April 2011

Agreg

Doct

Sc.Educ

Mamouni My Ismail
Professeur Agrégé-Docteur
CPGE My Youssef, Rabat, Maroc
mamouni.myismail@gmail.com
mamouni.new.fr

Mines-Centrales

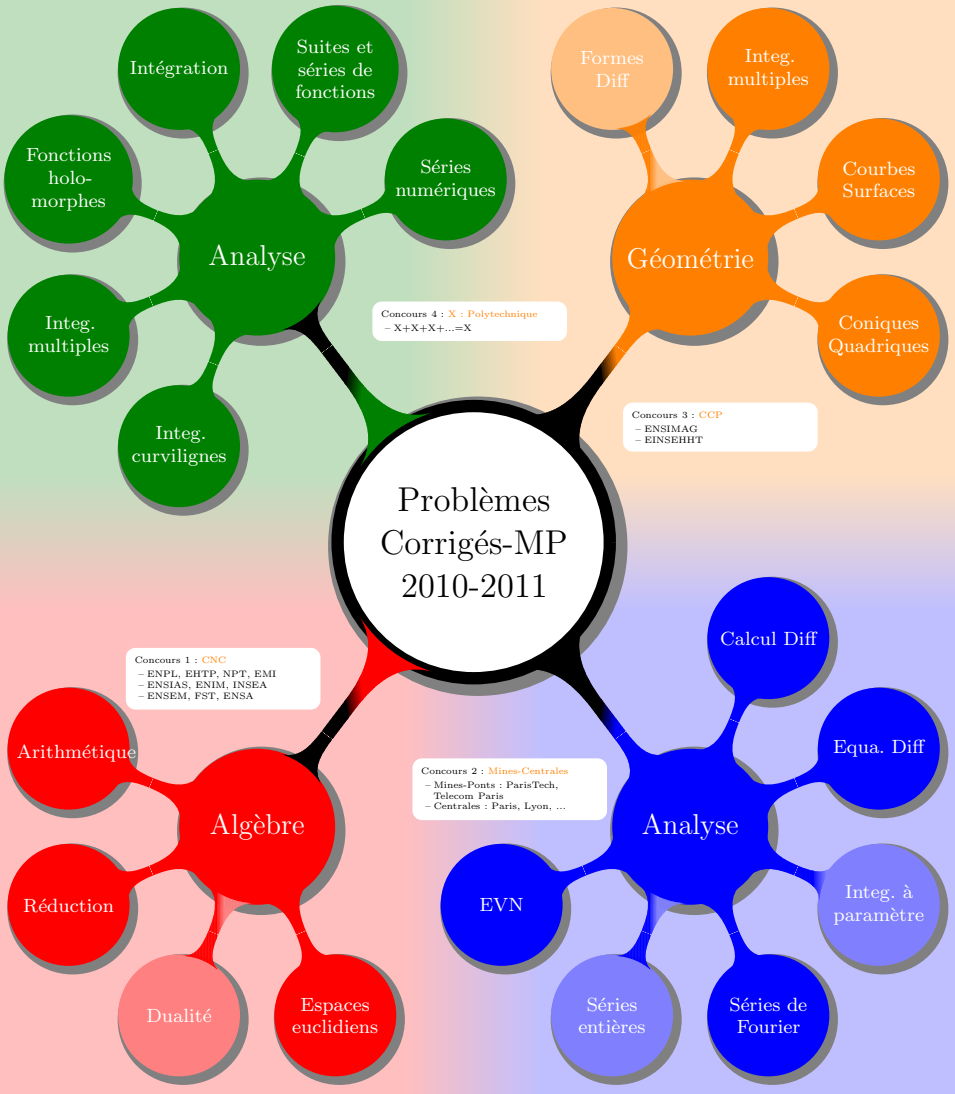
May 2011

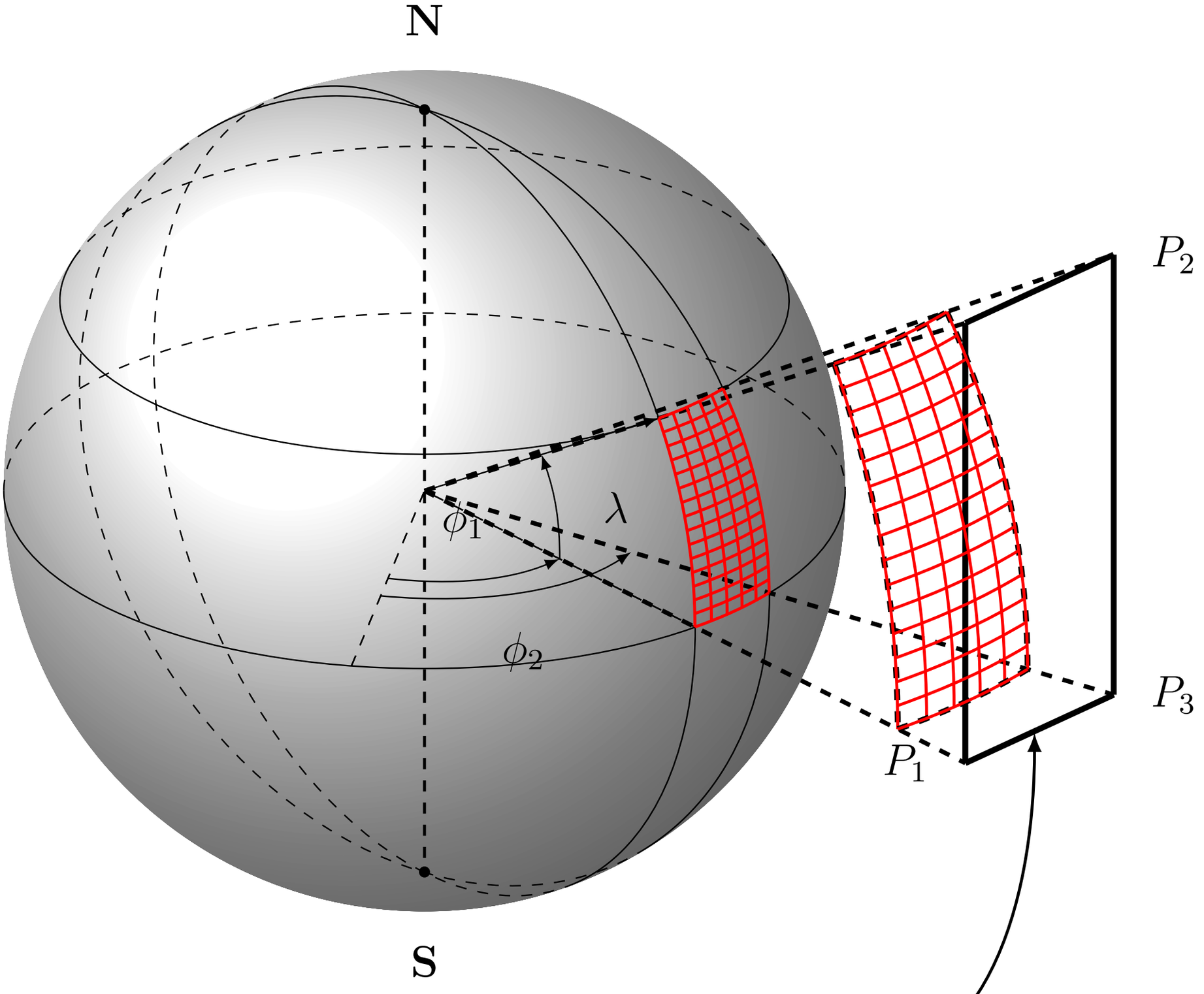
CCP

X : Polytechnique

CNC

June 2011





repris par Mamouni

© Marco Miani

Sommaire

1 Devoir libre 1 : Algèbre linéaire (révision programme de sup) Page 8
- Corrigé Pr. Chéno Page 13

2 Contrôle 1 : Algèbre linéaire (révision programme de sup) Page 17
- Corrigé Pr. Devulder Page 20

3 Devoir libre 2 : Arithmétique, fonctions multiplicatives Page 26

4 Devoir libre 2 bis : Arithmétique, polynôme minimal et caractéristique Page 28
- Corrigé Page 32

5 Devoir libre 3 : Déterminants par blocs (e3a PSI, 2010) Page 35
- Corrigé Pr. Devulder Page 37

6 Devoir libre 4 : Réduction, crochet de Lie (extraits de concours) Page 40

7 Diagonalisation sur des exemples (Banque PT, 2008) Page 42

8 Devoir libre 5 : Exponentielle d'une matrice (CCP 2010, MP) Page 46
- Corrigé Pr Dufait Page 50

9 Contrôle 2 : Racine d'un endomorphisme (CCP 201, PC) Page 54
- Corrigé Pr Blache Page 57

10 Devoir libre 7 : Trace et dualité (Pr. Taibi) Page 59

11 Devoir surveillé 1 : Réduction-Dualité Page 63
- Dualité : exercice sur la transposée et lemme de Shur
- Réduction : problème matrices à diagonale propre (CCP 2008, MP)
- Corrigé Dualité : (Pr. Mamouni) Page 67
- Corrigé Réduction : (Pr. Baudin) Page 68

12 Devoir libre 8 : Espaces vectoriels normés (CNC 2001, MP) Page 74
- Corrigé Pr. Mamouni Page 76

13 Devoir surveillé 2 : Isométries des espaces vectoriels normés, (CCP 2007, MP) Page 78
- Corrigé Pr. Legros Page 84

13 Devoir libre 9 : Espaces vectoriels normés, problèmes de points fixes Page 90

14 Devoir surveillé 3 : Espaces vectoriels normés (Mines 2006, MP) Page 92
- Matrices stochastiques et théorème de Perron-Frobenuis
- Application à PageRank de Google (ESSEC 2008) Page 96
- Corrigé Pr. Taibi Page 102

15 Devoir libre 10 : Calcul différentiel Page 109
- Résolution d'une EDP avec changement de variables
- Corrigé Pr. Mamouni Page 111

16 Devoir libre 11 : Calcul différentiel Page 113
- .Extrémas liés et multiplicateurs de Lagrange
- Application : Distance d'un point à une sous-espace affine
- Application : Le quotient de Rayleigh
- Corrigé Pr. Mamouni Page 116

17 Devoir libre 12 : Espaces vectoriels euclidiens Page 127

☞ Calcul numérique : QR, Gram-Shmidt, Givens, Householder, moindres carrés

18 Devoir libre 13 : Espaces vectoriels euclidiens Page 131

☞ Calcul numérique : Méthode LU et applications (Banque PT-2006)

✍ Corrigé Pr. Chéno Page 135

19 Devoir surveillé 4 : Espaces vectoriels euclidiens, calcul différentiel Page 139

☞ Problème 1 (MINES-PONTS 2003, MP) : méthodes du gradient, du Lagrangien

☞ Problème 2 (X 2010, MP) : Extrémas liés et applications

✍ Corrigé Pr. Doué (problème 1) Page 145

✍ Corrigé Pr. Boujaida (problème 2) Page 148

20 Devoir surveillé 4-Bis : Espaces vectoriels euclidiens, calcul différentiel Page 151

☞ Problème 1 (CCP 2003, MP) : Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de matrices, décomposition polaire

☞ Problème 2 (CNC 2003, TSI) : Sur l'équation des cordes vibrantes

☞ Exercice (e3a 2007, MP) : Étude d'extremum sur un exemple

✍ Corrigé Problème 1 : Pr. Legros Page 157

✍ Corrigé Exercice : Pr. Deyris Page 160

21 Devoir libre 14 : Coniques-Quadriques Page 154

☞ Banque PT, 2009 : Étude d'une conique en coordonnées polaires

✍ Corrigé Pr. Chéno Page 158

22 Devoir Libre 16 : Intégration Page 165

☞ CNC 2006, MP : Étude d'intégrabilité et calcul d'intégrales

✍ Corrigé Pr. Mamouni Page 169

23 Devoir Libre 17 : Séries numériques Page 177

☞ e3a 2009, PSI : Régle de Raabe-Duhamel et applications

✍ Corrigé Pr. Devulder Page 179

24 Devoir Libre 18 : Séries numériques Page 185

☞ Centrale 2009, PSI : Réorganisation des termes d'une série

✍ Corrigé Pr. Devulder Page 189

25 Devoir Libre 19 : Suites et séries de fonctions Page 198

☞ Problème 1 : Premier théorème de Stone-Weierstrass et polynômes de Bernstein

☞ Problème 2 (CCP 2004) : Deuxième théorème de Stone-Weierstrass et noyau de Féjer

26 Devoir Libre 20 : Suites et séries de fonctions Page 200

☞ Fonctions êta et dzêta de Riemann

27 Devoir Surveillé 5 : Coniques-quadriques, Séries numériques, Intégration, Suites et séries de fonctions Page 202

☞ Problème 1 (CCP 2009, PSI) : Calcul de l'intégrale de Dirichlet

☞ Problème 2 (CNC 99, MP) : Fonctions dzêta et Gamma

☞ Problème 3 (CCP 2008, MP) : Fonction êta

☞ Exercice (e3a 2009, MP) : Etude d'une quadrique

✍ Corrigé Problème 1 : Pr Devulder Page 209

✍ Corrigé Problème 2 : Pr Kanber Page 213

✍ Corrigé Problème 3 : Pr Patte Page 217
✍ Corrigé Exercice : Pr Gayout Page 220

28 Devoir Libre 21 : Courbes & Surfaces Page 222
☞ cnc 2007, PSI : Étude d'une cardioïde et sa développée
✍ Corrigé Pr. Chabchi Page 224

28 Devoir Libre 22 : Courbes & Surfaces Page 228
☞ CCP 2009, TSI : Courbes en coordonnés polaires et surfaces en coordonnées cartésiennes
✍ Corrigé Pr. Bergeron Page 232

29 Devoir Libre 23 : Séries entières Page 239
☞ Problème 1 (e3a 2004, MP) : DSE et équations différentielles
☞ Problème 2 (CNC 2007, PSI) : la Fonction Gamma
✍ Corrigé Problème 1 : Pr. Dufait Page 243
✍ Corrigé Problème 2 : Pr. Chabchi Page 245

30 Devoir Libre 24 : Séries entières Page 248
☞ Théorème de Stone-Weierstrass, Polynômes de Lebesgue
✍ Corrigé Pr. Bouchikhi Page 250

31 Devoir Libre 25 : Séries de Fourier Page 253
☞ CCP 2004, MP : Fonctions à variations bornées
✍ Corrigé Pr. Taibi Page 257

31 Devoir Libre 26 : Séries de Fourier Page 264
☞ CCP 2010, MP : Phénomène de Gibbs
✍ Corrigé Pr. Boujaida Page 268

32 Devoir Libre 27 : Intégrales à paramètre Page 275
☞ e3a 2005, MP : Exemple d'application au calcul d'intégrales simples
✍ Corrigé Pr. Patte Page 279

33 Devoir Surveillé 6 : Séries entières, de Fourier, Intégrales à paramètre Page 285
☞ Problème 1 (CCP 2003, PC) : Séries de Fourier et la fonction Gamma
☞ Exercice 1 (cnc 89, MP) : Étude d'un cylindre
☞ Exercice 2 (e3a 2006, MP) : Séries entières à coefficients équivalents
✍ Corrigé Problème 1 : Pr. Crépy Page 289
✍ Corrigé Exercice 1 : Pr. Sadiki Page 295
✍ Corrigé Exercice 2 : Page Pr. Girard

34 Devoir Libre 28 : Équations différentielles Page 299
☞ CNC 2000, MP : Un exemple de transformée
✍ Corrigé Pr. Deruelle Page 303

35 Devoir Libre 29 : Équations différentielles Page 310
☞ Exemples d'étude qualitative : Pr. Michel Quercia

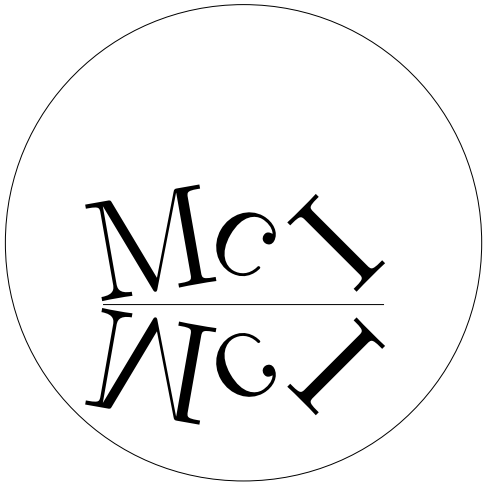
36 Devoir Libre 30 : Formes différentielles & Intégrales multiples Page 313
☞ e3a 2009, PSI : Formule de Green-Riemann et Intégrale de Dirichlet
✍ Corrigé Pr. Devulder Page 317

Remerciements

Ce résultat est le fruit d'une longue année de travail, il comporte 30 devoirs libres, 6 devoirs surveillés et 2 contrôles corrigés. L'auteur tient à adresser ses vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, surtout aux collègues marocains et français qui ont mis à la disposition de la communauté leurs corrigés. L'auteur tient aussi à remercier toute autre personne, qui par des actes simples et spontanés a donné du souffle à ce travail.

L'auteur ne saurait pas comment remercier Pr. Boujaida Sadik des CPGE My Youssef pour son initiation au package Tikz de Latex. L'artiste, comme on l'aime surnommer, était toujours disponible à apporter des idées de conception, tous les codes sources tikz (à 90%) utilisés ici sont des copier-coller des ses propres idées. Sans bien sûr oublier de remercier tous les volontaires tikz qui mettent à la disponibilité de la communauté latex, leurs sources sur les sites http ://www.altermundus.com/ et http ://www.texample.net/tikz/ et enfin le concepteur du package Tikz, le célèbre Till Tantau.

Enfin, tout ce que je pourrai dire ne pourrai pas remercier assez ma femme, Ouichou Lamya. En supportant de lourdes tâches quotidiennes, elle m'a épargné pour que je me consacre à ce travail entre autres. Comment aussi oublier mes deux enfants, Wassim et Naim ; les courts moments de bonheur et de joie qu'on passe ensemble sont toujours assez suffisants pour me donner du plaisir, courage et forces à travailler encore plus.



بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ

عَمَلَكُم وَرَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Mamouni My Ismail

Devoir libre

Algèbre Linéaire

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Pourquoi les vaches ne parlent pas ? - C'est marqué la ferme.
- Deux vaches discutent dans un pré :

La première : Dis, ça t'inquiète pas, ces histoires de vaches folles dont on parle en ce moment ?
La deuxième : Non, moi, je m'en fou, je suis un lapin.

Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. En 1884, il entra premier l'école normale supérieure. Il enseigna au lycée Saint-Louis, puis l'École Polytechnique, puis l'École Centrale de Paris.
Son résultat le plus célèbre est le fameux théorème des nombres premiers, qui dit que $\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}$ où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs x. Il a laissé son nom aux matrices de Hadamard utilisés en algorithmes quantiques, traitement du signal, compression de donnes, ...

Mathématicien du jour

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre (par Pr Cheno)

Algèbre Linéaire

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un polytechnicien tombe sur un troupeau de moutons menés par un berger et son chien. Il attend un long temps mais le troupeau est interminable. Et finalement, fier de lui, propose un pari au berger pour passer le temps : "Si je vous dis combien vous avez de moutons, m'en donnez-vous un ?" Le berger : "Ben, si vous l'voulez !" L'X prend sa calculatrice... compute et donne le bon nombre de moutons . Le berger étonné lui accorde d'en prendre un, lui propose un pari : "Si j'vous dis votre formation, vous m'rendez mon mouton ?". L'X est surpris, mais accepte. "Ben j'crois qu'vous tes polytechnicien !" L'X époustouflé lui demande comment il a fait. "Ben, c'est simple, seul un polytechnicien pouvait prendre mon chien pour un mouton".

La Famille Bernoulli

Mathématicien du jour

Les Bernoulli qui se sont illustrés dans les mathématiques et la physique, sont issus de Nicolas Bernoulli (1623-1708), descendant d'une famille ayant migré de Belgique en Suisse la fin du XVIe sicle. Les plus connus de cette famille sont : Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748), tous deux fils de Nicolas, et Daniel (1700-1782), son petit-fils.

- Jacques posa les principes du calcul des probabilités et introduit les nombres de Bernoulli.
- Jean bien que formé par son frère Jacques, en devient un rival acharné, il était professeur d'Euler et ami de L'Hôpital.
- Daniel était un médecin, physicien et mathématicien, ami d'Euler et de D'Alembert.

.

Mamouni My Ismail

Contrôle
Algèbre Linéaire

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un homme qui regarde un match de foot dans un café, son chien est assis à ses côtés. Lorsque l'équipe nationale marque un but, le chien se met à courir dans tout les sens en sautant sur les tables !
Le voisin demande à l'homme : Qu'est ce qui lui arrive votre chien ?
- Il est supporter de l'équipe nationale, il est content.
- Ben dites donc, juste pour un but ! Et qu'est-ce-qu'il fait quand elle gagne un match ?!!
- Je ne sais pas, je ne l'ai que depuis 5 ans...

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894)

Mathématicien russe, connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. Tchebychev appartient à l'école mathématique russe fondée par Daniel Bernoulli et Euler. Il démontra en 1850 une conjecture énoncée par Bertrand : Pour tout entier n au moins égal à 2, il existe un nombre premier entre n et $2n$.

Mathématicien du jour

Source : e3a-PSI. Épreuve A, 2007
durée : 2 heures
calculatrices interdites

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.
La matrice unité de cet espace sera noéte $\mathbf{I}_n$ et la matrice nulle $\mathbf{O}_n$.
L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.
Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :
– v^0 est l'endomorphisme unité,
– $\forall m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v \circ v^m$.
L'endomorphisme v sera dit nilpotent s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).
Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$J(\lambda) = (u_{i,j}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ u_{i,i} = \lambda \\ u_{i,j} = 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$$

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on rappelle que

$$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Pour $M \in M_n(\mathbb{C})$, soit $\alpha(M)$ la matrice :

$$\alpha(M) = \lim_{m\to+\infty} S_m \quad \text{avec} \quad S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{M^k}{k!}$$

On rappelle que pour calculer cette limite, il suffit de calculer la limite de chacun des termes de la matrice S_m. On admettra et on utilisera sans le démontrer que cette matrice existe toujours et que si A et B sont deux matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, alors $\alpha(A+B) = \alpha(A)\alpha(B)$.

1 Quelques calculs préliminaire.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Montrer que $A + I_3$ et $A - 2I_3$ sont non inversibles.
2. Vérifier que $\ker(A+I_3)^2 \oplus \ker(A-2I_3) = \mathbb{C}^3$.
3. En déduire que la matrice A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.
2.
   2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n-1$, puis pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$.
   2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.
3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.
4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.
5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

3 Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de
$$r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$
3. Montrer que :
   (i) $\forall m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$,
   (ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$,
   (iii) $\forall m \geq r,\ \ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

4 Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, de rang $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.
   1.1. Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.
   1.2. Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.
   1.3. Vérifier alors que l'on a
   $$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$
   1.4. En déduire
   $$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) \leq i$$
   1.5. Démontrer qu'en fait $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \dim(\ker(v^i)) = i$.
2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq 0$.
3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que
   $$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \dots, v^{n-1}(e))$$
   soit une base de E.
4. Ecrire la matrice de v dans cette base. Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.
5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

5 Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$, d'inconnue $X \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que : $\forall M \in M_n(\mathbb{C}),\ \forall P \in GL_n(\mathbb{C})$,
   $$P^{-1}\alpha(M)P = \alpha(P^{-1}MP)$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :
   $$e^z = i,\ e^z = -1,\ e^z = -3 - 4i$$
3. Plus généralement, soit $\mu \in \mathbb{C}$. Déterminer, lorsque cela est possible, tous les nombres complexes $z = x+iy \in \mathbb{C}$ tels que $e^z = \mu$.
4. On prend alors $\mu \neq 0$ et on note s un des nombres complexes tel que $e^s = \mu$.
   4.1. Déterminer $\alpha(sI_n)$.
   4.2. On écrit alors $J(s)$ sous la forme : $J(s) = sI_n + J(0)$. Exprimer $\alpha(J(s))$ à l'aide de $\alpha(J(0))$ et de μ.
   4.3. Vérifier que la matrice $\mu(\alpha(J(0)) - I_n)$ est nilpotente de rang $n-1$.
   4.4. En déduire qu'il existe une matrice inversible $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que :
   $$Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(\mu)$$
5. Donner alors dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation proposée $\alpha(X) = J(\mu)$.
6. En déduire dans $M_n(\mathbb{C})$ une solution à l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$.
7. Applications.
   7.1. On considère la matrice $T = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, $i^2 = -1$. déterminer une matrice X_1 telle que $\alpha(X_1) = T$.
   7.2. On va chercher une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$ où A désigne la matrice de $M_3(\mathbb{C})$ définie à la partie 1.
   7.2.1 Déterminer une matrice $B_1 \in M_2(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   7.2.2 Soit $H = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \ln(2) \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$. Calculer $\alpha(H)$.
   7.2.3 Déterminer alors une matrice $X_2 \in M_3(\mathbb{C})$ telle que $\alpha(X_2) = A$

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Contrôle (Pr Devulder)

Algèbre Linéaire

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un homme se rend aux urgences et dit au chirurgien :
- Il y a 2 ans j'ai avalé une pièce de 10 dhs pouvez vous m'opérer docteur ?
- Il y a 2 ans, vous dites ? Mais pourquoi n'êtes vous pas venu plutôt ?
- Parce qu' à l'époque mes affaires marchaient bien, je n'avais pas besoin d'argent !

Joseph Louis, Giuseppe Lodovico Lagrange en italien (1736-1813)

Mathématicien du jour

Mathématicien et astronome d'origine italien, français de propre volonté. Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, il démontre le théorème de Wilson sur les nombres premiers et le théorème de Bachet sur la décomposition d'un entier en quatre carrés. Son nom figure partout en mathématiques. On lui doit le théorème de Lagrange sur la théorie des groupes, un autre sur les fractions continues, l'équation différentielle de Lagrange, la fonction de Lagrange ainsi que les équations de Lagrange en mécanique analytique. Il souffre parfois à la fin de sa vie de dépression.

