résoudre (H) sur I_1 et I_2 en utilisant la méthode de Lagrange.

12c. Existe-t-il des solutions de (H) sur $\mathbf{R}$?

13) Soit l'équation différentielle (E) :

$$(E) \quad x^2y'' - 2xy' + (2 - x^2)y = x^3 + x^4$$

13a. Résoudre (E) sur I_1 et I_2 en utilisant la méthode de la variation des deux constantes.

13b. Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbf{R}$.

13c. Montrer que toute solution de (E) sur $\mathbf{R}$ est développable en série entière, et préciser les coefficients de cette série entière et son rayon de convergence.

Fin
Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

mamouni.myismail@gmail.com

.

Former pour réussir

.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

.

mamouni.myismail@gmail.com

.

✉ : *mamouni.myismail@gmail.com*