1 Quelques calculs préliminaires.

1. Remarque : au vu des questions **2** et **3**, on sait que les valeurs propres vont être -1 et 2. C'est en le sachant que l'on agit comme suit. On aurait aussi pu calculer le polynôme caractéristique et faire des résolutions de systèmes.
On remarque que

$$\mathbf{A}+\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}3&-3&3\\-3&4&-4\\-3&4&4\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{A}-2\mathbf{I}_3=\begin{pmatrix}0&-3&3\\-3&1&-4\\-3&4&-7\end{pmatrix}$$

Il est alors visible que $(0,1,1)\in\ker(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)$ et $(-1,1,1)\in\ker(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)$. -1 et 2 sont valeurs propres et comme la trace de $\mathbf{A}$ est nulle, la "troisième" valeur propre de $\mathbf{A}$ vaut -1. 2 est valeur propre simple et donc

$$\ker(\mathbf{A}-2\mathbf{I}_3)=\mathbf{Vect}((-1,1,1))$$

$\mathbf{A}+\mathbf{I}_3$ est de rang au moins 2 (colonnes 1 et 2 indépendantes). Le noyau étant de dimsnion au moins 1, ce rang vaut 2 et

$$\ker(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)=\mathbf{Vect}((0,1,1))$$

2. Le calcul donne

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)^2=9\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

C'est une matrice de rang 1 (colonnes toutes proportionnelles à la première) et $(1,1,0),(0,1,1)$ sont des éléments indépendants du noyau. Par théorème du rang, ce noyau est de dimension 2 et donc

$$\ker((\mathbf{A}+\mathbf{I}_3)^2)=\mathbf{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$$

Pour montrer que $\ker((A+I_3)^2)$ et $\ker(A-2I_3)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^3$, il suffit de montrer que la concaténées de bases de ces sous-espace donne une base de $\mathbb{C}^3$. On forme donc

$$P=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Comme $\det(P)=1$, P est inversible et on a bien

$$\ker((A+I_3)^2)\oplus\ker(A-2I_3)=\mathbb{C}^3$$

3. $\ker((A+I_3)^2)$ étant de dimension 2, il possède un élément e_2 qui n'est pas dans le noyau de $A+I_3$. Si on pose $e_1=(A+I_3)e_2$ on obtient un élement non nul du noyau de $A+I_3$. Cet élément n'est pas colinéaire à e_2 (qui n'est pas dans ce noyau) et (e_1,e_2) est libre dans $\ker((A+I_3)^3)$ (e_1 est aussi dans cet ensemble puisqu'il est dans $\ker(A+I_3)$). On note enfin e_3 un élément non nul de $\ker(A-2I_3)$. Avec la question précédente, (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{C}^3$ et, par construction

$$Ae_1=-e_1,\ Ae_2=e_1-e_2,\ Ae_3=2e_3$$

L'endomorphisme canoniquement associé à A est, dans cette base représenté par $\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. A est donc semblable à cette matrice.
Remarque : avec la matrice P de la question précédente, on a aussi $P^{-1}AP$ qui a la forme voulue.

2 Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Les $n-1$ premières colonnes de $J(0)$ sont clairement indépendantes. La dernière est nulle et donc combinaison des $n-1$ premières. Le rang de $J(0)$ vaut donc $n-1$.

2.1. Soit j l'endomorphisme canoniquement associé à J et $(u_1,\dots,u_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\forall l\in[\![1..n-1]\!],\ j(e_l)=e_{l+1}\ \text{ et }\ j(e_n)=0$$

On en déduit alors, en itérant, que pour $k\in[\![1..n-1]\!]$,

$$\forall l\in[\![1,n-k]\!],\ j^k(e_l)=e_{l+k}\ \text{ et }\ \forall l\in[\![n-k+1,n]\!],\ j^k(e_l)=0$$

On en déduit que $J(0)^k=\begin{pmatrix}0&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&0\\\vdots&&&&&&\vdots\\0&&&&&&\vdots\\1&\ddots&&&&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&&&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&&&\vdots\\0&\dots&0&1&0&\dots&0\end{pmatrix}$ où la diagonale de 1 commence sur la ligne $k+1$. On peut aussi écrire que

$$\forall i,j\in[\![1..n]\!],\ (J(0)^k)_{i,j}=\delta_{j+k,j}$$

On remarque que cei est encore valable si $k=0$ (on obtient alors la matrice I_n).
On en déduit aussi que $j^n(e_l)=0$ pour tout l et que donc $J(0)^n=O_n$ et donc (on continue à multiplier par $J(0)$ et on obtient toujours la matrice nulle) :

$$\forall k\geq n,\ J(0)^k=O_n$$

2.2. Soit $k\geq 1$ (l'énoncé oublie de préciser que l'exposant n'est pas nul). $(J(0)^k)^n=J(0)^{nk}=O_n$ car $nk\geq n$. $J(0)^k$ est donc nilpotente.

3. Dans la somme définissant $\alpha(J(0))$, il n'y a qu'un nombre fini de matrices non nulles et on vient de les calculer :

$$\alpha(J(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = (v_{i,j}) \quad \text{avec} \quad v_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \leq j-1 \\ \frac{1}{(i-j)!} \text{ si } i \geq j \end{cases}$$

$U = \alpha(J(0)) - I_n$ est la même matrice où l'on a remplacé les 1 diagonaux par des zéros.

4. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. On peut trouver des entiers p et q tels que $A^p = B^q = O_n$. Soient α, β deux scalaires. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir

$$(\alpha A + \beta B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} \alpha^k \beta^{p+q-k} A^k B^{p+q-k}$$

Si $k \geq p$, $A^k = A^p A^{k-p}$ est nulle et si $k \leq p$ alors $p+q-k \geq q$ et c'est alors B^{p+q-k} qui est nulle. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et $(A+B)^{p+q} = O_n$. $\alpha A + \beta B$ est nilpotente.
On en déduit par récurrence que pour tout p, une combinaison linéaire de p matrices nilpotentes qui commutent deux à deux est encore une matrice nilpotente.

5. On a

$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} J^k$$

qui est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Avec la question précédente, U est nilpotente.
Les $n-1$ premières colonnes de U sont indépendantes (famille "échelonnée" dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) et la dernière est nulle (et donc combinaison des précédentes). U est donc de rang $n-1$.

3 Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in E,\ u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x))$$

Si $u^i(x) = 0$ alors $u^{i+j}(x) = u^j(0) = 0$ et on a donc l'inclusion

$$\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$$

2. En particulier, la suite $(\ker(u^m))_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion et, en passant aux dimension, la suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par la dimension de E, elle converge. Et comme elle est constituée d'entiers, elle est stationnaire à partir d'un certaine rang. Il existe donc un entier m_0 tel que $t_{m_0} = t_{m_0+1}$ et l'ensemble $\{m \in \mathbb{N} / \ t_m = t_{m+1}\}$ est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum (ce qui est mieux qu'une borne inférieure). On peut poser

$$r = \min\{m \in \mathbb{N} / \ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Par définition de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$. On a donc $\ker(u^m) \subset \ker(u_{m+1})$ et les sous-espaces n'ayant pas même dimension, l'inclusion est stricte.
r étant un minimum, on a $t_r = t_{r+1}$. Comme $\ker(u^r) \subset \ker(u_{r+1})$ et comme on a égalité des dimensions, on a donc $\ker(u^r) = \ker(u_{r+1})$.
Enfin, on montre par récurrence sur l'entier m que l'affirmation

$$\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$$

est vraie pour tout $m \geq r$.
- Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $m = r$.
- Etape de récurrence : soit $m \geq r$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang m. Soit $x \in \ker(u^{m+2})$; on a $u^{m+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in \ker(u^{m+1})$. Par hypothèse de récurrence, $\ker(u^m) = \ker(u_{m+1})$ et donc $u^m(u(x)) = 0$ c'est à dire $x \in \ker(u^{m+1})$. On a prouvé que $\ker(u^{m+2}) \subset \ker(u_{m+1})$ et comme l'inclusion réciproque a déjà été prouvée, on a l'égalité et le résultat au rang $m+1$.

4 Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

1.1. On a
$$\mathrm{Im}(w) = v^q(\mathrm{Im}(v^p)) = \mathrm{Im}(v^{p+q})$$
1.2. $w(x) = 0$ équivaut $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$ c'est à dire à $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $v^q(x) = 0$. On a donc
$$\ker(w) = \mathrm{Im}(v^p) \cap \ker(v^q) \subset \ker(v^q)$$
1.3. D'après le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Im}(w)) + \dim(\ker(w)) = \dim(\mathrm{Im}(v^p))$$
En utilisant les deux questions précédentes, on a donc
$$\dim(\mathrm{Im}(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q)) + \dim(\mathrm{Im}(v^{p+q}))$$
Le théorème du rang donne aussi
$$\dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(E) - \dim(\ker(v^p))$$
$$\dim(\mathrm{Im}(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\ker(v^{p+q}))$$
En injectant ces relations dans l'inégalité, on obtient
$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$
1.4. On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.
- Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\ker(v)) = 1$ (l'inégalité est une égalité).
- Etape de récurrence : soit $i \in [\![1..n-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i. La question précédente indique que
$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq \dim(\ker(v^i)) + \dim(\ker(v))$$
Comme $\ker(v)$ est de dimension 1 et comme le résultat est vrai au rang i, on a donc
$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq i + 1$$
ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

1.5. v étant nilpotente, on a $v^n = 0$ et $\dim(\ker(v^n)) = n$. D'après la partie 3 la suite $(\dim(\ker(v^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ commence par croître strictement puis stationne à la valeur n. D'après la question précédente, elle ne peut donc pas stationner avant le rang n et on a
$$1 = \dim(\ker(v)) < \dim(\ker(v^2)) < \cdots < \dim(\ker(v^n)) \leq n$$
Pour que ces inégalité puissent avoir lieu, on doit nécessairement avoir
$$\forall i \in [\![1..n]\!],\ \dim(\ker(v^i)) = i$$
2. Comme $\ker(v^{n-1})$ est de dimension $n-1$, il n'est pas égal à E et $v \neq \theta$.
3. Il existe donc $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que
$$\alpha_0 e + \alpha_1 v(e) + \cdots + \alpha_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$$
On a bien sur $v^k = \theta$ pour tout $k \geq N$.
En composant par v^{n-1}, on a alors $\alpha_0 v^{n-1}(e) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$.
Si on compose par v^{n-2}, on obtient de même $\alpha_1 = 0$. C'est donc un processus récurrent qui nous permet de montrer la nullité de tous les α_i.
La famille est libre et possède $n = \dim(E)$ éléments : c'est une base de E.
4. La matrice de v dans cette base est tout simplement $J(0)$.
5. Si v et w sont deux endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ alors il existe des bases dans lesquelles ces deux endomorphismes sont représentés par $J(0)$. Les matrices de ces endomorphismes sont donc semblables (transitivité de la relation de similitude).
Il est difficile de savoir ce qu'attend l'énoncé à la question "déterminer tous les endomorphismes nilpotents d'ordre $n-1$". On peut, per exemple, dire que ce sont ceux dont la matrice dans la base canonique est semblable à $J(0)$.

5 Résolution de l'équation $J(\mu) = \alpha(X)$.

1. L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue (par exemple, elle est linéaire et on est en dimension finie. On en déduit que
$$P^{-1}\alpha(M)P = P^{-1}\left(\lim_{k\to+\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{M^m}{m!}\right)P = \lim_{k\to+\infty}\sum_{m=0}^{k}\frac{P^{-1}M^mP}{m!}$$
Or, $P^{-1}M^mP = (P^{-1}MP)^m$ (résultat connu que l'on retrouve sans peine par récurrence sur m) et donc
$$P^{-1}\alpha(M)P = \alpha\left(P^{-1}MP\right)$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z = x + iy$ son écriture algébrique. $e^z = z^x e^{iy}$ admet e^x comme module et y est un de ses arguments.
   - On a $e^z = i = e^{i\pi/2}$ si et seulement si $e^x = 1$ et $y = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. La première équation admet $\{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i/\ k \in \mathbb{Z}\}$ comme ensemble de solutions.
   - On a $e^z = -1 = e^{i\pi}$ si et seulement si $e^x = 1$ et $y = \pi[2\pi]$. La première équation admet $\{(\pi + 2k\pi)\,i/\ k \in \mathbb{Z}\}$ comme ensemble de solutions.
   - On a $-3 - 4i = 5\left(-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)$. Soit $\theta_0 = \arccos(3/5)$; $\theta_0 \in [0,\pi]$ et $\cos(\theta_0) = 3/5$, $\sin(\theta_0) = 5/5$). On a ainsi $e^z = -3 - 4i = 5e^{i(\theta_0+\pi)}$ si et seulement si $e^x = 5$ et $y = \theta_0 + \pi[2\pi]$. La première équation admet $\{\ln(5) + (\theta_0 + \pi + 2k\pi)\,i/\ k \in \mathbb{Z}\}$ comme ensemble de solutions.
3. De manière plus générale, e^z est non nul (module e^x non nul).
   - $e^z = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{C}$.
   - $e^z = \mu = |\mu|e^{i\arg(u)}$ a lieu si et seulement si $e^x = |\mu|$ et $y = \arg(u)[2\pi]$. Les solutions sont donc les $z = \ln(|\mu|) + i(\arg(u) + 2k\pi)$ où k varie dans $\mathbb{Z}$.

4.1. On a
$$\sum_{k=0}^{m}\frac{(sI_n)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{m}\frac{s^k}{k!}\right)I_n$$
En passant à la limite, on en déduit que
$$\alpha(sI_n) = e^s I_n = \mu I_n$$
4.2. sI_n et $J(0)$ commutent et donc
$$\alpha(J(s)) = \alpha(sI_n)\alpha(J(0)) = \mu\alpha(J(0))$$
4.3. Avec les notations de la partie 2, $\mu(\alpha(J(0)) - I_n) = \mu U$ et on a vu que cette matrice est nilpotente. Elle est aussi de rang $n-1$ car U l'est et $\mu \neq 0$.
4.4. $\mu(\alpha(J(0)) - I_n) = \alpha(J(s)) - \mu I_n$ est nilpotente de rang $n-1$ et donc semblable à $J(0)$. Il existe donc une matrice inversible Q telle que
$$Q^{-1}\left(\alpha(J(s)) - \mu I_n\right)Q = J(0)$$
On en déduit alors que
$$Q^{-1}\alpha(J(s))Q = J(0) + \mu I_n = J(\mu)$$
5. Avec la question 1, on a donc
$$\alpha\left(Q^{-1}J(s)Q\right) = J(\mu)$$
et donc $X = Q^{-1}J(s)Q$ est une solution de l'équation $\alpha(X) = J(\mu)$.
6. Comme la transposition est continue, $\alpha({}^tM) = {}^t\alpha(M)$ et donc $X = {}^t\left(Q^{-1}J(s)Q\right)$ est une solution de l'équation $\alpha(X) = {}^tJ(\mu)$.

7.1. On est dans le cas $n = 2$. Dans ce cas, $\mu U = \mu J(0)$ et $Q = \mathrm{diag}(1,\mu)$ convient. On a aussi $T_1 = {}^tJ(i)$ et on est dans le cas $\mu = i$ et on peut prendre $s = i\pi/2$. D'après la question 6, la matrice
$$X_1 = {}^t(\mathrm{diag}(1,\mu)\alpha(J(i\pi/2))\mathrm{diag}(1,1/\mu))$$
est solution de $\alpha(X) = T_1$. Le calcul donne
$$X_1 = \begin{pmatrix} i\pi/2 & -1 \\ 0 & i\pi/2 \end{pmatrix}$$

7.2.1 On est dans le cas $n = 2$ et $\mu = -1$. $Q = \mathrm{diag}(1,-1)$ convient et le même calcul qu'à la question précédente donne

$$\alpha(B_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ avec } B_1 = \begin{pmatrix} i\pi & -1 \\ 0 & i\pi \end{pmatrix}$$

7.2.2 Un calcul par bloc permet de montrer (par récurrence que)

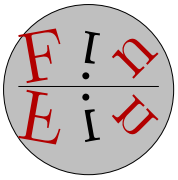
$$\forall k \in \mathbb{N},\ H^k = \begin{pmatrix} B_1^k & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & (\ln(2))^k \end{pmatrix}$$

En divisant par $k!$, en sommant et en passant à la limite, on a donc

$$\alpha(H) = \begin{pmatrix} \alpha(B_1) & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7.2.3 On a trouvé en question **I.3** une matrice P telle que $P^{-1}AP = \alpha(H)$. On a donc $A = P\alpha(H)P^{-1} = \alpha(PHP^{-1})$. On peut donc choisir

$$X_2 = PHP^{-1} = \begin{pmatrix} \ln(2) & i\pi - \ln(2) & -i\pi + \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -1 - \ln(2) & i\pi + 1 - \ln(2) \\ i\pi - \ln(2) & -i\pi - 1 + \ln(2) & 2i\pi + 1 - \ln(2) \end{pmatrix}$$



Mamouni My Ismail

Devoir libre

Arithmétique (fonctions multiplicatives)

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Quatre ingénieurs passent un entretien d'embauche, pour réussir il suffit de savoir compter.
Le X-man : " une... deux... une... deux..." : Le jury : Eliminé.
Le HEC : " Un KiloEuro ; deux KE, trois KE... : Le jury : Eliminé.
L'informaticien :" 0...1...0...1...0... " : Le jury : Eliminé.
Le dernier candidat sortant de la fac commence : " 1... 2... 3... 4... 5... 6... 7... "
Le jury : " continuez, continuez..."
Le jeune très épaté : " 8... 9... 10... valet... dame... roi... " !

August Ferdinand Möbius (1790-1868)

Mathématicien et astronome théoricien à l'université de Leipzig. Il est principalement connu pour sa découverte du ruban de Möbius, une surface non orientable à deux dimensions avec seulement un bord quand elle est plongée dans un espace euclidien à trois dimensions.
Möbius fut le premier à introduire les coordonnées homogènes en géométrie projective. L'importante fonction $\mu(n)$ et la formule d'inversion de Möbius font partie de ses apports en thorie des nombres. Möbius a eu Gauss comme professeur et tait un descendant de Martin Luther par sa mère.

Mathématicien du jour

Notations :

- Une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ est dite arithmétique multiplicative si et seulement si elle vérifie la relation suivante : $f(nm) = f(n)f(m)$, pour tous n, m tel que $n \wedge m = 1$.
- On notera par $\mathcal{M}$, l'ensemble de telles fonctions, sur lequel on définit l'opération suivante $(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$ appelée produit de Dirichlet.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note par $\mathcal{D}_n$ l'ensemble de ses diviseurs dans $\mathbb{N}$
- La fonction de Möbius est définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par la relation suivante :

$$\begin{aligned}\mu(n) &= 0 \text{ si } \exists p \text{ premier tel que } p^2 \text{ divise } n\\ &= (-1)^r \text{sinon, où } r \text{ dsigne le nombre}\\ &\quad \text{des diviseurs premiers de } n\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note par $\phi(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$
$\phi(n) = \sum_{d|n} d$.

1) **Montrer que $*$ définit sur $\mathcal{M}$ une LCI, puis une structure de groupe abélien d'élément neutre l'application $e(n)=0$ si $n\neq 1$ et $e(1)=1$.**

2) **Montrer que $*$ est distributive par rapport à $+$.**

3) **Montrer que $\mu * \mathbf{1} = e$ où $\mathbf{1}$ est la fonction constante sur $\mathbb{N}^*$ égale à 1.**

4) **Soient $f,g\in\mathcal{M}$ tel que $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer alors que :**

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{d}{n}\right)$$ **Formule d'inversion de Möbius**

5) **Montrer que n est premier si et seulement si $\phi(n)=n+1$.**

6) **Soit $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ tel que $a\wedge b=1$.**
Montrer que : $a\wedge(bc)=a\wedge c$.
$(ab)\wedge c=(a\wedge c)(b\wedge c)$

7) **Soit $(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ tel que $n\wedge m=1$.**

a) **Montrer que les applications**

$$\psi_1:\begin{array}{ccc}\mathcal{D}_n\times\mathcal{D}_m & \longrightarrow & \mathcal{D}_{nm}\\ (p,q) & \longmapsto & pq\end{array}\quad\textbf{et}\quad \psi_2:\begin{array}{ccc}\mathcal{D}_{nm} & \longrightarrow & \mathcal{D}_n\times\mathcal{D}_m\\ d & \longmapsto & (d\wedge n, d\wedge m)\end{array}$$

sont isomorphes l'une de l'autre.

b) **En déduire que $\mathbf{card}(D(nm))=\mathbf{card}(D(n))\mathbf{card}(D(m))$.**

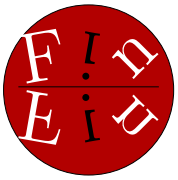
c) **Montrer que tout diviseur d de nm s'écrit sous la forme d_1d_2 où d_1 divise n et d_2 divise m.**

d) **En deduire que l'application :** $f:\begin{array}{ccc}D(n)\times D(m) & \longrightarrow & D(nm)\\ (d_1,d_2) & \longmapsto & d_1d_2\end{array}$ **est bijective.**

e) **En deduire enfin que :** $\phi(nm)=\phi(n)\phi(m)$

8) **Soit p premier et $\alpha\in\mathbb{N}$, Donner tous les diviseurs de p^α, puis en déduire $\phi(p^\alpha)$.**

9) **Soient $p_1,\dots,p_r$ des nombres premiers et $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ des entiers naturels, en déduire $\phi(n)$ où $n=\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.**



.

Mamouni My Ismail

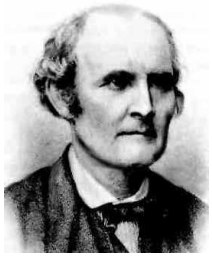
Devoir libre

Polynôme minimal et caractéristique

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un vieux milliardaire téléphone à une conseillère : J'ai 60 ans et je veux me marier avec une jeune fille de 20 ans. Pensez-vous que j'aie plus de chance de l'amener à m'épouser si je lui dis il y a quelques année, j'avais juste 50 ans ? La conseillère lui répond : A mon avis, vous feriez mieux de lui dire que quelques année, vous approchez des 80 ans !



Arthur Cayley (1821-1895)

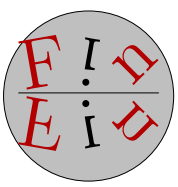
Mathématicien et avocat britannique, l'un des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices. Il a donné le premier, une définition qui s'approche de la notion moderne de groupe. Il a reçu la Médaille Copley en 1882. On lui doit aussi la découverte des nombres de Cayley, les octonions.

Mathématicien du jour

.

.

.



.

.

.

.

Mamouni My Ismail

Devoir libre 3

Déterminants par blocs

MP-CPGE Rabat

4 Octobre 2010

Source : e3a,PSI-2010, Epreuve B

Blague du jour

- Trois statisticiens vont la chasse au canard. Un canard décolle. Le premier tire et passe dix centimètres au-dessus. Le second tire et passe dix centimètres en-dessous. Le troisième, tout sourire : "c'est bon les gars, on l'a eu !"
- La vie est complexe, elle a une partie réelle et une autre imaginaire.
- Qu'est-ce qu'un ours polaire ? C'est un ours cartésien qui a changé ses coordonnés.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

Mathématicien du jour

Mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique.
Enfant prodige ; et doué pour les langues à l'âge de 7 ans, il parlait déjà en hébreu et, à l'âge de 13 ans, sous la direction de son oncle qui est linguiste, il parlait déjà 13 langues : le persan, l'arabe, l'hindousthânî, le sanskrit, le malais,....

Dans cet exercice, les deux parties sont indépendantes. Le candidat pourra aborder le partie **B** en admettant le résultat de la question **A.3.b**.
Soit $\mathbf{n}$ un entier naturel non nul. On notera $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $\mathbf{n}$ à coefficients complexes. On note respectivement $\mathbf{I_n}$ et $\mathbf{O_n}$ la matrice identité et la matrice nulle de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$. Le déterminant d'une matrice $\mathbf{A}$ est noté $\det(\mathbf{A})$, sa trace $\mathrm{Tr}(\mathbf{A})$ et son polynôme caractéristique est désigné par $\mathbf{P_A(X)}$.

Partie A.

1. Soient $\mathbf{A, B, C, D}$ des éléments de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$.
   a. Justifier brièvement les relations suivantes entre les déterminants de matrices de $\mathcal{M}_{\mathbf{2n}}(\mathbb{C})$ définies par blocs et les déterminants de leurs blocs :
   $$\det\begin{pmatrix}\mathbf{I_n} & \mathbf{O_n}\\ \mathbf{O_n} & \mathbf{D}\end{pmatrix} = \det(\mathbf{D}),\ \det\begin{pmatrix}\mathbf{I_n} & \mathbf{B}\\ \mathbf{O_n} & \mathbf{I_n}\end{pmatrix} = 1 \text{ et } \det\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O_n}\\ \mathbf{O_n} & \mathbf{I_n}\end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})$$
   b. En déduire $\det\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{O_n} & \mathbf{D}\end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$.
   c. De la question précédente, déduire $\det\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{O_n}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix} = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$.
2. Dans toute la suite de cette partie, $\mathbf{A, B, C, D}$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ tels que $\mathbf{DC = CD}$. Soit la matrice définie par blocs
   $$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\mathbf{2n}}(\mathbb{C})$$
   A l'aide du produit $\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{D} & \mathbf{O_n}\\ -\mathbf{C} & \mathbf{I_n}\end{pmatrix}$, montrer que si la matrice $\mathbf{D}$ est inversible alors on a
   $$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{AD} - \mathbf{BC})$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.
   a. Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \in S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.
   b. En déduire que l'on a $\det(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) = \det(AD - BC)$ en toute généralité.

Partie B.

Dans cette partie, q désigne un nombre complexe différent de 0 et de 1. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont on note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls sauf celui à l'intersection des ligne i et colonne j qui vaut 1).

Soit la matrice non nulle $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On note $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On définit les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivants :

$$R_A : X \mapsto AX \quad \text{et} \quad L_A : X \mapsto XA$$

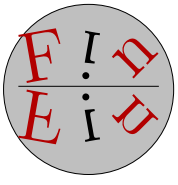
1. Déterminer les matrices de R_A et L_A dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que la matrice de l'endomorphisme $R_A - qL_A$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice définie par blocs par

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q^tA \end{pmatrix}$$

3. Montrer que l'on a successivement les égalités suivantes
   a. $\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$,
   b. $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det(\begin{pmatrix} d - qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a - qd \end{pmatrix})$,
   c. $\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right)$.
4. On suppose à présent que le polynôme caractéristique de A se décompose en le produit $P_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
   a. Montrer que l'on a $\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$.
   b. A l'aide des questions précédentes, montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :
      - il existe une matrice non nulle B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $AB = qBA$
      - on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non nulle avec $AB = qBA$ où $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que A est semblable à une matrice de l'un des trois types suivants :

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & q\alpha \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$.



.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre 3 (Pr. Devulder)

Déterminants par blocs

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

• Deux puces se retrouvent avec un labrador et elles commencent discuter :
- Qu'est-ce que tu a regardé hier soir à la télé ? La deuxième chienne ?
- Non, canal puce ...
• Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
Réponse : c'est un chameau qui bosse double !

François Viète (1540-1603)

Mathématicien français, le premier à avoir représenté les paramètres d'une équation par des lettres. Il était aussi chargé du déchiffrage des codes secrets ennemis. Il se lance dans des travaux d'astronomie et de trigonométrie. Parmi ses belles formules, notons celle-ci qui donne une valeur approchée de

$$\pi \simeq 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \dots$$

Mathématicien du jour

Partie A.

1.a. Au vu de la question suivante, on ne doit pas mentionner un calcul de déterminant triangulaire par blocs. Pour la première relation ainsi que la seconde, on peut faire des développements successifs selon la première colonne ($\mathbf{n}$ fois). Pour la troisième, on développe cette fois successivement ($\mathbf{n}$ fois) par rapport à la dernière colonne.

1.b. Il suffit de remarquer que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I_n} & \mathbf{O_n} \\ \mathbf{O_n} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I_n} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O_n} & \mathbf{I_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O_n} \\ \mathbf{O_n} & \mathbf{I_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O_n} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

puis d'utiliser la propriété de morphisme multiplicatif du déterminant pour obtenir, avec la question précédente,

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O_n} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$$

1.c. En utilisant l'invariance du déterminant par transposition, on obtient alors

$$\det\left(\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O_n} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}\right) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{D})$$

2. On a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{O_n} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{I_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{AD}-\mathbf{BC} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O_n} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

et donc (avec la propriété de morphisme multiplicatif du déterminantet la question 1) $\det(\mathbf{M})\det(\mathbf{D}) = \det(\mathbf{AD}-\mathbf{BC})\det(\mathbf{D})$. Si $\mathbf{D}$ est inversible, on peut simplifier par $\det(\mathbf{D}) \neq 0$ et obtenir

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{AD}-\mathbf{BC})$$

3.a. Soit S le spectre complexe de D (c'est un ensemble de cardinal fini $\leq n$). Si $x \notin S$ alors D_x est inversible et donc (question précédente) $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$.

3.b. Comme S est fini, il existe $r > 0$ tel que $]0, r[\cap S = \emptyset$. On a ainsi

$$\forall x \in]0, r[,\ \det(M_x) = \det(AD_x - BC)$$

Le passage au déterminant étant continu, on peut faire tendre r vers 0 pour obtenir

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

On a bien sûr utilisé $D_r \to D$ quand $r \to 0$ qui donne $M_r \to M$ et $AD_r - BC \to AD - BC$.

Partie B.

1. Il est important de prendre garde à l'ordre des vecteurs choisi pour la base canonique. A part cela, on doit juste exprimer $R_A(E_{i,j})$ ou $L_A(E_{i,j})$ et mettre les coordonnées en colonnes. Le calcul donne

$$Mat(R_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \text{ et } Mat(L_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$$

2. On écrit les matrices précédentes par blocs

$$Mat(R_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} aI_2 & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 \end{pmatrix} \text{ et } Mat(L_A, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} {}^tA & 0 \\ 0 & {}^tA \end{pmatrix}$$

Il suffit alors de combiner ces matrices pour obtenir

$$M_A = \begin{pmatrix} aI_2 - q{}^tA & bI_2 \\ cI_2 & dI_2 - q{}^tA \end{pmatrix}$$

3.a. Comme cI_2 et $dI_2 - q{}^tA$ commutent, on peut utiliser la formule de la partie A :

$$\begin{aligned} \det(M_A) &= \det((aI_2 - q{}^tA)(dI_2 - q{}^tA) - bcI_2) \\ &= \det((ab - bc)I_2 - q(a+d){}^tA + q^2({}^tA)^2) \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\tilde{A}$ étant la transposée de la comatrice de A on a (formule de cours que l'on peut vérifier à la main pour cette matrice de taille 2)

$$A\tilde{A} = \det(A)I_2$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) &= \det(A\tilde{A} + q^2A^2 - q(a+d)A) \\ &= \det((ad - bc)I_2 - q(a+d)A + q^2A^2) \end{aligned}$$

Le déterminant étant invariant par transposition, on conclut que

$$\det(M_A) = \det(A)\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2)$$

3.b. On a

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} (q-1)(qa-d) & b(q-1)(q+1) \\ c(q-1)(q+1) & (q-1)(qd-a) \end{pmatrix}\right)$$

Par multilinéarité du déterminant on a ainsi

$$\det(\tilde{A} + q^2A - q(a+d)I_2) = (1-q)^2\det\left(\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1) \\ -c(q+1) & -qd+a \end{pmatrix}\right)$$

et avec la question précédente,

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\det\left(\begin{pmatrix} d-qa & -(1+q)b \\ -(1+q)c & a-qd \end{pmatrix}\right)$$

3.c. On a maintenant

$$\det\left(\begin{pmatrix} -qa+d & -b(q+1) \\ -c(q+1) & -qd+a \end{pmatrix}\right) = (1+q)^2(ad-bc) - q(a+d)^2 = (1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2$$

et la question précédente donne

$$\det(M_A) = (1-q)^2\det(A)\left((1+q)^2\det(A) - q(\mathrm{Tr}(A))^2\right)$$

4.a. $P_A(X) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$ et donc $\mathrm{Tr}(A) = \alpha+\beta$ et $\det(A) = \alpha\beta$. La question précédente donne alors

$$\det(M_A) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q)^2\alpha\beta - q(\alpha+\beta)^2) = (1-q)^2\alpha\beta((1+q^2)\alpha\beta - q\alpha^2 - q\beta^2)$$

Il reste à remarquer que $P_A(q\alpha)P_A(q\beta) = (q-1)^2\alpha\beta(q\beta-\alpha)(q\alpha-\beta)$ et à développer le dernier produit pour conclure que

$$\det(M_A) = P_A(q\alpha)P_A(q\beta)$$

4.b. On travaille en deux temps.

- S'il existe $B \neq 0$ telle que $AB = qBA$ alors $(R_A - qL_A)(B) = 0$ et donc $R_A - qL_A$ est non inversible. Son déterminant est nul et donc $P_A(q\alpha) = 0$ ou $P_A(q\beta) = 0$ c'est à dire $q\alpha \in \{\alpha, \beta\}$ ou $q\beta \in \{\alpha, \beta\}$. Si $\det(A) \neq 0$ alors α et β sont non nuls (0 non valeur propre de A) et $q\alpha \neq \alpha$, $q\beta \neq \beta$ ($q \neq 1$). La condition devient alors $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
  Finalement, on a $\det(A) = 0$ ou $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$.
- Réciproquement, si cette condition a lieu alors $\det(M_A) = 0$ et $R_A - qL_A$ n'est pas inversible. Il existe $B \neq 0$ dans son noyau et ceci s'écrit $AB = qBA$.

5. Distinguons trois cas.

- 0 est valeur propre simple de A. Dans ce cas, il existe une autre valeur propre complexe $\alpha \neq 0$ et A est diagonalisable, semblable à $\mathrm{diag}(\alpha, 0)$ (deux sous-espaces propres qui sont des droites).
- 0 est valeur propre double. Dans ce cas, $P_A = X^2$ et $A^2 = 0$ (Cayley-Hamilton). Comme $A \neq 0$, il existe un vecteur colonne E_1 tel que $E_2 = AE_1 \neq 0$. Si $c_1E_1 + c_2E_2 = 0$ alors (on compose par A) $c_1E_2 = 0$ et donc $c_1 = 0$ (car $E_2 \neq 0$) puis $c_2E_2 = 0$ et donc $c_2 = 0$. La famille (E_1, E_2) est libre et est une base de $\mathbb{R}^2$ (identifié à l'espaces des matrices unicolonnes). Dans cete base, l'endomorphisme canoniquement associé à A est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et A est donc semblable à cette matrice.
- Si 0 n'est pas valeur propre de A alors $\det(A) \neq 0$ et $\alpha = q\beta$ ou $\beta = q\alpha$. Comme $q \neq 1$, on a $\alpha \neq \beta$ et on a deux valeur propres. A est diagonalisable et semblable à $\mathrm{diag}(\alpha, \beta)$.

.

Mamouni My Ismail

Devoir libre 4

Crochet de Lie

MP-CPGE Rabat

8 octobre 2010

Blague du jour

Êtes-vous accro l'Internet ? La réponse serait oui si :
- A trois heures du matin, vous vous levez pour un besoin pressant et regardez en revenant si vous avez reçu des mails.
- Vous inclinez la tête gauche quand vous souriez
- Sur la porte de la cuisine est écrit : "upload"
- Sur la porte des toilettes est écrit : "download"

Sophus Lie (1842-1899)

Mathématicien norvégien. Il a participé activement à la création de la théorie des symétries continues, et l'a appliquée à la géométrie et aux équations différentielles. On lui doit la création de l'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie. Arrêté et incarcéré en France lors de la guerre, soupçonné d'être un espion allemand, il en profite pour avancer sa thèse sur ≪ une classe de transformation géométrique. Il était marié à la petite fille de Niels Henrik Abel.

Mathématicien du jour

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, E, on pose pour tous endomorphismes u et v :

$$[u,v] = u\circ v - v\circ u \qquad \textbf{Crochet de Lie.}$$

1) **Montrer que $(\mathcal{L}(E),+,.,[,])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.**

2) **Montrer que l'application :** $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ (u,v) & \longmapsto & [u,v] \end{array}$ **est bilinéaire symétrique.**

3) **Montrer que $\forall u,v,w \in \mathcal{L}(E)$, on a :**

$$[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]] = 0. \qquad \textbf{identité de Jacobi.}$$

4) **Soient u,v deux endomorphisme de E tels que $[u,v] = \mathrm{id}_E$. Montrer que :**

a) $[u^k,v] = ku^{k-1}$ **pour** $k \in \mathbb{N}$.

b) $[P(u),v] = P'(u)$ **pour** $P \in \mathbb{K}[X]$.

c) u **et** v **n'ont pas de polynômes minimaux.**

5) ***Oral CCP 99.***
On suppose dans cette question que E un espace vectoriel réel de dimension finie et que $f,g \in \mathcal{L}(E)$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tels que $[f,g] = \alpha f$.

a) **Montrer pour tout entier naturel n :** $[f^n,g] = \alpha n f^n$.

b) **Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$ (raisonner par l'absurde et considérer l'application** $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ h & \longmapsto & [h,g] \end{array}$ **.**

7) ***Oral X 2001***

On suppose dans cette question que E est de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et que f un endomorphisme de E tel que χ_f soit irréductible. On se propose de montrer que pour tout endomorphisme g, le crochet de Lie $\mathrm{rg}[f,g] \neq 1$. Supposons qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}[f,g] = 1$.

a) **Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ et $a \in E$ tous deux non nuls tels que :**

$$\forall\ x \in E, \quad \text{on a :} f(g(x)) - g(f(x)) = \varphi(x)a.$$

b) **En déduire par récurrence sur k que :**

$$\forall\ x \in E,\ f^k(g(x)) - g(f^k(x)) = \varphi(x)f^{k-1}(a) + \varphi(f(x))f^{k-2}(a) + \cdots + \varphi(f^{k-1}(x))a.$$

c) **En déduire que : $(a, f(a), \ldots, f^{n-1}(a))$ est une base de E avec $n = \dim E$ et que $\exists P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $f^n(a) = P(f)$.**

d) **En déduire que $\mu_f(X) = X^n - P(X)$.**

e) **En déduire que $\ell(x) = 0$ pour tout $x \in E$.**

f) **En déduire une contradiction.**

8) ***Oral Ens Cachan 2003.***

Soit $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un automorphisme d'espace vectoriel tel que :

$$\forall\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi([A,B]) = [\Phi(A), \Phi(B)]$$

On se propose de montrer : $\forall\ D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, D est diagonalisable *ssi* $\Phi(D)$ est diagonalisable. Pour cela considérons l'application : $\phi_D : X \longrightarrow [D,X]$ et montrons que (D est diagonalisable) $\Longleftrightarrow$ (ϕ_D est diagonalisable).

a) **On suppose que D est diagonalisable. Montrer alors que les applications $X \longrightarrow DX$ et $X \longrightarrow XD$ le sont aussi (annulateur scindé à racines simples) et elles commutent, donc elles sont simmultanément diagonalisables et leur différence, ϕ_D, est aussi diagonalisable.**

b) **Réciproquement, on suppose que ϕ_D est diagonalisable.**

i. **Montrer que si P est un polynôme quelconque de degré m, alors :**

$$\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ P(\phi_D)(X) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k D^k X \frac{P^{(k)}(D)}{k!} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \frac{P^{(k)}(D)}{k!} X D^k.$$

ii. **Prenons P annulateur scindé à racines simples de ϕ_D, $X = U\,{}^tV$ où U est un vecteur propre de D associé à une certaine valeur propre λ et V un vecteur arbitraire. Montrer que $U\,{}^tV P(D - \lambda I)$, puis que ${}^tV P(D - \lambda I) = 0$.**

iii. **En déduire que $P(D - \lambda I) = 0$, puis conclure.**

9) **Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{R})$ telles que $[A,B] = A$, montrer que A est nilpotente. Pour cela on considère l'application :**

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{M}_n(()\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(()\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & MB - BM \end{array}$$

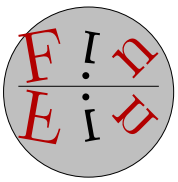
a) **Montrer que ψ est linéaire de E dans E.**

b) **Montrer par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \psi(A^k) = kA^k$.**

c) **On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \neq 0$. Montrer que ψ a une infinité de valeurs propres.**

d) **Conclure.**

10) CNC 2000, Math II, MP



❋ Banque filière PT ❋ 2008

Mamouni My Ismail

Devoir libre 5

Diagonalisation de matrices

MP-CPGE Rabat

Durée 4 h

11 Octobre 2010

Problèmes Corrigés MP 2010-2011
Banque filière PT 2008

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Blague du jour

- Un gendarme fait stopper une automobile :
- Vous n'aviez pas vu le feu rouge ?
- Si si. C'est vous que je n'avais pas vu !
- Quelle différence y a-t-il entre Windows et un clou ?
- Aucune : tous deux sont destins se planter.
- Quelle est la différence entre Windows XP et un virus ?
- Le virus il fonctionne !

Otto Toeplitz (1881-1940)

Mathématicien allemand. Il était issu d'une famille de mathématiciens. Excellent pédagogue, Toeplitz s'intéressait aussi à l'histoire des mathématiques. On lui doit les matrices dites de Toeplitz, dont toutes les diagonales sont constantes, ces matrices sont très utilises dans les théorie de complexité et d'analyse de Fourrier.

Mathématicien du jour

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultat non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Soit E un espace vectoriel et φ un endomorphisme de E. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par φ si et seulement si

$$\forall u \in F, \quad \varphi(u) \in F$$

ce qui s'écrit également

$$\varphi(F) \subset F.$$

Préliminaire

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels soit diagonalisable.

Partie I

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme φ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice A_φ est diagonalisable.
2. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A_φ.
   Déterminer les valeurs propres de cette matrice.
   Quelle est la dimension des sous-espaces propres ?
3. Déterminer une base (c_1, c_2, c_3) de vecteurs propres de φ.
4. On pose $D_1 = Vect(c_1)$. Montrer que D_1 est stable par φ.
5. On pose $P_1 = Vect(c_2, c_3)$. Montrer que P_1 est stable par φ.

Partie II

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les endomorphismes f et g dont les matrices dans la base canonique sont respectivement

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_g = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que les matrices A_f et A_g sont diagonalisables.
2. Vérifier que les endomorphismes f et g commutent.
3. Déterminer tous les vecteurs propres de f associés à la valeur propre 1.
   Vérifier que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de g.
4. Déterminer le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -1.
   Vérifier que ce sous-espace propre est stable par g.

Partie III

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme ϕ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A_ϕ.
2. La matrice A_ϕ est-elle diagonalisable ?
3. Montrer qu'une droite vectorielle $Vect(u)$ $(u \neq 0)$ est stable par ϕ si et seulement si u est un vecteur propre de ϕ.
   En déduire toutes les droites vectorielles stables par ϕ.

.

4. Montrer que ϕ est bijectif.
5. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $dim\,\phi(F) = dim\,F$.
6. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est stable par ϕ si et seulement si $\phi(F) = F$.
7. Soient α, β, γ des réels non tous nuls et

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\}.$$

Soit ψ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\psi(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

(a) Donner la matrice de ψ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Vérifier que $\phi^{-1}(H) = Ker\,\psi \circ \phi$.

(c) Montrer que H est stable par ϕ si et seulement si $Ker\,\psi \circ \phi = Ker\,\psi$.

(d) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel F de dimension 1 tel que

$$\mathbb{R}^3 = Ker\,\psi \oplus F.$$

(e) Montrer que, si ψ_1 et ψ_2 sont deux applications linéaires non identiquement nulles de F dans $\mathbb{R}$, alors il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$\forall x \in F, \qquad \psi_1(x) = \lambda \psi_2(x).$$

(f) En déduire que H est stable par ϕ si et seulement si il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad \psi \circ \phi(x) = \lambda \psi(x).$$

(g) En écrivant la relation précédente sous forme matricielle, montrer que H est stable par ϕ si et seulement si le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de ${}^tA_\phi$.

(h) En déduire tous les plans vectoriels stables par ϕ.

Partie IV

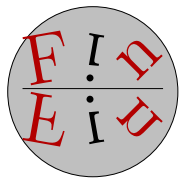
Soit E un espace euclidien de dimension finie. On suppose dim $E \geq 2$. On note $\langle u|v\rangle$ le produit scalaire des vecteurs u et v et $\|u\|$ la norme du vecteur u. On se donne un vecteur a de E de norme 1 et, pour tout réel $\alpha \neq 0$, on pose, pour tout $x \in E$,

$$f_\alpha(x) = x + \alpha \langle x|a\rangle a.$$

1. Vérifier que f_α est un endomorphisme de E.
2. Montrer que pour tous réels non nuls α, β, $f_\alpha \circ f_\beta = f_\beta \circ f_\alpha$.
3. Montrer que pour tous vecteurs x et y, on a $\langle x|f_\alpha(y)\rangle = \langle f_\alpha(x)|y\rangle$.
4. Vérifier que a est un vecteur propre de f_α.

.

5. Montrer que 1 est valeur propre de f_α.
   Quel est le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?
   L'endomorphisme f_α est-il diagonalisable ?
6. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il inversible ? Calculer dans ce cas son inverse.
7. Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme f_α est-il une isométrie (i.e., pour tout x de E, $\|f_\alpha(x)\| = \|x\|$) ? Caractériser dans ce cas cet endomorphisme.
8. En utilisant la question 3, montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f_α, alors $F^\perp$ est également stable par f_α.



.

Mamouni My Ismail

Devoir libre 6

Exponentielle de matrices

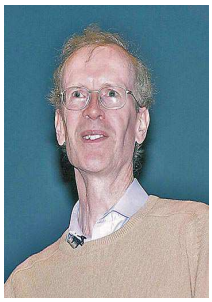
MP-CPGE Rabat

16 octobre 2010

Source : CCP, 2010, MP, Math 2

Blague du jour

• Quel est le genre d'humour que les dindes n'aiment pas ?
Réponse : les farces.
• Pourquoi les lapins jouent-ils avec 46 cartes au lieu de 52 cartes ?
Réponse : parce qu'ils ont mangent les trèfles !
• C'est une bande de poissons en train de faire des bêtises, quand l'un voit une étoile de mer et dit : Attention voilà le shérif qui arrive !



Sir Andrew John Wiles (1953-)

Mathématicien britannique, professeur à l'université de Princeton, aux États-Unis. Il est surtout connu pour sa démonstration du dernier théorème de Fermat en 1994, résolvant ainsi l'un des problèmes les plus connus de l'histoire des mathématiques. Travaillant dans le plus grand secret pendant huit ans, et faisant part de ses idées et progrès à Nicholas Katz, un collègue de Princeton, Wiles démontre la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil et, par conséquent, le théorème de Fermat. Pour dévoiler sa démonstration, Wiles s'y prend de manière quasi théâtrale. Il annonce trois conférences (les 21, 22 et 23 juin 1993) sans en donner l'objet, ce qu'il ne fait que lors de la dernière en précisant que le grand théorème de Fermat est un corollaire de ses principaux résultats. Son travail met ainsi fin à une recherche qui a duré plus de 300 ans.

Mathématicien du jour

QUELQUES UTILISATIONS DES PROJECTEURS

Notations et objectifs :

Dans tout le texte E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On note id l'endomorphisme identité de E, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices réelles carrées de taille n.

Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires, c'est-à-dire $E = E_1 \oplus E_2$, on appelle projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E qui, à un vecteur x de E se décomposant comme $x = x_1 + x_2$, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, associe le vecteur x_1.

On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice exponentielle de A est la matrice :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

De même si u est un endomorphisme de E, l'exponentielle de u est l'endomorphisme :

$$\exp(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u^k}{k!}.$$

Dans les parties II. et III., on propose une méthode de calcul d'exponentielle de matrice à l'aide de projecteurs spectraux dans les cas diagonalisable et non diagonalisable. Dans la dernière partie IV., on utilise les projections orthogonales pour calculer des distances à des parties.

Les quatre parties sont indépendantes.

I. Questions préliminaires

1. Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   Calculer $\exp(A)$, $\exp(B)$, $\exp(A)\exp(B)$ et $\exp(A+B)$ (pour $\exp(A+B)$, on donnera la réponse en utilisant les fonctions ch et sh).
2. Rappeler sans démontration, une condition suffisante pour que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifient l'égalité $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$.

II. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r,$$

où r désigne un entier vérifiant $1 \leqslant r \leqslant n$.

3. *Polynôme interpolateur de Lagrange* : on note $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $r-1$.
   On considère l'application linéaire ϕ de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$ définie par :

$$P \mapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \ldots, P(\lambda_r)).$$

   Déterminer le noyau de ϕ, puis en déduire qu'il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $L(\lambda_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i}$.
4. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, on définit le polynôme l_i de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ par :

$$l_i(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} \frac{X - \lambda_k}{\lambda_i - \lambda_k}.$$

   (a) Calculer $l_i(\lambda_j)$ selon les valeurs de i et j dans $\{1, \ldots, r\}$.
   (b) En déduire une expression du polynôme L comme une combinaison linéaire des polynômes l_i avec $i \in \{1, \ldots, r\}$.
5. *Une propriété de l'exponentielle* : soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et D une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Justifier que l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto PMP^{-1}$ est une application continue.
   (b) En déduire que :

$$\exp(PDP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}.$$

6. Déduire des questions **3.** et **5.** que $\exp(A) = L(A)$.
7. On suppose que E est munie d'une base $\mathcal{B}$ et on désigne par v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à $\mathcal{B}$ est A. Soit λ une valeur propre de v, et x un vecteur propre associé. Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :
$$P(v)(x) = P(\lambda)x.$$
8. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$, on note $E_i = \operatorname{Ker}(v - \lambda_i \operatorname{id})$ le sous-espace propre de v associé à λ_i.
   (a) Démontrer que l'endomorphisme de E, $p_i = l_i(v)$ est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r} E_k$ (on dit que les p_i sont les projecteurs spectraux de v).
   (b) En déduire une expression de $\exp(A)$ comme une combinaison linéaire de matrices de projecteurs.

III. Un calcul d'exponentielle de matrice à l'aide des projecteurs spectraux, cas non diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E dont le polynôme minimal est $(X-1)^2(X-2)$.

9. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? Justifier la réponse.
10. Écrire, sans justifier, un exemple de matrice triangulaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'endomorphisme canoniquement associé a pour polynôme minimal $(X-1)^2(X-2)$.
11. Démontrer, sans aucun calcul, que $E = \operatorname{Ker}(u - \operatorname{id})^2 \oplus \operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{id})$.
12. On considère les endomorphismes de E : $p = (u - \operatorname{id})^2$ et $q = u \circ (2\operatorname{id} - u)$. Calculer $p + q$.
13. Démontrer que l'endomorphisme p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{id})$, parallèlement à $\operatorname{Ker}(u - \operatorname{id})^2$. Que dire de l'endomorphisme q ?
14. Soit x un élément de E.
   (a) Préciser $(u - 2\operatorname{id})(p(x))$.
   (b) Déterminer un nombre réel α tel que pour tout entier naturel k, $u^k \circ p = \alpha^k p$.
   (c) En déduire que $\exp(u) \circ p = \beta p$ où β est un réel à déterminer.
15. Que vaut pour tout entier $k \geqslant 2$, $(u - \operatorname{id})^k \circ q$?
   Démontrer que $\exp(u) \circ q = \gamma u \circ q$ où γ est un réel à déterminer (on pourra écrire en justifiant que $\exp(u) = \exp(\operatorname{id}) \circ \exp(u - \operatorname{id})$).
16. Écrire enfin l'endomorphisme $\exp(u)$ comme un polynôme en u.

IV. Calcul de distances à l'aide de projecteurs orthogonaux

Dans cette partie, on suppose en plus que l'espace E est muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$, ce qui lui confère une structure d'espace euclidien. On rappelle que la norme euclidienne associée, notée $\| \cdot \|$, est définie par :
$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^\perp$ son orthogonal, et on appelle projecteur orthogonal sur F, noté p_F le projecteur sur F, parallèlement à $F^\perp$.

Enfin, si x est un vecteur de E, la distance euclidienne de x à F, notée $\mathrm{d}(x, F)$ est le réel :
$$\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\|x - y\| \quad | \quad y \in F\}.$$

17. *Théorème de la projection orthogonale* : soit F un sous-espace vectoriel de E et x un vecteur de E. Rappeler sans démonstration, la formule permettant de calculer $\mathrm{d}(x,F)$ à l'aide du vecteur $p_F(x)$.

18. *Cas des hyperplans* : soit n un vecteur non nul de E et H l'hyperplan de E orthogonal à n, c'est à dire $H = (\mathrm{Vect}\,\{n\})^{\perp}$. Exprimer pour $x \in E$, la distance $\mathrm{d}(x,H)$ en fonction de $< x,n >$ et de $\|n\|$.

19. *Une application* : dans cette question uniquement, $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique : si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en notant Tr la trace,

$$< A,B > = \mathrm{Tr}({}^tAB).$$

Enfin on note H l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

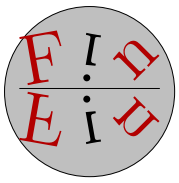
(a) Justifier que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer $H^{\perp}$.

(b) Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la distance $\mathrm{d}(M,H)$.

20. *Et pour une norme non euclidienne ?* Dans cette question $E = \mathbb{R}^2$ est muni de la norme infinie notée N_∞ : si $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\quad N_\infty(x) = \max\{|x_1|,|x_2|\}$. On pose $F = \mathrm{Vect}\,\{(1,0)\}$ et $x = (1,1)$. Déterminer la distance «infinie» du vecteur x à F, c'est-à-dire le réel :

$$\mathrm{d}_\infty(x,F) = \inf\{N_\infty(x-y) \quad | \quad y \in F\},$$

et préciser l'ensemble des vecteurs m pour lesquels cette distance est atteinte, c'est-à-dire $\mathrm{d}_\infty(x,F) = N_\infty(x-m)$. Commenter.



.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre 6 (Pr Dufait)

Exponentielle de matrices

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Un fils de banquier à son père : Papa, prête-moi 20 dhs, mais ne m'en donnes que 10. Le père demande : Pourquoi, mon garçon ?
Le fils répond : Comme ça tu me devras 10 dhs, je te devrai 10 dhs et nous serons quittes !
- Une mère au service de scolarité : Je refuse de vous payer l'assurance scolaire pour les petits car moi j'élève mes enfants à la dure et si ils leurs arrivent quelque chose c'est comme ça qu'ils apprendront que la vie c'est pas une partie de plaisir.

Charles mile Picard, (1856-1941)

Mathématicien français, deuxième au concours d'entrée de l'école polytechnique, premier à celui de l'école normale supérieure, et premier au concours d'agrégation de mathématiques. Les travaux très innovants de Picard ouvrirent la voie à de nouvelles recherches. Il fut le premier à utiliser le théorème du point fixe de Banach dans une méthode d'approximations successives de solutions d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. On lui doit également des travaux en géométrie algébrique et des recherches appliquées sur l'élasticité et sur la chaleur. Son Traité d'analyse constitua longtemps une référence, mais Picard fut aussi philosophe et historien des sciences. Il épouse la fille de son professeur Charles Hermite. Sa fille Louise Picard épousa le physicien Louis Dunoyer.

Mathématicien du jour

Partie I

1. ◇ On a $A^2=0$ donc $\forall k\geqslant 2,\ A^k=0$ donc $\exp(A)=I_2+A$ soit $\underline{\exp(A)=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}}$.

◇ $B={}^tA$ et l'application $M\mapsto {}^tM$ est un endomorphisme d'un epace vectoriel de dimension fine donc continue. Ainsi $\exp({}^tA)={}^t(\exp(A))$ donc $\underline{\exp(B)=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}}$.

◇ On a donc directement $\underline{\exp(A)\exp(B)=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}}$.

◇ Soit $C=A+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. On a $C^2=I_2$ donc $\forall k\in\mathbb{N},\ C^{2k}=I_2$ et $C^{2k+1}=C$ donc $\exp(C)=\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}\right)I_2+\left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)!}\right)C=\operatorname{ch}1\,I_2+\operatorname{sh}1\,C$ donc $\underline{\exp(A+B)=\begin{pmatrix}\operatorname{ch}1&\operatorname{sh}1\\\operatorname{sh}1&\operatorname{ch}1\end{pmatrix}}$.

2. ◇ Si on veut rester dans le cadre du programme, on peut utiliser le fait que

$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (s,t)\in\mathbb{R}^2,\quad \exp((s+t)M)=\exp(sM)\exp(tM).$$

Ainsi une condition suffisante est $\underline{\exists M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \exists (s,t)\in\mathbb{R}^2,\ A=tM,\ B=sM}$.

◇ Une condition suffisante usuelle (mais qui n'est pas explicitement au programme) est $\underline{AB=BA}$.

Remarquons que cette condition n'est pas nécessaire: $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\pi\\0&2\pi&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&-2\pi\\0&2\pi&0\end{pmatrix}$ vérifient $\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B)$ bien que $AB\neq BA$.

.

Partie II

3. ◇ Si $P \in \operatorname{Ker}\phi$ alors $P(\lambda_1) = \cdots = P(\lambda_r) = 0$ donc P admet r racines distinctes. Or $\deg(P) \leqslant r-1$ donc ceci implique que $P = 0$. Comme $0 \in \operatorname{Ker}\phi$, on a $un\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$.

◇ Ainsi ϕ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^r$. Mais $\dim\big(\mathbb{R}_{r-1}[X]\big) = \dim\big(\mathbb{R}^r\big)$ donc ϕ est une bijection. Tout élément de $\mathbb{R}^r$ admet donc un unique antécédent par ϕ et c'est notamment le cas pour $\big(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_r}\big)$.

Ainsi il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall i \in [\![1, r]\!],\ L(\lambda_i) = \mathrm{e}^{\lambda_i}$.

4. **(a)** On a facilement $l_i(\lambda_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$.

(b) Si L s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $\big(l_i\big)_{i\in[\![1,r]\!]}$: $L = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i l_i$ alors $\forall j \in [\![1, r]\!],\ \mathrm{e}^{\lambda_j} = L(\lambda_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i l_i(\lambda_j) = \alpha_j$ selon [**a**]. Réciproquement, le polynôme $P = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i$ vérifie $\forall j \in [\![1, r]\!],\ P(\lambda_j) = \mathrm{e}^{\lambda_j}$ et $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ donc $P = L$. Ainsi $L = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i$.

5. **(a)** Toute application linéaire de source un espace vectoriel de dimension finie et de but un espace vectoriel normé quelconque est continue. Donc, ici, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue .

(b) Par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N},\ \big(PDP^{-1}\big)^k = PD^kP^{-1}$ donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{N} \frac{\big(PDP^{-1}\big)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = P\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1}$. Par définition, le premier membre tend quand N tend vers $+\infty$ vers $\exp\big(PDP^{-1}\big)$ tandis que le second tend quand N tend vers $+\infty$ vers $P\exp(D)P^{-1}$ grâce à la continuité de $M \mapsto PMP^{-1}$ car $\sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \exp(D)$. Donc $\exp\big(PDP^{-1}\big) = P\exp(D)P^{-1}$.

6. Puisque A est diagonalisable, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \operatorname{Diag}\big(\mu_1, \ldots, \mu_n\big)$ telles que $A = PDP^{-1}$. On a alors,par récurrence immédiate, $\forall k \in \mathbb{N},\ D^k = \operatorname{Diag}\big(\mu_1^k, \ldots, \mu_n^k\big)$ donc, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(D) = \operatorname{Diag}\big(P(\mu_1), \ldots, P(\mu_n)\big)$. Ainsi, d'une part, $\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{N} \frac{D^k}{k!} = \operatorname{Diag}\left(\sum_{k=0}^{N} \frac{\mu_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_n^k}{k!}\right)$ et donc $\exp(D) = \operatorname{Diag}\left(\mathrm{e}^{\mu_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mu_n}\right)$ et, d'autre part, $L(D) = \operatorname{Diag}\big(L(\mu_1), \ldots, L(\mu_n)\big) = \operatorname{Diag}\left(\mathrm{e}^{\mu_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\mu_n}\right)$ car chaque μ_j appartient à $\operatorname{Sp}(A) = \big\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\big\}$.
Donc $\exp(A) = \exp\big(PDP^{-1}\big) = P\exp(D)P^{-1} = PL(D)P^{-1}$. Or, comme au [**5.b**], on a $L\big(PDP^{-1}\big) = PL(D)P^{-1}$ donc $\exp(A) = L(A)$.

7. Par récurrence immédiate, on a $\forall k \in \mathbb{N},\ v^k(x) = \lambda^k x$ donc, si $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k$, $P(v)(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k v^k(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\lambda^k x = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\lambda^k\right) x$ soit $P(v)(x) = P(\lambda)x$.

8. **(a)** Tout x de E s'écrit $x = \sum_{j=1}^{r} x_j$ avec $x_j \in E_j$ donc

$$l_i(v)(x) = \sum_{j=1}^{r} l_i(x_j) \underset{[\mathbf{7}]}{=} \sum_{j=1}^{r} l_i(\lambda_j)x_j \underset{[\mathbf{4.a}]}{=} x_i$$

donc $p_i = l_i(v)$est le projecteur sur E_i, parallèlement à $\bigoplus_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{r} E_k$.

(b) On a donc $\exp(A) \underset{[\mathbf{6}]}{=} L(A) \underset{[\mathbf{4.b}]}{=} \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i(A) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} l_i\left(\operatorname{Mat}\big(v, \mathcal{B}\big)\right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \operatorname{Mat}\big(l_i(v), \mathcal{B}\big)$ ce qui donne avec [**a**], $\exp(A) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{e}^{\lambda_i} \operatorname{Mat}\big(p_i, \mathcal{B}\big)$.

.

Partie III

9. Si u était diagonalisable, son polynôme minimal aurait des racines simples. Donc u n'est pas diagonalisable .

10. Prenons $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$: on a $\chi_A(X)=(X-1)^2(X-2)$ donc $\pi_A(X)=(X-1)^m(X-2)$ avec $1\leqslant m\leqslant 2$. Mais $E_1(A)=\mathbb{R}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable donc $m\neq 1$ et A répond à la question.

11. Puisque $\pi=(X-1)^2(X-2)$ est annulateur pour u, on a $E=\operatorname{Ker}\big[\pi(u)\big]=\operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\circ(u-2\mathrm{id})\big]$. Or $(X-1)^2$ et $X-2$ sont premiers entre eux donc le théorème de décomposition des noyaux donne $E=\operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]\oplus\operatorname{Ker}\big[u-2\mathrm{id}\big]$.

12. $(u-\mathrm{id})^2+u\circ(2\mathrm{id}-u)=(u^2+2u+\mathrm{id})+(2u-u^2)$ soit $p+q=\mathrm{id}$.

13. ◇ Selon [**11**], tout $x\in E$ s'écrit $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$ et $x_2\in\operatorname{Ker}\big[u-2\mathrm{id}\big]$. On a alors

$p(x)=p(x_1)+p(x_2)=p(x_1)+(\mathrm{id}-q)(x_2)=(u-\mathrm{id})^2(x_1)+x_2+u\circ(u-2\mathrm{id})(x_2)=0_E+x_2+0_E$

donc $p(x)=x_2$. Donc p est le projecteur sur $\operatorname{Ker}\big[u-2\mathrm{id}\big]$, parallèlement à $\operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$.

◇ $q(x)=x-p(x)=x_1$ donc q est le projecteur sur $\operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$, parallèlement à $\operatorname{Ker}\big[u-2\mathrm{id}\big]$.

14. (a) $\forall x\in E,\ p(x)\in\operatorname{Ker}\big[u-2\mathrm{id}\big]$ donc $\forall x\in E,\ (u-2\mathrm{id})(p(x))=0_E$.

(b) La démonstration vue à la question [**7**] donne $\forall x\in E,\ u^k(p(x))=2^kp(x)$ donc $u\circ p=2^kp$.

(c) Donc, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{u^k}{k!}\right)\circ p=\sum_{k=0}^{N}\frac{u^k\circ p}{k!}=\sum_{k=0}^{N}\frac{2^kp}{k!}=\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{2^k}{k!}\right)p$. Or l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$: $v\mapsto v\circ p$ est continue car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie. De même, l'application linéaire $t\mapsto tp$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(E)$. En passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient $\exp(u)\circ p=\mathrm{e}^2\,p$.

15. ◇ $\forall x\in E,\ q(x)\in\operatorname{Ker}\big[(u-\mathrm{id})^2\big]$ donc $\forall k\geqslant 2,\ (u-\mathrm{id})^k(q(x))=(u-\mathrm{id})^{k-2}\big[(u-\mathrm{id})^2(q(x))\big]=(u-\mathrm{id})^{k-2}(0_E)=0_E$ donc $\forall k\geqslant 2,\ (u-\mathrm{id})^k\circ q=0_{\mathcal{L}(E)}$.

◇ **Méthode 1:** *en utilisant le résultat hors-programme :* $\big(v\circ w=w\circ v\big)\Rightarrow\big(\exp(v+w)=\exp(v)\circ\exp(w)\big)$.

Ainsi $\forall N\geqslant 2$, $\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{(u-\mathrm{id})^k}{k!}\right)\circ q=q+(u-\mathrm{id})\circ q=u\circ q$ donc, comme au [**14.c**], en passant à la limite $\exp(u-\mathrm{id})\circ q=u\circ q$. D'autre part, le résultat du [**8**] s'applique à l'identité et donc $\exp(\mathrm{id})=\mathrm{e}^1\,\mathrm{id}$. Comme id et $u-\mathrm{id}$ commutent, on a $\exp(u)\circ q=\exp(\mathrm{id}+u-\mathrm{id})\circ q=\exp(\mathrm{id})\circ\exp(u-\mathrm{id})\circ q=u\circ q=\mathrm{e}\,\mathrm{id}\circ u\circ q$ donc $\exp(u)\circ q=\mathrm{e}\,u\circ q$.

Méthode 2: *en restant dans le cadre du programme .*

Effectuons la division euclidienne de X^k par $(X-1)^2$: $X^k=Q_k(X)(X-1)^2Q_k(X)+a_kX+b_k$. En appliquant en 1, on a $1=a_k+b_k$ et en prenant la dérivée en 1, on trouve $k=a_k$. Ainsi $\forall k\in\mathbb{N}$, $u^k\circ q=\big[Q_k(u)\circ(u-\mathrm{id})^2+k\,u+(1-k)\,\mathrm{id}\big]\circ q=Q_k(u)\circ(u-\mathrm{id})^2\circ q+k\,u\circ q+(1-k)\,q=k\,u\circ q+(1-k)\,q$ donc

$$\exp(u)\circ q=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}\right)u\circ q+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1-k}{k!}\right)q=\left(\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\right)u\circ q+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}\right)q=\mathrm{e}\,u\circ q.$$

.

16. Ainsi $\exp(u) = \exp(u)\circ \mathrm{id} = \exp(u)\circ(p+q) = \exp(u)\circ p + \exp(u)\circ q = \mathrm{e}^2\, p + \mathrm{e}\, u\circ q$ et les résultats précédents donnent $\underline{\exp(u) = \mathrm{e}^2\,(u-\mathrm{id})^2 - \mathrm{e}\,u^2\circ(u-2\mathrm{id})}$.

Partie IV

17. $\underline{\mathrm{d}(x,F) = \big\|x - p_F(x)\big\|}$.

18. $\left(\frac{n}{\|n\|}\right)$ est une base orthonormée de $H^\perp$ donc $p_{H^\perp}(x) = \left\langle \frac{n}{\|n\|}, x\right\rangle \frac{n}{\|n\|} = \frac{\langle n,x\rangle}{\|n\|^2}\, n$ et $x - p_H(x) = p_{H^\perp}(x)$ donc $\underline{\mathrm{d}(x,H) = \frac{|\langle n,x\rangle|}{\|n\|}}$.

19. (a) $\diamond$ Tr est une forme linéaire non nulle et $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ donc $\underline{H \text{est un hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\diamond$ $M \in H \iff \mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}({}^tI_nM) = \langle I_n, M\rangle = 0$ donc $H = \{I_n\}^\perp$ et donc $H^\perp = \big(\{I_n\}^\perp\big)^\perp$ soit $\underline{H^\perp = \mathbb{R}.I_n}$.

(b) La formule du [**18**] donne donc $\underline{\mathrm{d}(x,H) = \frac{|\mathrm{Tr}(M)|}{\sqrt{n}}}$.

20. $\diamond$ $y \in F$ si et seulement si $\exists\, t\in\mathbb{R},\ y = (t,0)$ donc $N_\infty(x-y) = \mathrm{Max}\,(|1-t|,1)$. Donc $\forall y\in F,\ N_\infty(x-y) \geqslant 1$ et $N_\infty(x-(1,0)) = 1$ donc $\underline{\mathrm{d}_\infty(x,F) = 1}$.

$\diamond$ $\Big(m\in F \text{ et } N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\Big) \iff \Big(\exists\, t\in\mathbb{R},\ m=(t,0) \text{ et } \mathrm{Max}\,(|1-t|,1) = 1\Big)$

$\iff \Big(\exists\, t\in\mathbb{R},\ m=(t,0) \text{ et } |1-t|\leqslant 1\Big)$

$\iff \Big(\exists\, t\in[0,2],\ m=(t,0)\Big)$

donc $\underline{\big\{m\in F \mid N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\big\} = [0,2]\times\{0\}}$.

$\diamond$ On peut remarquer que, contrairement au cas euclidien, la distance est atteinte en plusieurs vecteurs $m\in F$. Si on veut en dire un peu plus, on peut remarquer que pour une norme N quelconque dans un espace de dimension finie

$\big\{m\in F \mid N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\big\}$ est une partie non vide, convexe et compacte de F.

En effet, posons $d = \mathrm{d}_\infty(x,F)$ et $\mathcal{C} = \big\{m\in F \mid N_\infty(x-m) = \mathrm{d}_\infty(x,F)\big\}$, on a:

- $d \leqslant N(x-0_E)$ car $0_E\in F$ donc $d = \mathrm{Inf}\big\{N(x-y) \mid y\in F\cap B(x,N(x))\big\}$ et, comme $y\mapsto N(x-y)$ est continue sur E et que $F\cap B(x,N(x))$ est un compact en tant qu'intersection de F fermé et de $B(x,N(x))$ compact, cette borne inférieure et atteinte ce qui montre $\mathcal{C}\neq\emptyset$.
- $\mathcal{C} = F\cap S(x,d)$ est un compact, comme ci-dessus en tant qu'intersection de F fermé et de $S(x,d)$ compact.
- Si $(m_1,m_2)\in\big(\mathcal{C}\big)^2$ et $\alpha\in[0,1]$, on a $m_3 = \alpha\, m_1 + (1-\alpha)m_2 \in F$ et

$$d \leqslant N\big[x-m_3\big] = N\big[\alpha(x-m_1) + (1-\alpha)(x-m_2)\big] \leqslant \alpha N\big[x-m_1\big] + (1-\alpha)N\big[x-m_2\big] = d$$

donc $\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2 \in \mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}$ est convexe.

Dans le cas où F est une droite, $\mathcal{C}$ est donc un segment.

.

Mamouni My Ismail

Contrôle 2

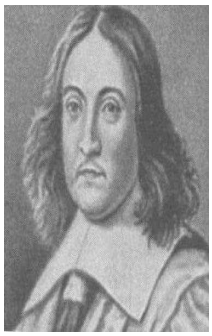
Racine d'un endomorphisme

MP-CPGE Rabat

16 Octobre 2010
Durée : 2 heures
Source : CCP 2010, PC, Math 1

Blague du jour

● A combien rouliez-vous ? demande le gendarme.
- A deux seulement, mais si vous voulez monter, il reste de la place.
● Quelle est la différence entre un agent de police et une cocotte-minute ?
Il n'y en a pas car pour tous les deux, ds qu'ils sifflent c'est cuit !
● Un gendarme fait stopper une automobile :
- Vous n'aviez pas vu le feu rouge ?
- Si si. C'est vous que je n'avais pas vu !



Pierre de Fermat (160 ?-1665)

Juriste et mathématicien français, surnommé le prince des amateurs. Il cachait ses méthodes, dont quelques-unes ont été perdues avec lui. Il s'est aussi aux sciences physiques ; on lui doit notamment le Principe de Fermat en optique. Il est le premier inventeur du calcul différentiel dont il est un précurseur : il est le premier utiliser la formule (sinon le concept) du nombre dérivé (découvert par un grand mathématicien indien, Aryabhata). Il pose avec Blaise Pascal les bases du calcul des probabilités. Fermat est l'inventeur d'une méthode de démonstration : la descente infinie

Mathématicien du jour

Notations et objectifs

Dans tout ce problème n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f, Ker (f) et Im (f) désigneront respectivement le noyau et l'image de f.

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\mathrm{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Étant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par : $P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$ où $f^0 = \mathrm{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^\star$) alors $\prod_{1 \leqslant i \leqslant q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \ldots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

PARTIE I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que f est diagonalisable.

2) Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

3) Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

4) Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.

5) Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).

6) Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

7) Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

2) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^\star$, $f^m = \mathrm{id} + \dfrac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

3) Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

4) Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5) Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

6) Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

7) Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

8) En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

9) Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

.

PARTIE II

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda\neq\mu \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{id} &= & p+q \\ f &= & \lambda p+\mu q \\ f^2 &= & \lambda^2 p+\mu^2 q \end{cases}$$

1) Calculer $(f-\lambda\mathrm{id})\circ(f-\mu\mathrm{id})$. En déduire que f est diagonalisable.

2) Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.

3) Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p\circ q=q\circ p=0$ puis montrer que $p^2=p$ et $q^2=q$.

4) On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu\neq 0$.
Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.

5) Montrer que pour tout $m\in\mathbb{Z}$:

$$f^m=\lambda^m p+\mu^m q$$

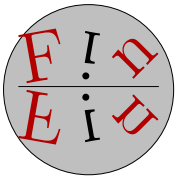
6) Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.

7) On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f)\cap F$.

8) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2=I_k$.

9) Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p'\in\mathcal{L}(E)\setminus F$ tel que $p'^2=p$ et $p'\circ q=q\circ p'=0$.

10) En déduire que si $\dim(E)\geqslant 3$, alors $\mathcal{R}(f)\not\subset F$.



.

Mamouni My Ismail

Corrigé Contrôle 2

Racine d'un endomorphisme

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Une administration envahi de souris, fait appel à un dératiseur qui, sans succès, décide de laisser un chat sur place pour quelque temps. Et très vite, on ne voit plus aucune souris. Le responsable de l'administration, très content des services du chat demande au dératiseur de laisser le chat rester dans les locaux. Quelques mois plus tard, les souris font leur réapparition dans le bâtiment... Le gars refait passer le dératiseur et lui demande ce qui a pu se passer. Le dératiseur répond :
- C'est le chat... Maintenant qu'il est titularisé...

Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

Mathématicien français. Il fit d'importantes contributions à la statistique, à la théorie des nombres, aux algèbres abstraites et à l'analyse. Une grande partie de son travail fut perfectionné par d'autres : son travail sur les racines des polynômes inspira la théorie de Galois ; le travail de Abel sur les fonctions elliptiques fut construit sur celui de Legendre ; certains travaux de Gauss en statistique et en théorie des nombres complétèrent ceux de Legendre.
Dans ses travaux de géométrie, Legendre reste connu pour avoir tenté de démontrer en vain le cinquième postulat d'Euclide. En arithmétique d'avoir finalisé la preuve du dernier théorème de Fermat pour $n = 5$, d'avoir apport des éléments de preuve la loi de réciprocité quadratique, conjecture par Euler et prouve ultérieurement par Gauss. Et enfin son théorème : le nombre d'entiers premiers supérieur à x est équivalent $\frac{x}{\ln x}$.

Mathématicien du jour

PARTIE 1

A

1 $\chi_A(X) = X(X-1)(X-4)$ est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

2 $v_1 = (-1,1,0), v_2 = (0,-2,1)$ et $v_3 = (1,0,1)$. $D = \mathrm{diag}(0,1,4)$.

3 $A^m = PD^mP^{-1}$.

4 $H^2 = D \Longrightarrow HD = H^3 = DH$.

5 Posons $H = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$, en résolvant le système de 9 équations issues de la relation $HD = DH$, on obtient $b = c = d = f = x = y = 0$, d'où $H = \mathrm{diag}(a,e,z)$ et enfin $A = P^{-1}HP = \begin{pmatrix} -a & 0 & z \\ -\frac{a}{2} & -\frac{e}{2} & -\frac{z}{2} \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$.

B

1 $J^2 = 3J$ et par récurrence $J^m = 3^{m-1}J$ pour $m \geq 1$, mais $J^0 = I_3$.

2 On remarque que $A = I_3 + J$ avec $I_3.J = J.I_3$, donc $A^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m} J^k = I_3 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{k}{m} 3^k\right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$

3 $f^2 = id + 5j = id + 5(f - id) = 5f - 4id$, donc $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ est un polynôme annulateur de f, d'où π_f divise $(X-1)(X-4)$, mais $f \neq id$ et $f \neq 4id$, d'où $\pi_f = (X-1)(X-4)$ donc $sp(f) = \{\lambda = 1, \mu = 4\}$.

4 A est diagonalisable car symétrique, donc f est diagonalisable, d'où $E = E_\lambda \oplus E_\mu$, soit p et q les projections adaptés à cette écriture, d'après le principe de décomposition spectrale, on a $\forall x \in E$, $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = p(x) \in E_\lambda$ et $x_2 = q(x) \in E_\mu$, ainsi $f^m(x) = f^m(x_1) + f^m(x_2) = \lambda^m x_1 + \mu^m x_2 = \lambda^m p(x) + \mu^m q(x)$, donc $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.
Montrons que p et q sont linéairement indépendants. En effet $\alpha p + \beta q = 0 \Longrightarrow \alpha p(x) + \beta q(x) = 0$, $\forall x \in E$, en particulier pour $x \in E_\lambda$ et $x \neq 0$ on obtient $p(x) = x, q(x) = 0$, donc $\alpha = 0$ et pour $x \in E_\mu$ on trouve $\beta = 0$.

5 $p^2 = p, q^2 = q, p \circ q(x) = 0$ car $q(x) \in E_\mu$ et aussi $q \circ p = 0$.
Soit $h = \alpha p + \beta q$ tel que $h^2 = f$, donc $\alpha^2 p + \beta^2 q = \lambda p + \mu q$, or $\{p, q\}$ est libre, d'où $\alpha^2 = \lambda = 1$ et $\beta^2 = \mu = 4$.

6 f diagonalisable, déjà fait.
Les calculs des éléments propres de f effectués sur sa matrice donnent $\dim E_1 = 2$ dont une base est $v_1 = (-1, 0, 1), v_2 = (-1, 1, 0)$ et $\dim E_4 = 1$ dont une base est $v_3 = (1, 1, 1)$.
$D = diag(1, 1, 4)$, la matrice de p est $diag(1, 1, 0)$ celle de q est $diag(0, 0, 1)$.

7 $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8 Prendre h l'endomorphisme associé à la matrice Y dans la base propre (v_1, v_2, v_3), on a $h^2 = f$ car $Y^2 = D$ mais $h \neq \alpha p + \beta q$ car sinon sa matrice dans la base (v_1, v_2, v_3) serait sous la forme $Y = diag(\alpha, \alpha, 4\beta)$ diagonale.

PARTIE II

1 $(f - \lambda id) \circ (f - \mu id) = f^2 - (\lambda + \mu)f + \lambda\mu id = \lambda^2 p + \mu^2 q - (\lambda + \mu)(\lambda p + \mu q) + \lambda\mu(p + q) = 0$.
Ainsi $(X - \lambda)(X - \mu)$ est un polynôme annulateur de f à racines simples, donc f est diagonalisable.

2 D'après 1 $sp(f) \subset \{\lambda, \mu\}$, supposons que $sp(f) = \{\lambda\}$ (par exemple), comme f est diagonalisable, alors $\pi_f = (X - \lambda)$ donc $f = \lambda id$, d'où $\lambda p + \mu q = \lambda p + \lambda q$, or $q \neq 0$, donc $\lambda = \mu$ (absurde). Donc $sp(()f) = \{\lambda, \mu\}$.

3 $f = \lambda p + \mu q$ et $id = p + q$, donc $f - \lambda id = (\mu - \lambda)q$ et $f - \mu id = (\lambda - \mu)q$, d'après la question 1, on conclut que $-(\lambda - \mu)^2 p \circ q = 0$, d'où $p \circ q = 0$. De même $q \circ p = 0$ car $(f - \mu id) \circ (f - \lambda id) = (f - \mu id) \circ (f - \lambda id) = 0$.
D'autre part $id = p + q$, en composant par p, on obtient $p^2 = p$ et si on compose par q, on obtient $q^2 = q$.

4 Si $\lambda\mu \neq 0$, alors $0 \notin sp(f)$, donc f est un isomorphisme avec $f^2 - (\lambda + \mu)f = -\lambda\mu id$, i.e : $f \circ (f - (\lambda + \mu)id) = -\lambda\mu id$, donc $f^{-1} = -\frac{1}{\lambda\mu}(f - (\lambda + \mu)id) = -\frac{1}{\lambda\mu}(\lambda p + \mu q - (\lambda + \mu)(p + q)) = \frac{p}{\lambda} + \frac{\mu}{q}$.

5 Par récurrence pour $m \in \mathbb{N}$ avec $f^{m+1} = f^m \circ f$.
Pour les puissance négatives, vérifier que $(\lambda^m p + \mu^m q) \circ (\lambda^{-m} p + \mu^{-m} q) = \mathrm{id}$, donc $f^{-m} = (f^m)^{-1} = (\lambda^m p + \mu^m q)^{-1} = \lambda^{-m} p + \mu^{-m} q$.

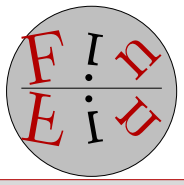
6 $\dim F = 2$ car $\{p, q\}$ est libre, en effet, si $ap + bq = 0$, on compose par p donc $ap^2 = ap = 0$, d'où $a = 0$ et de même $b = 0$.

7 $g \in \mathcal{R} \cap F \Longrightarrow g = ap + bq$ et $g^2 = f$, d'où $g^2 = a^2 p + b^2 q = f = \lambda p + \mu q$, or $\{p, q\}$ est libre, donc $a^2 = \lambda$ et $b^2 = \mu$, d'où $a = \pm\sqrt{\lambda}$ et $b = \pm\sqrt{b}$.

8 $K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{k-2} \end{pmatrix}$.

9 On a $E = E_\lambda \oplus E_\mu$ car f est diagonalisable et p, q sont ses projecteurs spectraux, donc les matrices respectives de p et q dans une base adaptée seront de la forme $P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix}$ avec k et r les multiplicités respectives de λ et μ dans χ_f. Soit p' l'endomorphisme associé dans cette même base à la matrice $P' = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifiant $K^2 = I_k$. K n'est pas diagonale donc $p' \notin F$, d'autre part $P'^2 = P$ et $P'Q = QP' = 0$.

10 Si $\dim E \geq 3$, alors une des valeurs propres (λ, par exemple) admet une multiplicité supérieure à 2, soit $g = \sqrt{\lambda} p' + \sqrt{\mu} q$, on a $g^2 = \lambda p'^2 + \mu q = f$, donc $g \in \mathcal{R}(f)$, mais $g \notin F$, car sinon $\sqrt{\lambda} p' + \sqrt{\mu} q = ap + bq \Longrightarrow p' = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(ap + (b - \sqrt{\mu})q) \in F$ (contradiction).



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir libre 7
Dualité

MP-CPGE Rabat

22 Octobre 2010

Blague du jour

• C'est l'histoire de deux complexes z_1 et z_2 qui se promènent dans le demi-plan inférieur des complexes. Vexés d'être délaissés dans cette zone inférieure à cause leurs parties imaginaires négatives, il se disent : Barrons-nous !

• Pourquoi, après un diner dans un restaurant chinois, les mathématiciens préfèrent-ils emporter les restes à la maison ?
Réponse : Parce qu'ils connaissent le théorème des restes chinois !

Léopold Kronecker (1823-1891)

Mathématicien et logicien allemand. Persuadé que l'arithmétique et l'analyse doivent être fondés sur les nombres entiers , il fût en opposition avec George Cantor au sujet de quelques-unes de ses extensions mathématiques. Le finitisme de Kronecker fait de lui un précurseur de l'intuitionnisme dans les fondements des mathématiques. Kronecker contribue également au concept de la continuité, reconstruisant la forme des nombres irrationnels dans les nombres réels. En analyse, Kronecker rejette la formulation d'une fonction continue partout mais nulle part dérivable de son collègue, Karl Weierstrass.

Mathématicien du jour

Remerciements pour Mr Taibi Mimoun, MP*, CPGE My Youssef, pour la source latex du problème

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension supérieure strictement à 1 . A un vecteur non nul de E et u une forme linéaire non nulle sur E .
Pour n un entier, $n \geq 2$; on note t $\mathcal{M}_n^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n$.

La matrice $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n$ dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve à la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne, qui vaut 1.

Si $M = (m_{i,j}) \in M_n$, on note $T(M)$ ou $T_n(M)$ le réel $\sum_{i=1}^{n} m_{i\,i}$ appelé trace de M.

Partie I

1 Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall x \in E, \quad f(x) = u(x)A$

a) Quel est le rang de f ?

b) Pour p entier naturel, déterminer f^p en fonction de p, f, u et A .

c) Déterminer les éléments propres de f.

Dans toute la suite de la partie I, on suppose que E est de dimension finie, avec $\dim E = n > 1$.

2 Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que f soit diagonalisable .

3 Soit g un endomorphisme de E de rang 1 .

a Monter que, pour que g soit diagonalisable il faut et il suffit que l'endomorphisme g^2 soit non nul .

b On suppose que $g^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle g a pour matrice :

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{notée encore } E_{1,n}.$$

4 Trace d'une matrice carrée- Trace d'un endomorphisme :

a Montrer que l'application $T : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, $M \mapsto T(M)$ est une forme linéaire.

b Montrer que : $T(AB) = T(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace .

La trace d'un endomorphisme g d'un espace vectoriel E de dimension finie , notée $T(g)$, est la trace de sa matrice relativement à une base quelconque de E.

c Soit ρ un projecteur de E. Montrer que $T(\rho) = rg(\rho)$.

5 Soit G un sous-ensemble fini non vide de $GL(E)$ stable par produit, de cardinal q (($GL(E), \circ$) groupe linéaire de E) et $F = \{x \in E \,/\, \forall g \in G \,,\, g(x) = x\}$

a Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E

b On pose $h = \dfrac{1}{q} \displaystyle\sum_{g \in G} g$. Exprimer h^2 en fonction de h

c En déduire que : $q.\dim(F) = \displaystyle\sum_{g \in G} T(g)$.

d Que dire de l'endomorphisme $\displaystyle\sum_{g \in G} g$ lorsque $\displaystyle\sum_{g \in G} T(g) = 0$?

6 a Montrer que deux matrices carrées de rang 1, sont semblables si, et seulement si elles ont même trace .

b Soit $g \in L(E)$ tel que $rg(g) = T(g) = 1$. Montrer que g est un projecteur de E.

7 Trouver une matrice carrée inversible P telle que :

$$P.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.P$$

8 Soit $M \in \mathcal{M}_n$ de rang 1.

Trouver une relation entre M^2 et M.

Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_3$ telle que $M^2 = 0$.

Partie II

On suppose que A n'appartient pas à $\ker(u)$. Soit alors l'endomorphisme h de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = u(A)x - u(x)A$$

9 Quelle est la restriction de h à $\ker(u)$?

10 Soit p un entier naturel. Déterminer h^p en fonction de p, h, u et A

11 Déterminer $\ker(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$.

12 a Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de h .

b Lorsque E est de dimension finie, h est-il diagonalisable ?

13 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in E$ donnés, on considère l'équation d'inconnue $x \in E$:

$$\alpha x - u(x)A = B$$

Résoudre et discuter cette équation en fonction de α, u, A et B.

14 Appliquer à la résolution des deux équations suivantes :

a $T(A).X - T(X)A = {}^tA - A$
(A matrice carrée donnée de $\mathcal{M}_n$ de trace non nulle, X inconnue de $\mathcal{M}_n$)

b $\forall x \in [0,\pi]$, $f(x) - \sin(x)\int_0^\pi f(t)dt = \sin(\frac{x}{2})$ (d'inconnue f, fonction continue sur $[0,\pi]$)

Partie III

A chaque U dans $\mathcal{M}_n$, on associe l'application T_U de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$

15 Montrer que, pour U dans $\mathcal{M}_n$, T_U est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$.
Pour $U \in \mathcal{M}_n$, on note $\ker(T_U)$ par H_U.

16 Soit U dans $\mathcal{M}_n$.

a Si U est la matrice nulle, déterminer $\ker(T_U)$.

b Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0,j_0}) \neq 0$
Décrire alors $\mathrm{Im}(T_U)$, puis déterminer la dimension de H_U.

17 Pour $(i,j) \in \{1,2,...n,\}^2$, on note $T_{i,j} = T_{E_{i,j}}$

a Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{i,j}(E_{k,l})$.

b En déduire que les n^2 élements $T_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n^*$ permettent de définir une base de $\mathcal{M}_n^*$.

c Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_n$ vers $\mathcal{M}_n^*$: $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels .

18 On considère H un hyperplan vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

a Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$ qui n'appartient pas à H, montrer que : $\mathcal{M}_n = H \oplus vect(A)$.

b Construire alors un élément l de $\mathcal{M}_n^*$ tel que $H = \ker(l)$.

c Prouver l'existence d'un élément U de $\mathcal{M}_n$, non nul, tel que $H = H_U$.

19 Pour $1 \leq r \leq n$, on note $J_r = \sum_{i=1}^{r} E_{i,i}$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

a Prouver que A est inversible .

b Prouver que A appartient à l'hyperplan H_{J_r} .

20 Conclure que chaque hyperplan H de $\mathcal{M}_n$ possède au moins une matrice inversible .

Partie IV

Soient p et n deux entiers non nuls et $\Psi : \mathcal{M}_p \to \mathcal{M}_n$ un morphisme d'algèbres ie :

$$\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_n) \text{ et vérifie : } \forall A, B \in \mathcal{M}_p, \Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$$

21 Montrer que si $A \in GL_p(\mathbb{R})$, alors $\Psi(A) \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculer l'inverse de $\Psi(A)$.

22 Monter que si A et B sont équivalentes dans $\mathcal{M}_p$, alors $\Psi(A)$ et $\Psi(B)$ sont équivalentes dans $\mathcal{M}_n$.

23 Soit $A \in \mathcal{M}_n$, montrer que l'application $\varphi_A : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, $M \mapsto T_n(MA)$ est une forme linéaire.

24 Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n^*$, $A \mapsto \varphi_A$

a Montrer que φ est linéaire et déterminer $\ker(\varphi)$

b Que dire de φ ?

25 Soit $f \in \mathcal{M}_n^*$ telle que : $\forall M, N \in \mathcal{M}_n$, $f(MN) = f(NM)$ (1)
Montrer que f est proportionnelle à la trace.

26 Montrer que $T_n \circ \Psi \in \mathcal{M}_p^*$ et que $T_n \circ \Psi = \frac{n}{p} T_p$

27 Soit $P \in \mathcal{M}_n$ telle que $P^2 = P$.
Montrer que $rg(\Psi(P)) = \frac{n}{p}.rg(P)$, en déduire que p divise n.

28 Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$, on a : $rg(\Psi(M)) = \frac{n}{p} rg(M)$
En déduire que si $p = n$, l'application Ψ est un automorphisme.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°1

Dualité-Réduction

MP-CPGE Rabat

Lundi 1èr Novembre
Durée : 4 heures

Blague du jour

- Que dit 8 en rencontrant 0 ?

Réponse : Il ne fait pas de régime lui !

- Et que dit 0 en rencontrant 8 ?

Réponse : Belle ceinture !

- Et puisqu'il est toujours question de 8, que vaut 8 divisé par 2 ?

Réponse : Verticalement, ça donne 3, horizontalement, ça donne 0.

Issai Schur (1875-1941)

Mathématicien russe, étudiant de Frobenius en Allemagne. Il travaillait surtout sur la théorie de représentation des groupes, mais aussi sur la théorie des nombres et combinatoire.
Parmi ses étudiants, Richard Brauer, B. H. Neumann et Richard Rado. Il était aussi membre de l'Académie Russe des Sciences.

Mathématicien du jour

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 Exercice : Dualité (Transposée et lemme de Shur)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle transposée de f, l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} {}^t f : & E^* & \longrightarrow & E^* \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

1 Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} {}^t : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E^*) \\ & f & \longmapsto & {}^t f \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

2 a Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, exprimer ${}^t(g \circ f)$ en fonction de ${}^t g$ et ${}^t f$.

b Calculer ${}^t \mathrm{id}_E$.

c En déduire que f est un automorphisme de E si et seulement si ${}^t f$ est un automorphisme de E^*, exprimer dans ce cas ${}^t f^{-1}$ en fonction de ${}^t f$.

3 Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et M la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$. Exprimer la matrice de ${}^tf$ relativement la base duale $\mathcal{B}^*$ en fonction de M.

4 Dire comment répondre aux questions précédentes avec un argument matriciel.

5 Montrer que $\operatorname{Im} {}^tf = (\ker f)^\perp$ et que $\ker {}^tf = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

6 En déduire que :

a ${}^tf$ est injective si et seulement si f est surjective.

b ${}^tf$ est surjective si et seulement si f est injective.

7 Lemme de Schur : Tout endomorphisme en dimension finie qui laisse stable tout hyperplan est une homothétie.

a Montrer que si f laisse stable un hyperplan H, alors ${}^tf$ laisse stable laisse stable tous ses supplémentaires $\mathbb{K}x_0^*$ où $x_0 \in E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

b Montrer que si $\{x, f(x)\}$ est liée pour tout $x \in E$, alors f est une homothétie

c Montrer qu'un endomorphisme qui laisse stable toutes les droites est forcément une homothétie.

d En déduire le lemme de Schur.

2 Problème : Réduction, source : CCP, MP, 2008.

MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.
Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$. On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à diagonale propre si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X)$$

On pourra noter en abrégé : A est une MDP pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

2.1 EXEMPLES

Question préliminaire : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\chi_M(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(M)X^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M))X + \det(M)$.

1 Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$

a Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.

b Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?

3 Cas $n = 2$. Déterminer $\mathcal{E}_2$.

2.2 TEST DANS LE CAS $n = 3$

4 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}

5 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes : $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$

6 Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), démontrer que

$$\det M = (\det A)(\det C)$$

(on pourra utiliser les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ en donnant des précisions sur les tailles des matrices qui interviennent).

7 Donner un exemple d'une matrice M à diagonale propre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :

a La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).

b $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

2.3 QUELQUES PROPRIÉTÉS

8 Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $a^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.

9 Montrer que pour toute matrice à diagonale propre, M, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M - xI_n$ soit inversible et à diagonale propre pour tout $0 < x < \varepsilon$.

10 Matrices trigonalisables

a Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?

b Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

c Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.

11 Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2.4 MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

12 Question préliminaire

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{tr}({}^tAA)$.

13 Matrices symétriques à diagonale propre

a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, ..,\lambda_n$. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

14 Matrices antisymétriques à diagonale propre

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.

b) Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.

c) Conclure que A est la matrice nulle.

2.5 SOUS-ESPACE VECTORIEL MAXIMAL DANS $\mathcal{E}_n$

15 Question préliminaire

Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on ne demande aucune démonstration, la réponse suffit).

16 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$. Démontrer que

$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

17 Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Bonne Chance

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé N°1

Dualité-Réduction

MP-CPGE Rabat

Lundi 1èr Novembre
Durée : 4 heures

Blague du jour

- Savez-vous pourquoi, à CUBA, il n'y a pas d'églises ?
C'est parce que les "fidèles cassent trop".
- Docteur, j'ai des trous de mémoire, que dois-je faire ?
- Me payer d'avance, madame !
- Un professeur de médecine à ses étudiants : Qui provoque le stress et la colère ?
- Votre cours, monsieur ; lui répondent.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

Mathématicien allemand, On lui doit l'introduction des caractères d'un groupe non commutatif. Il travaille aussi en algèbre linéaire et donne la première démonstration générale du théorème de Cayley-Hamilton. Il émet l'hypothèse, démontrée plus tard, que les polynômes minimaux et caractéristiques d'un endomorphisme ont les mêmes racines. Il démontre le théorème qui porte son nom : les seules algèbres associatives de dimension finie et sans diviseur de zéro sur le corps des nombres réels, sont le corps des nombres réels, le corps des nombres complexes et le corps des quaternions.

Mathématicien du jour

1 Corrigé Exercice : Pr Mamouni My Ismail

1 Linéarité (évidente).

Injection : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que ${}^tf = 0$, donc $\forall x \in E$, on a $\varphi(f(x)) = 0$, $\forall \varphi \in E^*$, d'où $f(x) \in (E^*)^\perp = 0$.

Bijection : ${}^t : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E^*)$ est linéaire injectif en dimension finie, avec $\dim \mathcal{L}(E) = \dim \mathcal{L}(E^*) = n^2$, donc isomorphisme.

2 a Soit $\varphi \in E^*$, ${}^t(g \circ f)(\varphi) = \varphi \circ g \circ f = {}^tf(\varphi \circ g) = {}^tf({}^tg(\varphi))$, donc ${}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$.

b ${}^t id_E = id_{E^*}$.

c Si f est un automorphisme de E, donc $id_{E^*} = {}^t id_E = {}^tf \circ f^{-1} = {}^tf \circ {}^tf^{-1}$, d'où ${}^tf$ est un automorphisme de E^*, $({}^tf)^{-1} = {}^tf^{-1}$.

Inversement, supposons que ${}^tf$ est automorphisme. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que ${}^tf^{-1} = {}^tg$, on $id_{E^*} = {}^tf \circ {}^tg = {}^tg \circ f$, d'où $g \circ f = id_E$, de même $f \circ g = id_E$, ainsi f est isomorphisme.

3 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $M = (a_{ij})$ la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et soit $N = (b_{ij})$ la matrice de ${}^tf$ relativement la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$. On a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ et ${}^tf(e_j^*) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*$,

donc ${}^tf(e_j^*)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i^*(e_k) = b_{kj}$, or ${}^tf(e_j^*)(e_k) = e_j^* \circ f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}e_j^*(e_i) = a_{jk}$. Conclusion : $N = {}^tM$.

4 Les questions précédentes découlent des relations matricielles suivantes : ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA, {}^tI_n = I_n$ et A inversible si et seulement si ${}^tA$ inversible et dans ce cas $({}^tA)^{-1} = {}^tA^{-1}$.

5 Soit $\psi \in \operatorname{Im} {}^tf$, donc $\exists \varphi \in E^*$ tel que $\psi = \varphi \circ f$, $\forall x \in \ker f$, on a $\psi(x) = \varphi \circ f(x) = 0$, donc $\psi \in (\ker f)^\perp$, d'où $\operatorname{Im} {}^tf \subset (\ker f)^\perp$, or les deux sous-espaces sont de même dimension, d'où l'égalité. Par un raisonnement similaire (à rédiger correctement), on montre que $\ker {}^tf = (\operatorname{Im} f)^\perp$.

6 En déduire que :

a ${}^tf$ est injective si et seulement si $\ker f = (\operatorname{Im} f)^\perp = 0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f = E$ si et seulement si f est surjective.

b ${}^tf$ est surjective si et seulement si f est injective (raisonnement pareil).

7 a Si f laisse stable un hyperplan H, alors pour tout $x_0 \in E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$, soit $x = x_1 + \lambda x_0 \in E$, on a on a ${}^tf(x_0^*)(x) = x_0^* \circ f(x) = x_0^*(f(x_1)) + \lambda = \lambda = x_0^*(x)$, car $f(x_1) \in H$ (f laisse stable H). Ainsi ${}^tf(x_0^*) = x_0^*$, d'où ${}^tf$ laisse stable $\mathbb{K}x_0^*$.

b Résultat classique : On a pour tout $x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, on se propose de montrer que $\lambda_x = \lambda y = \lambda$, $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, ainsi $f(x) = \lambda x$.
-1ère cas, $\{x, y\}$ liée : $y = \alpha x$, donc $f(y) = \alpha f(x)$, càd $\lambda_y y = \alpha\lambda_x x = \lambda_x y$, d'où $\lambda_x = \lambda_y$.
-2ème cas, $\{x, y\}$ libre : dans ce cas $f(x+y) = f(x) + f(y) \Longrightarrow \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$, or la famille $\{x, y\}$ est libre d'où $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.

c Soit f un endomorphisme qui laisse stable toutes les droites, donc pour tout $x \in E$, on aura $f(x) \in \mathbb{K}x$ (car $x \in \mathbb{K}x$), d'où $\{x, f(x)\}$ liée, donc f est une homothétie.

d Soit f endomorphisme en dimension finie qui laisse stable tout hyperplan de E. Soit $\mathbb{R}\varphi$ une droite de E^*, soit $x \in E$ tel que $\varphi = x^*$, donc $E = \ker \varphi \oplus \mathbb{R}x$. Ainsi f laisse stable H et ${}^tf$ laisse stable la droite $\mathbb{R}x^* = \mathbb{R}\varphi$, d'où ${}^tf = \lambda \mathrm{id}_{E^*} = {}^t(\lambda \mathrm{id}_E$, d'où $f = \lambda \mathrm{id}_E$.

2 Corrigé Problème : Pr Bruno Baudin

2.1 EXEMPLES

Question préliminaire : Les coefficients respectifs de X^3, X^2 et constant dans χ_M sont des résultats du cours, pour le coefficient de X^2 dans $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-X & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-X \end{vmatrix}$. On trouve que le coefficient de X^2 est : $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(A))$

1 a Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est
$P_{M(\alpha)}(X) = -X^3 + \operatorname{tr}(M(\alpha))X^2 - \operatorname{tr}(\operatorname{Com}(M(\alpha)))X + \det(M(\alpha))$
$= -X^3 + (5-\alpha)X^2 - (8-3\alpha)X + (4-2\alpha)$
$= (1-X)(2-X)((2-\alpha)-X)$.
Les racines de $P_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.

Pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.

b Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.
$\text{rg}(M(0) - 2I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la dimension de E_2 est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.
$\text{rg}(M(1) - I_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

$M(\alpha)$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$.

2 $P_A(X) = -X^3 + \text{tr}(A)X^2 - \text{tr}(\text{Com}(A))X + \det(A) = -X^3 - X$.
P_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc

la matrice A n'est pas à diagonale propre.

3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.
Soit $Q(X) = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$.
la matrice A est à diagonale propre si et seulement si $P_A = Q$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$.

$\mathcal{E}_2$ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.

2.2 TEST DANS LE CAS $n = 3$

4 Pour une matrice à diagonale propre, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.

Une matrice à diagonale propre est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls

Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynôme caractéristique est égal à $(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$
En développant ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve que

A est une matrice à diagonale propre si et seulement si
$\det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii}$ et $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$

6 a Si $(\det A = a_{11}a_{22}a_{33})$ et $(a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0)$
alors la matrice est MDP
sinon la matrice n'est pas MDP.

b

Les matrices à diagonale propre sont A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 et A_8

c

$a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0$

2.3 EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7 Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On note r et s les dimensions des matrices A et C.

Alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.

En développant r fois par rapport à la première colonne, on montre que

$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$

En développant s fois par rapport à la dernière ligne, on montre que

$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det A$.

On a donc bien $\det M = \det A \det C$.

8 a) Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre.

En effet, d'après la question précédente,

$$P_M(X) = \det \begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r) \det(C - XI_s) = P_A(X)P_C(X)$$

Les matrices A et C étant à diagonale propre, les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux.

On prend alors $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = A_5$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

M est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls

b) Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul.

De même qu'en a), $P_M(X) = P_A(X)P_C(X)$.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors P_A est scindé et $\mathrm{tr}A = a + d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.

On en déduit $P_A(X) = (X - e)(X - h)$ et $P_C(X) = (X - a)(X - d)$.

En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients, on obtient les relations : $\begin{cases} a + d = e + h \\ ad - bc = eh \\ eh - gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.4 QUELQUES PROPRIÉTÉS

9 On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les valeurs propres de A sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.
Les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont $a.a_{11} + b$, $a.a_{22} + b$ ... $a.a_{nn} + b$.
Ce sont les termes diagonaux de $aA + bI_n$,

$aA + bI_n$ est donc une matrice à diagonale propre.

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et ${}^t(aA + bI_n) = a\,{}^tA + bI_n$,

$a\,{}^tA + bI_n$ est donc une matrice à diagonale propre.

10 Soit $A \in \mathcal{E}_n$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \dfrac{1}{p}I_n$.
D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre.
D'autre part, $\det U_p = P_A(\dfrac{1}{p})$ est nul si et seulement si $\dfrac{1}{p}$ est valeur propre de A. U_p est donc inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

11 a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale propre.

b Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

Une matrice à diagonale propre est trigonalisable

c Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $P_A = P_B$ et P_B est scindé, donc P_A est scindé.
Si P_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

A est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si P_A est scindé.

12 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc

$\mathcal{E}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.5 MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

13 $\text{tr}({}^t\mathbf{AA}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

14 a) $\mathbf{A}$ est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{PD}{}^t\mathbf{P}$.
$\text{tr}({}^t\mathbf{AA}) = \text{tr}(\mathbf{PD}{}^t\mathbf{PPD}{}^t\mathbf{P})$
$= \text{tr}(\mathbf{PDD}{}^t\mathbf{P})$ (car ${}^t\mathbf{PP} = \mathbf{I}_n$.)
$= \text{tr}(\mathbf{D}^2)$ (car $\mathbf{PD}^{2t}\mathbf{P}$ semblable à $\mathbf{D}^2$ et deux matrices semblables ont la même trace.)
Or $\text{tr}({}^t\mathbf{AA}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\text{tr}(\mathbf{D}^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$$

b) Si de plus $\mathbf{A}$ est une matrice à diagonale propre, alors les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.
Donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 = 0$, la matrice $\mathbf{A}$ est une matrice diagonale.
Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc les matrices diagonales.

15 a) $\mathbf{A}$ est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles. On a donc $\mathbf{P_A(X)} = (-1)^n\mathbf{X}^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton

$$\boxed{\mathbf{A}^n = 0.}$$

$({}^t\mathbf{AA})^n = (-\mathbf{AA})^n = (-1)^n\mathbf{A}^{2n} = 0.$

$$\boxed{({}^t\mathbf{AA})^n = 0.}$$

b) ${}^t\mathbf{AA}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.
$({}^t\mathbf{AA})^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de ${}^t\mathbf{AA}$ sont nulles.
On en déduit

$$\boxed{{}^t\mathbf{AA} = 0.}$$

c) De ce qui précède, on déduit que $\text{tr}({}^t\mathbf{AA}) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$.

$\mathbf{A}$ est donc la matrice nulle.

2.6 DIMENSION MAXIMALE D'UN ESPACE VECTORIEL INCLUS DANS

16 $\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

17 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.
Donc $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$
On en déduit $\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\boxed{\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}.}$$

Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$.

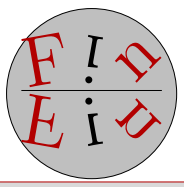
La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$ est donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

18 On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec
$A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ qui n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.
Les matrices A et C sont à diagonale propre et d'après ce que l'on a vu dans la question 8., on en déduit que M est à diagonale propre et que donc $F \subset \mathcal{E}_n$.

On a déterminé un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir libre N°8

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Extrait du CNC 2001, MP.

Blague du jour

● Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de notes et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sûr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de notes !
● C'est l'histoire de deux fous qui marchent dans la rue, un des deux prend une saleté dans sa main et dit à son ami : En plus que fou tu es aveugle, regarde sur quoi on allait marcher !

Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. Il propose une définition possible d'une suite divergente, connue aujourd'hui comme "Somme de Cesàro", donne par la limite de la moyenne des sommes des termes partiels de la succession. En théorie des nombres, il est l'origine du résultat suivant : Soit p et q deux nombres entiers choisis aléatoirement. La probabilité pour qu'ils soient premiers entre eux est gale 0,6.
Il fut professeur universitaire jusqu'à sa mort survenue alors qu'il tenta de sauver son plus jeune fils Manlio qui était en train de se noyer.

Mathématicien du jour

Dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|.\| : A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$; $G(\mathbb{K})$ désigne $GL_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $GL_n^+(\mathbb{R})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg(\pi_A) = n-1\}.$$

On admet le résultat suivant : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. $\deg \pi_A = n-1$ si et seulement si existe une matrice P dans $GL_n(\mathbb{K})$ et $a_0, \ldots, a_{n-2}$, α, éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{1}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$.

1 Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A \mapsto \det(A)$ est continue et que $G(\mathbb{K})$ est un ouvert.

2 Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

3 Soit $(A,H) \in GL_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A+H$ est une matrice inversible et exprimer $(A+H)^{-1} - A^{-1}$ comme limite d'une suite convergente.
(On pourra écrire $A+H = A(I_n + A^{-1}H$.)

4 En déduire que l'application $\mathcal{I} : G(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ est continue.

5 Soient A et B deux éléments de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x, coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.

6 Soient $z_1, \ldots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$,

soit $\phi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \phi(t) = \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ avec $\gamma(t) = \begin{cases} t(1+2ir) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

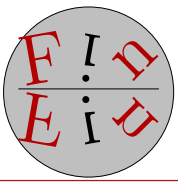
7 Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.

8 Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ et conclure.
(Si $I = \{i \in \{1,\ldots,p\}, \text{Im } z_i > 0\}$ n'est pas vide, choisir $r < \min\{\text{Im } z_i, i \in I\}$.)

9 On admet que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice de la forme (1), montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in G(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.

10 Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \ldots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \ldots, a_{n-2}$ respectivement par $ta_1, \ldots, ta_{n-2}$, α par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} ta_k(t\alpha)^k - a_0$, montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue ; calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

11 Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre N°8 (Mamouni My Ismail)

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Quel sont les deux animaux les plus intelligents ? - Le Cerf et le Veau (cerveau)
- C'est un chien qui rencontre un crocodile :

- Le crocodile dit au chien : Salut, sac à puces !
- Et le chien lui répond : Salut, sac à main !

John Wallis (1616-1703)

Mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society. Ses travaux concernent principalement le calcul différentiel et intégral. On lui doit le symbole de l'infini ∞.

Mathématicien du jour

1 On sait que le déterminant est une forme n-linéaire donc continue.

D'autre part $\mathbf{G}(\mathbb{C}) = \overset{-1}{\det}(\mathbb{C}^*)$ et $\mathbf{G}(\mathbb{R}) = \overset{-1}{\det}(]0,+\infty[)$ sont ouverts car $\mathbb{C}^*$ et $]0,+\infty[$ sont ouverts et det continue.

2 Posons $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et $AB = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, avec $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$, d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a : $c_{i,j}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right)$, donc

$$\|AB\|^2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} c_{i,j}^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{k,j}^2\right) = \|A\|^2\|B\|^2$$

3 Montrons d'abord ce résultat, si E est muni d'une norme d'algèbre $\|\|$ et si $x \in E$ tel que $\|x\| < 1$, alors $(1-x)$ inversible d'inverse $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$. En effet, on sait que $(1-x)\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 - x^{n+1}$ et $\|x^{n+1}\| < \|x\|^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\|x\| < 1$, donc $(1-x)\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1$, où $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k$. Revenons à notre problème maintenant, donc

$$\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1} \Longrightarrow \|A^{-1}H\| \leq \|A^{-1}\|.\|H\| < 1 \Longrightarrow I_n + A^{-1}H \text{ inversible, d'inverse } \sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^k$$

Donc $A+H = A(I_n + A^{-1}H)$ est aussi inversible, d'inverse $(I_n + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1} = A^{-1} + \sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}$, d'où $(A+H)^{-1} - A^{-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}$

4 Il suffit de montrer que $\lim\limits_{H\to 0}(A+H)^{-1}=A^{-1}$. En effet, dans ce cas on peut supposer $\|H\|<\|A^{-1}\|^{-1}$ et donc $\exists r<0$ tel que $\|A^{-1}H\|<r<1$, donc

$$\begin{aligned}\|(A+H)^{-1}-A^{-1}\| &= \|\sum_{k=1}^{+\infty}(-A^{-1}H)^kA^{-1}\| \leq \|A^{-1}H)^kA^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\|A^{-1}H\|^k\\ &\leq \|H\|.\|A^{-1}\|^2\sum_{k=0}^{+\infty}r^k=\frac{\|H\|.\|A^{-1}\|^2}{1-r}\underset{H\to 0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

5 Posons $A=(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, B=(b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, donc $T(x)=\det(xB+(1-x)A)=\sum\limits_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\prod\limits_{i=1}^{n}(xb_{i,\sigma(i)}+(1-x)a_{i,\sigma(i)})$ est un polynôme en x de degré inférieur à n non nul, car $T(1)=\det B\neq 0$.

6 $\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^+}\gamma(t)=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}^-}\gamma(t)=\dfrac{1+2ir}{2}=\gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc γ est continue et par suite ϕ aussi, or $\gamma(0)=0$ et $\gamma(1)=1$, donc $\phi(0)=A$ et $\phi(1)=B$.

7 On a $\det\phi(t)=T(\gamma(t))$ et $T(x)=\prod\limits_{i=1}^{p}x-z_i$, donc $\det\phi(t)=\prod\limits_{i=1}^{p}\gamma(t)-z_i$,

or $\begin{array}{ll}\mathrm{Im}(\gamma(t)-z_i) & =2tr-\mathrm{Im}z_i \quad \text{si } 0\leq t\leq\frac{1}{2}\\ & =2r(1-t)-\mathrm{Im}z_i \quad \text{si } 0\leq t\leq 1\end{array}$ Supposons $\mathrm{Im}(\gamma(t)-z_i)=0$.

– 1ér cas : $0\leq t\leq\dfrac{1}{2}$, dans ce cas $\mathrm{Im}z_i=2tr\leq r$, absurde.

– 2ème cas : $\dfrac{1}{2}\leq t\leq 1$, dans ce cas $\mathrm{Im}z_i=2(1-t)r\leq r$, absurde.

Ainsi $t\mapsto\phi(t)$ est un chemin inclu dans $GL_n(\mathbb{C})$, joignant A et B, donc $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

8 Découle du fait que les applications $P\mapsto PJ, P\mapsto P^{-1}$ sont continues donc leur produit aussi, et du fait que l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

9 On a : $M(t)=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&ta_0&0\\1&0&\dots&0&ta_1&0\\0&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\ddots&1&0&ta_{n-3}&0\\0&\dots&0&1&ta_{n-2}&0\\0&0&\dots&0&0&ta\end{pmatrix}$, avec $ta=t\alpha$, $ta_k=t\alpha$, $\forall k\geq 1$, $ta_0=ta^{n-1}-\sum\limits_{k=1}^{n-2}ta_kta^k$, $ta^{n-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-2}ta_kta^k$ Ainsi $M(t)$ remplit les conditions des matrices de la forme (1), donc $M(t)\in\mathcal{C}(\mathbb{K})$. D'autre part les coéfficients de $M(t)$ sont des fonctions polynômiales en t, donc $\psi:t\mapsto M(t)$ est continue, c'est donc un chemin inclus dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, joignant $J=\psi(0)$ et $M=\psi(1)$.

10 D'aprés la question précedente toute matrice peut étre jointe à J par un chemin continue inclus dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, si on prend deux matrices quelconques M et N dans $\mathcal{C}(\mathbb{K})$, on joigne M à J, puis J à N, donc M à N, d'où $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°2

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Samedi 13 Novembre 2010
Durée : 4 heures
Extrait du CCP 2007, MP.

Blague du jour

C'est deux chiens qui discutent :
- C'est quoi ton nom... ?
- C'est ché
- Ché ? C'est plutôt bizarre comme nom !!
- Ben pourtant, mon maître qui m'adore beaucoup me dit tout le temps "Va, cher Ché !". !!

Euclide (vers -325, vers -265)

Mathématicien de la Grèce antique ayant probablement vécu en Afrique (Alexandrie, Égypte) auteur des ouvrages Éléments (13 livres), qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes. Les Éléments constituent le plus ancien exemple d'ouvrage traitant de mathématiques axiomatisées, et la première oeuvre rédigée dans un souci de rigueur scientifique et logique. Cela lui confère une place à part dans la littérature scientifique et explique sa notoriété mondiale.

Mathématicien du jour

Les calculatrices ***sont autorisées.***

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Groupes d'isométries sur $\mathbb{R}^n$

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ sa base canonique
- $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire **canonique** sur E : si $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,...,y_n)$ sont deux vecteurs de E, on a $<x,y>={}^tXY=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ est donc une base orthonormale pour $<\cdot,\cdot>$)

- $\mathcal{L}(E)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des endomorphismes de E
- $(GL(E),\circ)$ le groupe des automorphismes de E

- $M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne
- $M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles de taille n
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$
- pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée
- $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^tXAX > 0$.

Si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des réels, on note $\text{diag}(x_1, x_2, ..., x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, x_2, ..., x_n$ dans cet ordre.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme *p*** sur E :

si $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme infinie** sur E : si $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.

Une norme N sur E est dite **euclidienne** s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$.

Objectifs

Si N est une norme sur E, on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une ***N*-isométrie** si pour tout $x \in E$, $N(u(x)) = N(x)$.

On note $\text{Isom}(N)$ l'ensemble des N-isométries.

L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de $\text{Isom}(N)$ dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p.

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme

a. Montrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E, on a
$(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2\left[(N(x))^2 + (N(y))^2\right]$.
En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

b. Justifier que la norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puis montrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Si $x=(x_1,...,x_n)$ et $y=(y_1,...,y_n)$ sont deux vecteurs de E, on note $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes associées. Montrer que si l'on pose $<x,y>_S = {}^tXSY$, alors $<\cdot,\cdot>_S$ définit un produit scalaire sur E.

3. Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $\left(\varphi(e_i,e_j)\right)$. Justifier que pour tous vecteurs x et y de E $\varphi(x,y)={}^tXSY$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a donc montré que $\varphi = <\cdot,\cdot>_S$.

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme $N_S : x \mapsto \sqrt{{}^tXSX}$ avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x.

II. Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E.

4. Montrer que $\left(\mathrm{Isom}(N),\circ\right)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

5. **Une caractérisation géométrique des N-isométries**

On note $\Sigma(N)=\{x \in E,\ N(x)=1\}$, la sphère unité pour N.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N-isométrie si et seulement si $u\left(\Sigma(N)\right)=\Sigma(N)$.

Le groupe des N-isométries est donc l'ensemble des endomorphismes laissant stable la N-sphère unité.

6. Dans cette question uniquement $n=2$ et donc $E=\mathbb{R}^2$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D=\mathrm{Vect}\{e_1-e_2\}$ où (e_1,e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$-isométries ?

7. Dans cette question uniquement $n=3$ et donc $E=\mathbb{R}^3$.

Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x,y,z)=3x^2+2y^2+3z^2-2xz$, ce qui définit une forme quadratique q.

a. On note $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, déterminer une matrice symétrique $S \in M_3(\mathbb{R})$, telle que $q(x,y,z)={}^tXSX$.

b. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $S=PD{}^tP$.

c. Justifier alors que l'application $N_q : (x,y,z) \mapsto \sqrt{q(x,y,z)}$ est une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

d. Donner l'allure géométrique de $\Sigma\ N_q$, la sphère unité pour la norme N_q et en donner une équation simple dans une nouvelle base.

è. Justifier que $\Sigma(N_q)$ admet un axe de symétrie, préciser un vecteur qui dirige cet axe

f. Déduire de la question **5**, par une considération géométrique, que $\mathrm{Isom}\left(N_q\right)$ a une infinité d'éléments.

III. Étude de Isom(*N*) lorsque *N* est une norme euclidienne

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Si N est une norme, on note $\mathrm{ISOM}(N) = \left\{[u]_{\mathcal{B}},\ u \in \mathrm{Isom}(N)\right\}$. L'ensemble $\mathrm{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\mathrm{Isom}(N)$, c'est « sa version matricielle ».

8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $<\cdot,\cdot>_S$ le produit scalaire associé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que u est une N_S-isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E, on a $<u(x),u(y)>_S = <x,y>_S$.

b. En déduire que u est une N_S-isométrie si et seulement si sa matrice A dans $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tASA = S$.

9. Reconnaître alors $\mathrm{ISOM}\left(\|\cdot\|_2\right)$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de $\mathrm{ISOM}\left(\|\cdot\|_2\right)$? Justifier votre réponse.

10. Une application des polynômes interpolateurs

$\mathbb{R}_r[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r.
On se donne $r+1$ réels $x_0 < x_1 < \ldots < x_r$.

On considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}_r[X]$ vers $\mathbb{R}^{r+1}$ définie par
$P \mapsto \left(P(x_0), P(x_1), \ldots, P(x_r)\right)$.

a. Déterminer le noyau de u. En déduire que pour tous réels $y_0, y_1, \ldots, y_r$, il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in \{0,\ldots,r\}$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).

b. Application : soit n un entier naturel non nul et $u_1,\ldots,u_n$ des réels strictement positifs, on pose $U = \mathrm{diag}(u_1,\ldots,u_n)$ et $V = \mathrm{diag}(\sqrt{u_1},\ldots,\sqrt{u_n})$. Montrer qu'il existe un polynôme L, à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.

11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S.

b. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une autre racine carrée de S. Montrer qu'il existe un polynôme Q, à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.

c. Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.

d. Déduire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A+B)(A-B)$).

Désormais, on note $\sqrt{S}$ **l'unique** racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ de S.

.

12. Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne

Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) = N_S(x) = \sqrt{{}^t XSX}$ où X est le vecteur colonne associée à x.

a. Montrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, la matrice $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ appartient à $\mathrm{ISOM}(N_S)$.

b. Montrer que l'application ψ de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{ISOM}(N_S)$ définie par $M \mapsto \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M \sqrt{S}$ est une bijection.
Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini?

IV. Étude du cardinal de Isom(*p*)

Dans cette partie p est un réel **strictement** supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Pour alléger l'écriture, une ***p*-isométrie** désigne une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\mathrm{Isom}(p)$ le groupe des p-isométries.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u^* désigne l'**adjoint** de u pour $<\cdot,\cdot>$. On rappelle que $u^* \in \mathcal{L}(E)$, est caractérisé par l'égalité suivante : pour tout $(x,y) \in E^2$, $<u(x), y> = <x, u^*(y)>$.

13. Endomorphismes de permutation signée

$\mathcal{P}_n$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,2,...,n\}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n) \in \{-1,+1\}^n$. On note $u_{\sigma,\varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie pour tout $i \in \{1,2,...,n\}$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$.

a. Montrer que $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

b. Écrire la matrice de $u_{\sigma,\varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n=4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = (1,1,-1,1)$.

14. Inégalité de Holdër

a. Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

b. En déduire que pour tous vecteurs x et y de E, on a $|<x,y>| \le \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Holdër (**on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

c. Que devient l'inégalité si $p=2$?

Dans toute la suite, u désigne une p-isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice $A = [u]_{\mathcal{B}}$.

15. Montrer que pour tout $j \in \{1,2,...,n\}$, $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p$.

.

16. Une formule clé de dualité

Soit $x \in E$. On note $\Sigma_q = \left\{ z \in E, \|z\|_q = 1 \right\}$.

a. Justifier l'existence du réel $\max_{y \in \Sigma_q} |< x, y >|$.

b. Justifier que $\max_{y \in \Sigma_q} |< x, y >| \leq \|x\|_p$.

Soit $i \in \{1, 2, ..., n\}$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, ..., y_n)$.

Montrer que $|< x, y >| = \|x\|_p$ puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |< x, y >|$.

17. En déduire que si u est une p-isométrie, u^* est une q-isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|^q$.

18. On suppose de plus que $p \neq 2$.

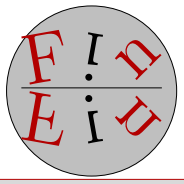
a. Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ des réels dans $[0,1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^{r} {\alpha_k}^p = \sum_{k=1}^{r} {\alpha_k}^q$. Montrer avec soin que pour tout $k \in \{1, 2, ..., r\}$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b. En déduire que pour tout i et j dans $\{1, 2, ..., n\}$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que 2 valeurs différentes que l'on précisera (on rappelle que les a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'une p-isométrie).

19. Conclusion

Montrer alors que lorsque $p \neq 2$, Isom(p) est un groupe fini dont on déterminera le cardinal. On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p.

Commentaire : Les p-isométries pour $p \neq 2$ sont seulement en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini mais compact (pas très difficile à montrer). Sur $\mathbb{R}^n$, la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.



Bonne Chance

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé N°2 (Pr Legros)

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

● Une souris rencontre sa copine : J'ai décidé de me mettre au régime, lui dit-elle.
- Tu ne manges plus ton fromage gruyère alors ?
- Si, mais je ne mange plus que les trous !
● Comment appelle t-on un chien sans pattes ?
Réponse : On ne l'appelle pas, on va le chercher !
● Comment appelle-t-on une chauve-souris qui a des cheveux ?
Réponse : Une souris.

Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704)

Marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, de La Chaise, de Le Brau et d'autres lieux, mathématicien français. Il est plus connu pour la règle qui porte son nom. Il est aussi l'auteur du premier livre connu sur le calcul infinitésimal différentiel, publié en 1696, ses textes comportent des conférences de son professeur Jean Bernoulli. C'est d'ailleurs ce dernier qui a donné au marquis toutes les donnes nécessaires pour réaliser le livre au nom de l'Hôpital, dans un le but de le publier sous un nom français, car Bernoulli est Suisse.

Mathématicien du jour

1 Description des normes euclidiennes

1 .

a Si N est une norme euclidienne, associée au produit scalaire φ, et si $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 + N(x-y)^2 &= \varphi(x+y,x+y) + \varphi(x-y,x-y) \\ &= \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) + \varphi(x,x) - 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= 2\left(N(x)^2 + N(y)^2\right) \end{aligned}$$

Avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons $\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\left(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2\right)$ donc $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme euclidienne.

b $\|\ \|_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique défini par l'énoncé : c'est donc une norme euclidienne. Supposons maintenant que p est un réel strictement plus grand que 1 et distinct de 2. Toujours avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons :

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} \neq 4 = 2\left(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\right)$$

car $2/p \neq 1$: la norme $\|\ \|_p$ n'est donc pas euclidienne.

2 $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est clairement une forme bilinéaire. Nous avons ensuite :

– pour $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle_S = {}^tXSY = {}^t({}^tXSY) = {}^tY{}^tSX = {}^tYSX = \langle y, x \rangle_S$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est symétrique ;
– pour x non nul, $\langle x, x \rangle_S$ est strictement positif car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ est définie positive.

3 Pour $x, y \in E$, nous avons :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tXSY$$

et pour X non nul, associé au vecteur x, ${}^tXSX = \varphi(x, x) > 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2 Quelques généralités et exemples

4 4.Si $u \in \mathrm{Isom}(N)$ et si $x \in \mathrm{Ker}\,(u)$, $N(x) = N(u(x)) = N(0) = 0$ donc $x = 0$: u est donc injective et $u \in GL(E)$ (E est de dimension finie).

Isom(N) est non vide puisqu'il contient l'identité.

Si $u, v \in \mathrm{Isom}(N)$, on a $N(u \circ v(x)) = N(v(x)) = N(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $u \circ v \in \mathrm{Isom}(N)$.

Si $u \in \mathrm{Isom}(N)$, on a $N(u^{-1}(x)) = N(u(u^{-1}(x))) = N(x)$ pour tout x, donc $u^{-1} \in \mathrm{Isom}(N)$.

Isom(N) est donc un sous-groupe de $GL(E)$.

5 5. Soit $u \in \mathrm{Isom}(N)$. Pour $x \in \Sigma(N)$, $N(u(x)) = N(x) = 1$, donc $u(x) \in \Sigma(N)$: nous avons donc $u(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$. Comme $u^{-1} \in \mathrm{Isom}(N)$, cela donne également $u^{-1}(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$, soit $\Sigma(N) \subset u(\Sigma(N))$.

Réciproquement, supposons que $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ et soit x un élément quelconque de E. Si $x = 0$, on a $N(u(x)) = 0 = N(x)$. Sinon, $y = x/N(x) \in \Sigma(N)$, et donc :

$$N(u(x)) = N(u(N(x)y)) = N(x)N(u(y)) = N(x)$$

car $u(y) \in \Sigma(N)$: u est donc une N-isométrie.

6 6. $\Sigma(\|\ \|_1)$ est le carré $\mathcal{C}$ de sommets $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ et $D = (0, -1)$, qui est conservé par la symétrie s mais pas par la rotation r, puisque $s(A) = D$, $s(B) = C$, $s(C) = B$, $s(D) = A$ et $r(A) = (1/2, \sqrt{3}/2) \notin \mathcal{C}$. s est donc une $\|\ \|_1$-isométrie mais r n'en est pas une.

7 a $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b Diagonalisons la matrice symétrique S dans une base orthonormale :

$$\begin{aligned} \det(S - \lambda I_3) &= \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (2-\lambda) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda) \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| \\ &= (2-\lambda)^2(4-\lambda) \end{aligned}$$

4 est valeur propre simple, associée au vecteur propre $e_1 - e_3$. Le plan propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan orthogonal à ce vecteur. Nous obtenons donc facilement une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

de vecteurs propres :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_3),\ \varepsilon_2 = e_2 \text{ et } \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_3).$$

Nous pouvons donc écrire $P^{-1}SP = D$, i.e. $S = PD\,{}^tP$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c La matrice S est symétrique définie positive (on peut par exemple écrire que ${}^tXSX = {}^tYDY > 0$ pour $X \neq 0$, avec $Y = {}^tPX$), donc N_q est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$.

d et e Dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $\Sigma(N_q)$ a pour équation :

$$4X^2 + 2Y^2 = 1 - 2Z^2.$$

Pour Z fixé entre $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ l'intersection de $\Sigma(N_q)$ avec le plan horizontal associé est une ellipse.

Pour Z à l'extérieur de l'intervalle $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, l'intersection de $\Sigma(N_q)$ avec le plan horizontal associé est l'ensemble vide.

Ainsi $\Sigma(N_q)$ a la forme d'un ballon de rugby (ellipsoïde) d'axe de symétrie engendré par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$.

f Toutes les rotations autour de l'axe $\mathbb{R}(e_1 - e_3)$ conservent $\Sigma(N_q)$ et sont donc des N_q-isométries : le groupe $\mathrm{Isom}(N_q)$ est infini.

3 Étude de Isom(N) lorsque N est une norme euclidienne

8 a Si u est une N_S-isométrie, les formes bilinéaires symétriques $\varphi_1 : (x, y) \longmapsto \langle u(x), u(y) \rangle_S$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ sont associées à la même forme quadratique : elles sont donc égales (formules de polarité).

La réciproque est évidente.

b $u \in \mathrm{Isom}(N_S)$ si et seulement si ${}^t(AX)S(AY) = {}^tXSY$ pour tous $X, Y \in E$, i.e. si et seulement si ${}^tASA = S$ (on peut identifier grâce aux questions 2 et 3).

9 9 En particulier, $A \in \mathrm{ISOM}(\|\ \|_2) \iff {}^tAA = I_n$, donc $\mathrm{ISOM}(\|\ \|_2) = O_n(\mathbb{R})$. Ce groupe est infini, puisqu'il contient par exemple les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & & & \\ \sin\theta & \cos\theta & & 0 & \\ & & & & \\ & 0 & & & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

qui sont deux à deux distinctes pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

10 a Si P est dans le noyau de u, P possède $r+1$ racines distinctes et est de degré au plus r : il est donc nul. Ainsi, u est injective, donc surjective ($\mathbb{R}_r[X]$ et $\mathbb{R}^{r+1}$ sont de même dimension finie) : tout vecteur $(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ possède donc un unique antécédent L.

b Soient $x_0, x_1, \ldots, x_r$ tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_r$ et $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. En appliquant la question précédente avec $y_i = \sqrt{x_i}$ (pour $0 \leq i \leq r$), nous obtenons un polynôme L qui convient.

11 a) Comme S est symétrique définie positive, il existe une matrice orthogonale P et des réels $\lambda_i > 0$ tels que

$$S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,{}^tP$$

Alors la matrice $A = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})\,{}^tP$ est une racine carrée de S (car ${}^tP = P^{-1}$) et est clairement symétrique définie positive.

b) Notons $U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $V = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, et soit $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L(U) = V$. Nous avons alors :

$$L(B^2) = L(S) = L(PUP^{-1}) = PL(U)P^{-1} = PVP^{-1} = A$$

Le polynôme $Q(X) = L(X^2)$ est donc solution du problème posé.

Nous en déduisons que $AB = X(A)Q(A) = (XQ)(A) = (QX)(A) = Q(A)A = BA$: A et B commutent.

c) Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathrm{Ker}\,(S_1 + S_2)$. Alors $S_1X = -S_2X$, et donc $X = 0$ (sinon, on aurait $S_1X > 0$ et $S_2X > 0$). Ainsi, $S_1 + S_2$ est inversible.

d) Comme A et B commutent, $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 = 0$, ce qui donne $A = B$ car $A + B$ est inversible.

12 12.Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons $N = \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$. Alors :

$$\begin{aligned}
N \in \mathrm{ISOM}(N_S) &\iff {}^tNSN = S \\
&\iff {}^t\left(\sqrt{S}\right)\,{}^tM\,{}^t\left(\sqrt{S}\right)^{-1} S \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S} = S \\
&\iff \sqrt{S}\,{}^tM \left(\sqrt{S}\right)^{-1} \left(\sqrt{S}\right)^2 \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S} = \left(\sqrt{S}\right)^2 \\
&\iff {}^tM\,M = I_n \\
&\iff M \in O_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Comme l'application $M \longmapsto \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$ est une bijection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même, nous en déduisons que sa restriction à $O_n(\mathbb{R})$ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{ISOM}(N_S)$ (c'est même un isomorphisme de groupe).

Ainsi, le groupe des isométries d'une norme euclidienne quelconque N est isomorphe au groupe $O_n(\mathbb{R})$, qui est infini.

Remarque : on obtient ce résultat de façon pratiquement immédiate en utilisant une base orthonormale pour N (deux espaces euclidiens de même dimension n sont isomorphes, donc leurs groupes le sont également).

4 Étude du cardinal de Isom(p)

13 a) Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E$. Nous avons $u_{\sigma,\varepsilon}(x) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ avec $y_{\sigma(i)} = x_i\varepsilon_i$ pour tout i. Nous en déduisons, par changement d'indice :

$$N_p(u_{\sigma,\varepsilon}(x)) = \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |y_{\sigma(i)}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = N_p(x)$$

donc $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

b $u_{\sigma,\varepsilon}(e_1)=e_3$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_2)=e_4$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_3)=-e_1$ et $u_{\sigma,\varepsilon}(e_4)=e_2$ donc la matrice de $u_{\sigma,\varepsilon}$ dans la base (e_i) est

$$\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

14 a Si a ou b est nul, l'inégalité est évidente. Sinon, la fonction ln étant convexe sur $]0,+\infty[$ et les masses $1/p$ et $1/q$ étant positives de somme 1, nous avons

$$\ln ab=\ln a+\ln b=\frac{1}{p}\ln a^p+\frac{1}{q}\ln b^q\leq\ln\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q\right)$$

ce qui donne l'inégalité demandée, par croissance de la fonction ln.

b Soient $x,y\in E$. Si x ou y est nul, l'inégalité est une nouvelle fois évidente. Sinon, posons

$$x'=\frac{x}{\|x\|_p}=(x'_1,\dots,x'_n)\text{ et }y'=\frac{y}{\|y\|_q}=(y'_1,\dots,y'_n).$$

Nous avons en utilisant l'inégalité précédente :

$$\frac{|<x,y>|}{\|x\|_p\|y\|_q}=|<x',y'>|\leq\sum_{i=1}^n|x'_i||y'_i|\leq\sum_{i=1}^n\frac{1}{p}|x'_i|^p+\frac{1}{q}|y'_i|^q=\frac{1}{p}\left(\|x'\|_p\right)^p+\frac{1}{q}\left(\|y'\|_q\right)^q=1$$

c Quand $p=2$, nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x,y\in E$, $|<x,y>|\leq\|x\|_2\|y\|_2$.

15 15.Pour $j\in\{1,2,\dots,n\}$, $\|u(e_j)\|_p=\|e_j\|_p=1$, i.e. $\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|^p=1$, puis en sommant sur j :

$$\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n|a_{i,j}|^p=n.$$

16 a Σ_q est une partie fermée bornée (c'est la sphère unité pour la norme $\|\ \|_q$), elle est donc compacte (E est de dimension finie). Comme l'application $y\longmapsto|<x,y>|$ est continue, elle est bornée sur Σ_q et atteint ses bornes, d'où l'existence du maximum.

b Il suffit d'utiliser l'inégalité de Holdër : $|<x,y>|\leq\|x\|_p\|y\|_q=\|x\|_p$ pour tout $y\in\Sigma_q$.

Avec le vecteur y_0 donné par l'énoncé, nous avons :

$$<x,y_0>=\sum_{i=1}^n x_iy_i=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\x_i\neq0}}\underbrace{\varepsilon_ix_i}_{|x_i|}|x_i|^{p-1}\|x\|_p^{1-p}=\|x\|_p^{1-p}\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\x_i\neq0}}|x_i|^p=\|x\|_p^{1-p}\sum_{1\leq i\leq n}|x_i|^p=\|x\|_p$$

en remarquant que ce résultat est correct même si x est nul !

Si x est non nul, y_0 est élément de Σ_q :

$$\left(\|y_0\|_q\right)^q=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\x_i\neq0}}|x_i|^{(p-1)q}\left(\|x\|_p\right)^{(1-p)q}=\left(\|x\|_p\right)^{-p}\sum_{1\leq i\leq n}|x_i|^p=1$$

et donc $\|x\|_p=|<x,y_0>|\leq\max\limits_{y\in\Sigma_q}|<x,y>|$.

Si $x=0$, on choisit $y_0=e_1$ et on a encore $y_0\in\Sigma_q$ et $0=\|x\|_p=|<x,y_0>|\leq\max\limits_{y\in\Sigma_q}|<x,y>|$.

Nous avons donc démontré que $\max\limits_{y\in\Sigma_q}|<x,y>|=\|x\|_p$.

Remarque : ceci traduit que l'application $\varphi:\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&E^*\\x&\longmapsto&<x,\cdot>\end{array}$ est une isométrie quand on munit l'espace E de la norme $\|\ \|_p$ et l'espace E^* de la norme subordonnée à la norme $\|\ \|_q$.

17 17Remarquons tout d'abord que, par symétrie entre p et q, nous avons également :

$$\forall y \in E,\ \max_{x\in\Sigma_p} |\langle x, y\rangle| = \|y\|_q.$$

On suppose que u est une p-isométrie. Soit $z \in \Sigma_q$. Nous avons :

$$\forall x \in \Sigma_p,\ |\langle x, u^*(z)\rangle| = |\langle u(x), z\rangle| \leq \max_{y\in\Sigma_q} |\langle u(x), y\rangle| = \|u(x)\|_p = 1$$

et donc

$$\|u^*(z)\|_q = \max_{x\in\Sigma_p} |\langle x, u^*(z)\rangle| \leq 1 \qquad (*)$$

Pour tout $z \in E$, nous avons donc $\|u^*(z)\|_q \leq \|z\|_q$ (l'inégalité est évidente si $z = 0$, et s'obtient en appliquant $(*)$ à $z/\|z\|_q$ si $z \neq 0$).

Comme $u^{-1} \in \mathrm{Isom}(p)$, nous avons ensuite $\|(u^{-1})^*(z)\|_q \leq \|z\|_q$ pour tout $z \in E$. En appliquant cette inégalité à $u^*(z)$, nous obtenons $\|z\|_q \leq \|u^*(z)\|_q$ pour tout $z \in E$, ce qui achève de prouver que u^* est une q-isométrie.

Comme la matrice de u^* dans la base orthonormale (e_i) est la transposée de A, la question 15 donne (il y a toujours symétrie entre p et q) :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{j,i}|^q = n.$$

18 a Nous avons $\sum_{k=1}^{r} f(\alpha_k) = 0$ en posant $f(x) = x^p - x^q$ (f est définie sur $[0,1]$, avec par convention $f(0) = 0$). Comme $p \neq q$ (car $p \neq 2$), f est strictement positive sur $]0,1[$ si $p < 2$ et strictement négative sur $]0,1[$ si $p > 2$. La somme des $f(\alpha_k)$ ne peut donc être nulle que si les α_k valent tous 0 ou 1.

b Comme $\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^q$, nous en déduisons que les $|a_{i,j}|$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

19 19 En poursuivant l'analyse, l'égalité $\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n$ avec $|a_{i,j}| = 0$ ou 1 signifie que la matrice A contient n coefficients non nuls (valant 1 ou -1) et $n^2 - n$ coefficients nuls. Comme A est inversible, deux coefficients non nuls ne peuvent se trouver sur une même ligne ou sur une même colonne. On en déduit que u est de la forme $u_{\sigma,\varepsilon}$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et un certain $\varepsilon \in \{-1,1\}^n$. Avec la question 13, nous avons donc démontré que le groupe des p-isométrie est égal au groupe des permutations signées. Comme l'application $(\sigma,\varepsilon) \longmapsto u_{\sigma,\varepsilon}$ est injective, $\mathrm{Isom}(p)$ est un groupe fini contenant $2^n n!$ éléments.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir libre N°9

Problèmes de points fixes

MP-CPGE Rabat

26 Novembre 2010

Blague du jour

Bientôt vous serez ingénieur, peut être ingénieur informaticien. Vérifier sur la liste ci-dessous si vous avez le profil, les types d'ingénieurs en informatique sont :

- L'ingénieur DISQUE DUR : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
- L'ingénieur CD-ROM : il va toujours plus vite avec le temps.
- L'ingénieur RAM : il oublie tout de vous, ds le moment o vous lui tournez le dos.

Hermann Minkowski (1864 - 1909)

Mathématicien et un physicien théoricien allemand. Il gagna le Grand Prix de l'Académie des sciences de Paris après sa résolution du problème décomposition des nombres entiers en somme de cinq carrés . David Hilbert fut l'un de ses professeurs et Albert Einstein l'un de ses élèves. On lui doit surtout l'espace à 4 dimension (espace-temps) appelé de Minkowski, considéré comme la base de tous les travaux sur la théorie de la relativité. Son travail le plus original est sans aucun doute sa géométrie des nombres. Ces travaux posent de nombreuses questions sur le gain de place, ou comment faire rentrer une forme donnée à l'intérieur d'une autre forme donnée.

Mathématicien du jour

Soit E un espace vectoriel normémuni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application g de E dans E est dite contractante s'il existe $K \in]0,1[$ tel que

$$\|g(x)-g(y)\| \leq K\|x-y\| \qquad \forall x,y \in E.$$

1 Soit f application contractante définie sur $\mathbb{R}^d$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^d$ (quelconque mais fixé). on pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\|x_{n+1}-x_n\| \leq k^n\|x_1-x_0\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire une majoration de $\|x_{n+p}-x_n\|$ en fonction de k, n, x_0 et x_1.

c) En déduire que (x_n) est de Cauchy, puis qu'elle converge, soit x sa limite.

d) Montrer que x est un point fixe de f.

e) Conclure que toute application contractante admet un unique point fixe.

g) Le résultat précédent est-in encore valable si l'on remplace $\mathbb{R}^d$ par un espace vectoriel norméE de dimension finie.

h) Le résultat précédent est-in encore valable si l'on remplace $\mathbb{R}^d$ par un espace vectoriel norméE de dimension quelconque. Si c'est non, quelle est la condition à imposer à E pour le résultat en question soit encore valable.

2 Soit f une application de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 l'unique point fixe de f^n.

a) Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n.

b) Montrer que si x est un point fixe de f^n, il en est de même pour $f(x)$.

c) En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f.

3 Soit X et F deux parties d'un espace vectoriel normé, F étant une partie complète. On considère une application $f : X \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto f(\lambda, x)$ continue, et k-contractante en la seconde variable, c'est-dire qu'elle existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\forall \lambda \in X,\ \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(\lambda,x) - f(\lambda,y)\| \leq k\|x-y\|.$$

a) Montrer que, pour tout $\lambda \in X$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $f(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$.

b) Montrer ensuite que l'application $X \to E$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

c) Montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

4 Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\|.$$

a) Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).

b) Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E complet ?

5 $\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\exists \alpha \in]0; \frac{1}{2}[,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

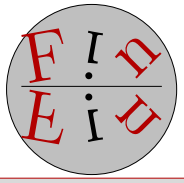
a) Montrer que f admet au plus un point fixe.

b) On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.

i) Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ \|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}\|u_{n+1} - u_n\|$.

ii) Montrer que la suite u est de Cauchy.

iii) Conclure.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°3

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Jeudi 9 Décembre 2010

Durée : 4 heures

Source : Concours Mines-Ponts, 2006 MATH. I MP

Avec beaucoup d'indications.

L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

Blague du jour

• Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné !

• L'injectivité implique la bijectivité mme en dimension infinie, en effet : Si f est injective tout élément possède au plus un antécédent ; mais qui peut le plus peut le moins, donc tout élément possède au moins un antécédent, donc f est surjective puis bijective.

Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

Mathématicien du jour

Mathématicien, logicien, philosophe, théologien bohémien de langue et de culture allemande, fils d'un Italien émigré à Prague. Il enseigne les sciences de la religion et consacre le reste de son temps aux mathématiques. Il est considéré comme l'un des principaux contributeurs à la logique telle qu'elle est aujourd'hui établie. Bolzano avait développé une définition suffisamment rigoureuse des limites dès 1817. Dans sa philosophie, Bolzano critique l'idéalisme d'Hegel et de Kant en affirmant que les nombres, les idées, et les vérités existent indépendamment des personnes qui les pensent. Ainsi l'acte mental se distingue de la signification de l'acte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et l colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$ sera considéré comme élément de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{C})$. Dans la suite, on identifie les matrices carrées (respectivement les matrices colonnes) et les endomorphismes (respectivement les vecteurs) canoniquement associés dans $\mathbb{C}^n$: par exemple, on note par la même lettre une matrice T de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont T est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Si $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}^l$, $(Mx)_i$ désigne la i-ième composante du vecteur $Mx \in \mathbb{K}^n$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ et } |\!|\!| M |\!|\!|_1 = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Mx\|_1}{\|x\|_1},$$

pour $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, la norme matricielle subordonnée.

Définition 1 On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, de coefficients notés $(m_{i,j}, 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant l)$, est positive (respectivement strictement positive), ce que l'on note $M \geqslant 0$ (respectivement $M > 0$), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs) :

$$m_{i,j} \geqslant 0 \text{ (resp . } m_{i,j} > 0) \text{ pour tout } (i,j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, l\}.$$

Pour deux matrices M et N de $\mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$, $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) lorsque $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ de coefficients notés $(m_{i,j}, 1 \leqslant i,j \leqslant n)$ est dite stochastique lorsqu'elle est positive et que de plus

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = 1, \text{ pour tout } j \in \{1,\dots,n\}.$$

On définit les ensembles B, B^+ et Σ par :

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x \geqslant 0 \text{ et } x \neq 0\},$$
$$B^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x > 0\},$$
$$\Sigma = \left\{x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|x\|_1 = 1\right\}.$$

Nous souhaitons montrer le résultat suivant :

Théorème (Perron-Frobenius) Soit $T \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ stochastique telle que $(I_n + T)^{n-1} > 0$. Il existe un vecteur strictement positif x_0 satisfaisant $Tx_0 = x_0$. Toutes les valeurs propres de T sont de module inférieur à 1 et pour tout vecteur y de $\Sigma \cap B$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^{kj} y = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$

Les deux parties sont dans une large mesure indépendantes.

1 Un vecteur propre strictement positif

On suppose que T est un élément positif de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tel que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

1 Pour tout $x \in B$, on associe l'ensemble $\Gamma_x = \left\{\theta \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \theta x \leqslant Tx\right\}$.

a) Montrer que Γ_x est non vide et majorée.

On pose $\theta(x) = \sup(\Gamma_x)$.

b) Montrer qu'en général si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide, alors $\sup A \in \overline{A}$.

c) Justifier que pour tout $i \in \{1,...,n\}$, l'application $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto (Tx)_i - \theta.x_i$ est continue sur $\mathbb{R}$, en déduire que Γ_x est fermé puis que $\theta(x) = \max(\Gamma_x)$.

On note θ l'application définie ainsi : $\theta : \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$

2 Montrer que pour tout $x \in B$, on a : $\theta(x) = \min\left\{\frac{(Tx)_i}{x_i} \text{ tel que } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } x_i \neq 0\right\}$.

3 a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}^+$ non vide, donner sans justifier $\inf(\alpha A)$ en fonction de α et A.

b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$ et tout $x \in B$, $\theta(\alpha x) = \theta(x)$.

4 Montrer que $P(B) \subset B^+$.

5 Soit $x \in B$

a) Dire pourquoi P et T commutent, en déduire que $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$.

b) En déduire que $\theta(Px) \geqslant \theta(x)$.

c) Justifier que $TPx = PTx > 0$ et que $Px > 0$.

d) En déduire que $\theta(Px) > 0$.

6 Soit $x \in B$ un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ.

a Montrer que $\lambda \geqslant 0$.

b Montrer que $Px = (1+\lambda)^{n-1}x$

c En déduire que $\theta(Px) = \theta(x)$.

7 Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$, on pose $y = Tx - \theta(x)x$.

a Dire pourquoi $y \geqslant 0$. On suppose que $y \neq 0$.

b Développer Py puis en déduire que en déduire $\forall i \in \{1, ..., n\}$, on a $(T(Px))_i - \theta(x)(Px)_i > 0$.

c En déduire que $\theta(x) < \theta(Px)$.

d Conclure que x est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\theta(x)$.

8 Soit $C = B \cap \Sigma$. Montrer que l'application θ est continue de $P(C)$ dans $\mathbb{R}$.

9 Justifier l'existence de $x_0 \in P(C)$ tel que $\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$.

10 Montrer que $\sup_{x \in P(C)} \theta(x) \geqslant \sup_{x \in C} \theta(x)$.

11 Montrer que $\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x)$.

12 Montrer que $\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$ et que $\theta(x_0) = \sup_{x \in C} \theta(x)$. On pose $\theta_0 = \theta(x_0)$.

13 Montrer que x_0 est un vecteur propre, strictement positif, de T pour la valeur propre θ_0 et que $\theta_0 > 0$.

2 Une méthode d'approximation

On suppose maintenant que T est stochastique et telle que $P = (I_n + T)^{n-1}$ est strictement positive.

Pour un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on note x^+ le vecteur $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$, où $|z|$ est le module du complexe z. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose : $R_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j$.

14 Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T pour la valeur propre θ. Montrer que $|\theta| x^+ \leqslant Tx^+$.

15 En déduire que $|\theta| \leqslant \theta_0$.

16 Montrer que $|\theta| \left\|x^+\right\|_1 \leqslant \left\|x^+\right\|_1$ et en déduire que $|\theta| \leqslant 1$.

17 En déduire $\theta_0 = 1$.

18 a Montrer qu'une matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est stochastique si et seulement si $u = (1, ..., 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

b En déduire que pour tout $j \geqslant 1$, T^j et R_j sont des matrices stochastiques.

19 a Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, montrer que $AB \geqslant 0$.

b Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a $\|Tx\|_1 \leqslant \|x\|_1$.

c Établir, pour tout $k \geqslant 1$, les inégalités suivantes :

$$\left|\left\|T^k\right\|_1\right| \leqslant 1 \text{ et } \left|\|R_k\|_1\right| \leqslant 1.$$

20 a Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $TR_k - R_k = \frac{1}{k}(T^k - I_n)$.

b En déduire que $\left|\|TR_k - R_k\|_1\right| \leqslant \frac{2}{k}$.

21 Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrer que la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$ a au moins une valeur d'adhérence.

22 Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$, montrer que $Ty = y$ puis que pour tout $k \geqslant 1$, $R_k y = y$.

23 Soit y et z deux valeurs d'adhérence de $(R_k x, k \geqslant 1)$, montrer pour tous les entiers m et l, l'identité suivante :

$$y - z = R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y).$$

24 Montrer que la suite $(R_k x, k \geqslant 1)$ a exactement une valeur d'adhérence.

25 a Soit (f_k) une suite d'endomorphismes d'un espace vectoriel normé E tel que pour tout $x \in E$, la suite $(f_k(x))$ converge vers un élément de E, qu'on notera $f(x)$, montrer que l'application ainsi définie et notée f est un endomorphisme de E.

b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, la suite $(R_k x)_k$ converge

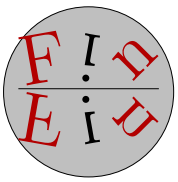
c En déduire qu'il existe une matrice R telle que $Rx = \lim\limits_{k\to+\infty} R_k x$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \|R_k - R\|_1 = 0$.

26 Montrer que T et R commutent.

27 Montrer que $RT = R$ et $R^2 = R$.

28 Caractériser R en fonction de $\mathrm{Ker}(T - I_n)$ et $\mathrm{Im}(T - I_n)$.

29 On admet que $\mathrm{Ker}(T - I_n)$ est de dimension 1. Pour $x \in B$, expliciter Rx en fonction de $\|x\|_1$, $\|x_0\|_1$ et x_0.



Bonne Chance

Ce théorème possède d'innombrables applications. L'une des dernières est son utilisation dans le classement (PageRank) des pages Web effectué par le plus connu des moteurs de recherche.
Il vous reste encore du temps : le problème suivant explique les détails du principe PageRank

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : ESSEC

Code sujet
287
ESSECM2_E

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 7 mai 2008, de 14h à 18h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Tout au long du sujet N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Notations :

- Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $|x|$ la *valeur absolue* de x.
- Pour tout vecteur $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$, on note $|V| = \begin{pmatrix} |v_1| \\ \cdot \\ \cdot \\ |v_N| \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$

et $\|V\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |v_j|$.

- On notera I_N la matrice *identitée* de $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.
- Pour $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice *transposée* de A.

Résultat admis :

- Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})^2$, on a ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

Définitions :

- Une matrice est dite *positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls; elle est dite *strictement positive* si tous ses coefficients sont des nombres réels strictement positifs.
- Un vecteur colonne $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est dit *de probabilité* si V est positif et si $\|V\|_1 = 1$.
- Une matrice $Q = (Q(i,j))_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est dite *stochastique* si elle est positive et si $\sum_{i=1}^{N} Q(i,j) = 1$ pour tout $1 \leq j \leq N$.
- Un vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ est dit *invariant* par $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ si $QV = V$.
- Soit $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. La suite de matrice $(Q^n)_{n\geq 0}$ est convergente vers la matrice Q_∞ si pour tout $(i,j) \in \{1,...,N\}^2$, $(Q^n(i,j))_{n\geq 0}$ converge vers $Q_\infty(i,j)$.

Préliminaires

Soit $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ tel que

$$\left|\sum_{j=1}^{N} v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} |v_j| . \qquad \text{(E)}$$

P1. Montrer que, pour tout x réel, $|x| - x \geq 0$.

P2. Etude du cas $N = 3$. On supposera donc, dans cette question P2 uniquement, $N = 3$.

P2.a Montrer que

$$(|v_1| + |v_2| + |v_3|)^2 - (v_1 + v_2 + v_3)^2 = 2(|v_1 v_2| - v_1 v_2) + 2(|v_1 v_3| - v_1 v_3) + 2(|v_2 v_3| - v_2 v_3) .$$

P2.b Montrer à l'aide de (E), que si $|v_j v_{j'}| > 0$ pour $(j,j') \in \{1,2,3\}^2$ tel que $j \neq j'$, alors v_j et $v_{j'}$ ont même signe.

P2.c Conclure que $V = |V|$ ou $V = -|V|$.

P3. Montrer que $V = |V|$ ou $V = -|V|$ dans le cas général où N est un entier quelconque vérifiant $N \geq 2$.

Partie I Google et PageRank

En 1998, Sergey Brin et Larry Page, co-fondateurs de Google, ont introduit la notion de PageRank. Le PageRank est un indice mesurant la notoriété de chacune des pages Web référencées dans Google. Bien que les outils de calcul de cet indice soient maintenus secrets, le principe mathématique sur lequel repose ce calcul est public et peut-être résumé comme suit.

On numérote de 1 à N les pages Web référencées dans Google (on pense que $N = 10^9$ est un bon ordre de grandeur). On dira qu'une page $j \in \{1,...,N\}$ pointe vers une autre page $i \in \{1,...,N\}$ s'il existe un lien dans la page j permettant de rejoindre la page i en cliquant dessus.

Pour tout $j \in \{1,...,N\}$, on note d_j le nombre de pages vers lesquelles la $j^{ème}$ page pointe. Lorsque $d_j = 0$ pour chaque couple de pages (i,j) posons $A(i,j) = 0$ si $i \neq j$ et $A(j,j) = 1$. Lorsque $d_j > 0$, posons soit $A(i,j) = 1/d_j$ si j pointe vers i soit $A(i,j) = 0$ sinon. Si $\rho \in [0,1[$, on définit la matrice de Google $G = (G(i,j))_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq N}$ par

$$G(i,j) = \rho A(i,j) + \frac{(1-\rho)}{N}, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N \text{ et } 1 \leq j \leq N. \tag{D}$$

Pour tout $j \in \{1,...,N\}$, le PageRank d'une page j est un nombre réel positif ou nul noté $p(j)$. Les $p(j)$, $1 \leq j \leq N$ sont par ailleurs définis par le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{N} p(j) = 1 \text{ et } \sum_{j=1}^{N} G(i,j)\,p(j) = p(i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N. \tag{S}$$

A la question "que mesure exactement pour une page $j \in \{1,...,N\}$ donnée ce fameux PageRank $p(j)$?", leurs concepteurs assurent qu'il s'agit de la "chance" qu'un surfeur se retrouve sur la page j en question. Le but de ce sujet est de lever un coin du voile entourant le mystère du PageRank en justifiant d'une part de l'existence et de l'unicité de la solution du système (S) et en fournissant d'autre part une interprétation probabiliste de ce système permettant de donner un sens mathématique aux affirmations de Brin et Page.

A. Etude de la matrice G de Google

On démontre dans cette section quelques propriétés simples de la matrice G de Google.

I.A.1 Montrer que $G \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice strictement positive.

I.A.2 Soit $j \in \{1,...,N\}$ tel que $d_j = 0$, montrer que $\sum_{i=1}^{N} G(i,j) = 1$.

I.A.3 Soit $j \in \{1,...,N\}$ tel que $d_j > 0$. En écrivant que

$$\sum_{i=1}^{N} G(i,j) = \sum_{\substack{i\in\{1,...,N\} \\ j \text{ pointe vers } i}} G(i,j) + \sum_{\substack{i\in\{1,...,N\} \\ j \text{ ne pointe pas vers } i}} G(i,j)$$

montrer que $\sum_{i=1}^{N} G(i,j) = 1$.

I.A.4 Que peut-on en déduire pour G ?

I.A.5 Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} p(1) \\ \vdots \\ p(N) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ défini en (S), en admettant qu'il existe, est invariant par G.

B. Modèle du surfeur sur le Web

Dans toute cette partie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires utilisées sont toutes définies sur cet espace. On rappelle que l'on numérote de 1 à N les N pages Web référencées dans Google. On considère un internaute surfant sur le Web en utilisant Google, on

note X_0 la première page visitée et X_n la page sur laquelle il se retrouve au bout de n opérations (soit de clic sur un lien dans une page soit d'abandon au profit d'une autre adresse). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est à valeurs dans $\{1,2,...,N\}$ et on admettra que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$vérifie pour tout entier $n \geq 1$ et tout $(x_{n-1}, x_n) \in \{1,2,...,N\}^2$

$$P_{\{X_{n-1}=x_{n-1}\}}(X_n = x_n) = P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = G(x_n, x_{n-1})$$

où G est la matrice de Google. On considère n un entier naturel strictement positif.

I.B.1 On note V_n le vecteur de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont pour tout $i \in \{1,2,...,N\}$, la $i^{\text{ème}}$ composante est définie par $(v_n)_i = P(X_n = i)$. Vérifier que V_n est bien un vecteur de probabilité.

I.B.2 Exprimer pour tout $(i,j) \in \{1,2,...,N\}^2$ $P(\{X_n = i\} \cap \{X_{n-1} = j\})$ à l'aide de G et V_{n-1}.

I.B.3 En déduire que $V_n = GV_{n-1}$.

I.B.4 Montrer que pour tout k entier naturel $V_k = G^k V_0$.

Partie II Matrices stochastiques

Le but de cette deuxième partie est de prouver l'existence et l'unicité d'un vecteur de probabilité invariant pour une matrice stochastique strictement positive.

A. Etude d'un exemple

On considère une matrice $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stochastique et strictement positive. Q peut se mettre sous la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 1-q & q' \\ q & 1-q' \end{pmatrix}$$

avec $q \in]0,1[$ et $q' \in]0,1[$.

II.A.1 Déterminer l'ensemble des vecteurs $V \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $QV = V$.

II.A.2 Montrer qu'il existe un unique vecteur de probabilité $V_\infty \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ invariant par Q et le calculer.

II.A.3 Prouver que pour tout entier $n \geq 1$

$$Q^n = \frac{1}{q+q'}\begin{pmatrix} q' & q' \\ q & q \end{pmatrix} + \frac{(1-q-q')^n}{q+q'}\begin{pmatrix} q & -q' \\ -q & q' \end{pmatrix}.$$

II.A.4 En déduire que $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers l'infini vers une matrice dont les deux vecteurs colonnes sont égaux à V_∞.

On cherchera à généraliser ce résultat dans la partie III.

B. Existence d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.B, $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique.

II.B.1 On note U le vecteur élément de $\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ dont toutes les composantes valent 1. Calculer ${}^tQU$.

II.B.2 Montrer que si $Q - I_N$ est inversible, alors ${}^tQ - I_N$ est aussi inversible.

II.B.3 Déduire des deux questions précédentes que 1 est valeur propre de Q.

Soit λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$ et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à la valeur propre λ.

II.B.4 Prouver que le vecteur $Q|V| - |V|$ est positif.

II.B.5 Montrer que le vecteur $|V|$ est invariant par Q.

Indication : on pourra sommer les composantes du vecteur $Q|V| - |V|$.

II.B.6 Prouver l'existence d'au moins un vecteur de probabilité invariant par Q.

C. Unicité d'un vecteur de probabilité invariant

Dans cette section II.C, $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique strictement positive. On sait d'après II.B.6 qu'il existe au moins un vecteur de probabilité invariant par Q noté

$$V_\infty = \begin{pmatrix} (v_\infty)_1 \\ . \\ . \\ (v_\infty)_N \end{pmatrix}.$$

Cette section II.C permettra de démontrer l'unicité d'un tel vecteur.

II.C.1 Prouver que si V est un vecteur positif invariant par Q, alors soit $V = 0_{\mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})}$ soit V est strictement positif.

II.C.2 Justifier que V_∞ est strictement positif.

On considère à présent un autre vecteur de probabilité noté

$$W_\infty = \begin{pmatrix} (w_\infty)_1 \\ . \\ . \\ (w_\infty)_N \end{pmatrix}$$

invariant par Q. Puis, on définit

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\left\{ \frac{(w_\infty)_i}{(v_\infty)_i} \mid 1 \leq i \leq N \right\} = \frac{(w_\infty)_{i_0}}{(v_\infty)_{i_0}} \text{ et} \\ V &= W_\infty - \alpha V_\infty. \end{aligned}$$

II.C.3 Montrer que V est invariant par Q.

II.C.4 Montrer que V est positif mais pas strictement positif.

II.C.5 En déduire que $W_\infty = \alpha V_\infty$.

II.C.6 En conclure que $W_\infty = V_\infty$.

On reprend jusqu'à la fin de cette partie les notations de la partie I sur Google et la notion de PageRank.

II.C.7 Montrer que le système (S) définissant le PageRank admet bien une et une seule solution.

II.C.8 Démontrer que $p(i) \geq (1-\rho)/N$ pour tout $i \in \{1, ..., N\}$.

II.C.9 Le rôle du paramètre ρ est essentiel pour assurer l'unicité de la solution du système (S). Que se passerait-il pour $\rho = 1$ et disons $N = 3$ pour simplifier à l'extrême? (Songer qu'il peut exister des pages Web qui ne pointent vers aucune autre!).

Partie III Validation du PageRank

Dans toute cette partie III, on considère $Q \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ matrice stochastique strictement positive. On notera V_∞ l'unique vecteur de probabilité invariant par Q.

A. Valeurs propres de Q

Il s'agit dans cette section III.A de localiser les valeurs propres de Q.

III.A.1 Vérifier que pour tout vecteur $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ on a

$$\|QV\|_1 \leq \|V\|_1$$

avec de plus $\|QV\|_1 = \|V\|_1$ lorsque V est positif.

III.A.2 En déduire que pour toute valeur propre réelle λ de Q, on a $|\lambda| \leq 1$.

Soient λ une valeur propre réelle de Q telle que $|\lambda| = 1$, et $V \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de Q associé à λ tel que $\|V\|_1 = 1$. On sait grâce au II.B.5 que $|V| = V_\infty$.

III.A.3 Etablir l'identité

$$\left|\sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\, v_j\right| = \sum_{j=1}^{N} Q(1,j)\, |v_j|$$

où v_i est la $i^{\text{ème}}$ composante de V pour $i \in \{1, ..., N\}$.

III.A.4 En déduire en utilisant P 3 que V est colinéaire à $|V|$ puis que $\lambda = 1$.

B. Convergence

On fera dans cette section III.B l'hypothèse supplémentaire que Q est diagonalisable.

Le but de ce qui suit est d'établir que la suite $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge, lorsque n tend vers l'infini, vers la matrice Q_∞ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à V_∞.

III.B.1 Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ et une matrice inversible $S \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, telles que pour tout $n \geq 1$, $Q^n = SD^nS^{-1}$.

III.B.2 Prouver que parmi les N coefficients diagonaux de D un et un seul est égal à 1 alors que tous les autres sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

III.B.3 En déduire que la suite $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge vers une matrice Q_∞.

III.B.4 Prouver que pour tout $n \geq 1$, Q^n est stochastique puis que Q_∞ est stochastique.

III.B.5 Démontrer que $QQ_\infty = Q_\infty$.

III.B.6 En déduire que chacun des vecteurs colonnes de Q_∞ est invariant par Q.

III.B.7 Conclure.

On admettra pour la partie III.C que $(Q^n)_{n\geq 1}$ converge lorsque n tend vers l'infini vers la matrice Q_∞ dont les vecteurs colonnes sont tous égaux à V_∞ sous les seules hypothèses Q stochastique et strictement positive.

C. Application au modèle du surfeur

On reprend pour la fin du sujet les notations du PageRank de Google décrit dans l'introduction de la partie I et du modèle du surfeur décrit dans la partie I.B. On considère X_∞ la variable aléatoire à valeurs dans $\{1, ..., N\}$ dont la loi est définie par

$$P(X_\infty = i) = p(i) \text{ pour tout } i \in \{1, 2, ..., N\}.$$

III.C.1 Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers X_∞ lorsque n tend vers l'infini.

III.C.2 En quoi ce résultat donne-t-il du sens à l'assertion un peu vague: "le PageRank d'une page donnée représente la chance qu'un internaute se retrouve sur la page en question lorsqu'il surfe"?

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé N°3 (Pr Taibi Mimoun)

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
1- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
2- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
3- L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augment dernièrement.
4- Les deux vous explosent le système de temps en temps.
5- Bill, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Il fut immobile les trois dernières années de sa vie et s'éteint à Berlin à la suite d'une pneumonie. Il créa avec Alfred Enneper une classe complète de paramétrisations. Karl Weierstrass est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Il consolida des travaux de Cauchy (1789-1857) sur les nombres irrationnels et leur amena une nouvelle compréhension. Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable. Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës

Mathématicien du jour

1 Un vecteur propre strictement positif

$T \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $T > 0$ et $(I_n + T)^{n-1} > 0$.

1 1°.] Soit $x \in B$ ($x > 0$ et $x \neq 0$) Montrons que $\Gamma_x = \{\theta \in \mathbb{R}_+ \ / \ \theta x \leqslant Tx\}$ est un enesemble non vide fermé et borné .

$0 \in \Gamma_x$ car $Tx \geqslant 0 = 0.x$, donc Γ_x est non vide.

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, l'application $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\theta \mapsto (Tx)_i - \theta.x_i$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $\Gamma_x = \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} \varphi_i^{-1}([0, +\infty[) \cap \mathbb{R}_+$ est un fermé coimme intresection de fermés .

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$, et tout $i = 1...n$, on a : $\theta \leqslant \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$ pour $x_i \neq 0$, donc Γ_x est borné .

On pose $\theta(x) = \max(\Gamma_x)$

2 2°] Soit $x \in B$, montrons que $\theta(x) = \min\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i} \ / \ i = 1...n, \ x_i \neq 0\}$.

Pour tout $\theta \in \Gamma_x$ et pour tour i$\in \{1, ..n\}$ tel que $x_i \neq 0$, on a : $\theta \leqslant \dfrac{(Tx)_i}{x_i}$. Donc $\theta(x) \leqslant \min\{\dfrac{(Tx)_i}{x_i} \ /$

$i=1...n,\ x_i \neq 0\}$

D'autre part les réels $\frac{(Tx)_i}{x_i}$ avec $x_i \neq 0$ sont dans Γ_x . D'où $\theta(x) = \min\{\frac{(Tx)_i}{x_i} \ / \ i=1...n,\ x_i \neq 0\}$.

3 3°] Montrons que pour tous $\alpha > 0$ et $x \in B$, on a : $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

Comme T est linéaire, on a : $\{\frac{(T(\alpha x))_i}{(\alpha x)_i} \ / \ i = 1..n \text{ et } x_i \neq 0\} = \{\frac{(T(x))_i}{(x)_i} \ / \ i = 1..n \text{ et } x_i \neq 0\}$, donc $\theta(\alpha x) = \theta(x)$

4 4°] Montrons que $P(B) \subset B^+$

Soit $x \in B$, posons $y = Px$, $P = (p_{ij})_{ij}$ et $(y)_i = y_i$.

Comme $x \neq 0$ et $x \geqslant 0$, alors il existe j_0 tel que $x_{j_0} > 0$, Dond, pour tout i, on a : $y_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j = p_{ij_0}x_{j_0} + \sum_{j=1, j\neq j_0}^{n} p_{ij}x_j > 0$ car $P > 0$ et $x \geqslant 0$. D'où le résultat demandé .

5 5°] Montrons que : $\forall x \in B$, $\theta(Px) \geqslant \theta(x)$ et $\theta(Px) > 0$

Pour $\theta \in \Gamma_x$, on a : $\theta x \leqslant Tx$, donc $\theta Px = P(\theta x) \leqslant P(Tx)$ car $P > 0$ ($P(\underbrace{Tx - \theta x}_{\geqslant 0}) \geqslant 0$)

D'où $\theta Px \leqslant T(Px)$ car $TP = PT$ (P polynôme en T) et par suite $\Gamma_x \subset \Gamma_{Px}$

En conclusion :

$$\theta(x) = \max \Gamma_x \leqslant \max \Gamma_{Px} = \theta(Px).$$

Reste à verifier que $\theta(Px) > 0$.

D'après la question 4° $P(B) \subset B^+$, donc $TPx = P(Tx) > 0$ et $Px > 0$ car $Tx \in B$ et puis $\theta(Px) = \min\{\frac{(P(Tx))_{ii}}{(Px)_{ii}} \ , \ i = 1..n\} > 0$.

6 6°] Supposons que $x \in B$ est un vecteur porpre de T associé à la valeur propre λ, montrons que $\theta(Px) = \theta(x)$.

x étént positif, donc $Tx > 0$ et pour tout $i = 1..n$, $0 \leqslant (Tx)_i \leqslant \lambda x_i$.

Pour $i_0 \in \{1, ..., n\}$ tel que $x_{i_0} \neq 0$, on a $\lambda \geqslant \frac{(Tx)_{i_0}}{x_{i_0}} \geqslant 0$.

Comme $P = (I + T)^{n-1}$, il en résulte que $(1 + \lambda)^{n-1}$ est une valeur paropre de P et $Px = (1 + \lambda)^{n-1}x$.

D'où $\theta(Px) = \theta((1 + \lambda)^{n-1}x) = \theta(x)$ car $(1 + \lambda)^{n-1} > 0$.

En conclusion : $\theta(Px) = \theta(x)$

7 7°] Soit $x \in B$ tel que $\theta(Px) = \theta(x)$. Montrons que x est un vecteur propre associé à la valeur propre $\theta(x)$.

Posons $y = Tx - \theta(x)x$, on a $y \geqslant 0$

Si $y \neq 0$, comme $P > 0$, on a : $0 < Py = P(Tx - \theta(x)x) = P(Tx) - \theta(x)Px = T(Px) - \theta(x)P(x)$ car P et T commutent.

Donc, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $(T(Px))_i - \theta(x)(Px)_i > 0$ et puisque $\theta(x) = \theta(Px)$, on a : $\theta(x) < \min\{\frac{(T(Px))_i}{(Px)_i} \ , \ i = 1..n\} = \theta(Px)$ ce qui est absurde .Donc : $y = 0$ et par suite $Tx = \theta(x)x$.

8 8°] Soit $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$. Montrons que $\theta : P(C) \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \theta(y)$ est continue sur $P(C)$.

Pour $i = 1..n$, soit l'application $\varphi_i : y \mapsto \frac{(Ty)_i}{y_i}$ est bien définie et continue sur $P(C)$ car tout élément y de $P(C)$ est strictement positif . Donc $\theta = \min(\varphi_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est continue sur $P(C)$.

9 9°] Comme $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$ est un compact (fermé +bornée en dimension finie) , et l'application P est coninue sur $\mathbb{R}^n$ car linéaire sur un espace de dimension finie, donc $P(C)$ est compact dans $\mathbb{R}^n$.
L'application θ étant continue sur le compact $P(C)$ à valeur dans $\mathbb{R}$, il existe donc $x_0 \in P(C)$ tel que

$$\theta(x_0) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

.

10 10°] Pour $x \in C \subset B$, on a $Px \in P(C) \subset B^+$ et par la question 5) : $\theta(x) \leqslant \theta(Px)$. Donc :
Pour tout $x \in C = B \cap \sum$, $\theta(x) \leqslant \theta(Px) \leqslant \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$.et par suite :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) \leqslant \sup_{y \in P(C)} \theta(y)$$

11 11°] Lorsque x décrit B , alors $y = \dfrac{1}{\|x\|_1} x$ décrit C, donc $\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{y \in C} \theta(\|x\|_1 y) = \sup_{y \in C} \theta(y)$ car $\|x\|_1 > 0$ (voir question 3°)

12 12°] D'après ce qui prècède, on a :

$$\sup_{x \in B} \theta(x) = \sup_{x \in C} \theta(x) \leqslant \sup_{x \in P(C)} \theta(x) = \theta(x_0) \overset{\text{noté}}{=} \theta_0$$

Comme l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} C = B \cap \sum & \to & P(C) \\ x & \mapsto & Px \end{array} \right\}$ est bijective, on a :

$$\sup_{x \in C} \theta(x) = \sup_{x \in P(C)} \theta(x)$$

13 13°]

$x_0 \in P(C)$, donc $x_0 > 0$. On rappelle que $C = B \cap \sum = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant 0 \text{ et } \|x\|_1 = 1\}$ est compact .
On a aussi $y = Tx_0 - \theta_0 x_0 \geqslant 0$.
Si $y > 0$, alors pour tout $i = 1..n$; $(Tx_0)_i - \theta_0 (x_0)_i > 0$, donc $\theta_0 < \{\dfrac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i},\ i = 1..n\}$ et apr suite :

$$\theta_0 < \min\{\frac{(Tx_0)_i}{(x_0)_i},\ i = 1..n\} = \theta(x_0) = \theta_0 \text{ ce qui absurde. D'où } Tx_0 = \theta_0 x_0 .$$

Par $\theta(Px) > 0$ pour tout $x \in B \cap \sum = C$ et que θ est continue sur le compact $P(C)$, on déduit que

$$\theta_0 = \sup_{x \in P(C)} \theta(x) > 0 .$$

2 Une méthode d'approximation

T est une matrice stochastique positive telle que $P = (I_n + T)^{n-1} > 0$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $x^+ = (|x_1|, ..., |x_n|)$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k = \dfrac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} T^j$

14 14°] Soit $\theta \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de T associé à θ, on a $x \neq 0$ et $Tx = \theta x$
Pour $i = 1...n$; $(Tx)_i = \theta x_i$, donc $|\theta|\,|x_i| = |(Tx)_i|$.

Si $T=(t_{ij})$, alors $(Tx)_i=\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_j$ et apr suite : $|(Tx)_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n}t_{ij}|x_j| \quad ; t_{ij}\geqslant 0 = (Tx^+)_i$,.D'où $|\theta||x_i| \leqslant (Tx^+)_i$ et par suite :

$$|\theta|x^+ \leqslant Tx^+$$

15 15°] Comme $x\neq 0$, on a $x^+\geqslant 0$ et $x^+\neq 0$ et $|\theta|x^+\leqslant Tx^+$ (question 14). Donc $|\theta|\leqslant \theta(x^+)\leqslant \theta_0$.

16 16°] On a $|\theta|\,\|x\|_1=|\theta|\sum_{i=1}^{n}|x_i|=\sum_{i=1}^{n}|\theta|\,|x_i|$. Or $Tx=\theta x$, donc :

$$\begin{aligned}|\theta|\,\|x^+\|_1 = |\theta|\,\|x\|_1 = \|\theta x\|_1 = \|Tx\|_i &= \sum_{i=1}^{n}|(Tx)_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\,|x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}t_{ij}}_{=1}\Big)\,|x_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n}|x_j| = \|x^+\|_1\end{aligned}$$

En conclusion :

$$|\theta|\,\|x^+\|_1\leqslant \|x^+\|_1$$

Comme $x\neq 0$, on a $\|x^+\|_1>0$ et puis $|\theta|\leqslant 1$.

17 17°] Comme T est stochastique ($\forall j,\ \sum_{i=1}^{n}t_{ij}=1$), alors $\theta=1$ est une valeur propre de T associée au vecteur propre $x=(1,1,....,1)\in\mathbb{R}^n$, donc $\theta=1\leqslant\theta_0$ (question 15). or θ_0 est valeur propre de T (question 13) et puis apr la question **16**, on a :

$$\theta_0=1$$

18 18°] Montrons que pour tout $k\geqslant 1$, T^k et R_k sont stochastiques.

Première méthode : On ulilise les résultats suivants

(1) Une matrice $A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ et stochastique si et seulement si $u=(1,....,1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

(2) Si $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $A\in M_{n,n}(\mathbb{R})$ admet une valeur propre λ associé à un vecteur propre x, alors $Q(\lambda)$ est une veleur propre de $Q(A)$ associé au vecteur propre x.

Et on remarque que T^k et R_k sont des polynômes en la matrice stochastique T .

Dexième méthode : Utiliser une récurrence

$T^0=I_n$ et T^1 sont stochastiques

Si, pour $k\geqslant 1$ la matrice T^k est stochastique, alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(T^{k+1})_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(T)_{il}(T^k)_{lj} &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(T)_{il}(T^k)_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(T)_{il}}_{=1}(T^k)_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}(T^k)_{lj}=1 \qquad \text{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

Donc T^{k+1} est aussi stochastique.

$R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T^j$, donc $\sum_{i=1}^{n}(R_k)_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}(T^j)_{ij} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k}\underbrace{\sum_{i=0}^{n}(T^j)_{ij}}_{=1} = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{k} = 1$.

19 19°] Montrons les inégalités : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left\|T^k\right\|_1 \leqslant 1$ et $\|R_k\|_1 \leqslant 1$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x \neq 0$, et $k \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left\|T^k x\right\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|(T^k x)_i\right| \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n}(T^k)_{ij}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|T^k\right)_{ij}\right||x_j| = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(T^k)_{ij}}_{\geqslant 0}|x_j| \quad \text{Car } T \geqslant 0 \\
&= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(T^k)_{ij}}_{=1}|x_j| \quad \text{car } T \text{ est stochastique} \\
&= \sum_{j=1}^{n}|x_j| = \|x\|_1
\end{aligned}$$

On en déduit que $\left\|T^k\right\|_1 = \sup_{x\neq 0}\frac{\left\|T^k x\right\|_1}{\|x\|_1} \leqslant 1$.

De même $\|R_k\|_1 \leqslant 1$ car R_k est aussi stochastique.

20 20°] Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$; $\|TR_k - R_k\| \leqslant \frac{2}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, Si $k = 1$, alors $R_1 = I_n$, donc $TR_1 - R_1 = T - I_n$ et par suite $\|TR_1 - R_1\|_1 = \|T - I_n\|_1 \leqslant \|T\|_1 + \|I_n\|_1 = 1 + 1 = \frac{2}{1}$

Si $k > 1$, on a :

$TR_k - R_k = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}T^{j+1} - \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}T^j = \frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k}T^j - \sum_{j=0}^{k-1}T^j\right) = \frac{1}{k}(T^k - I_n)$, donc $\|TR_k - R_k\|_1 = \left\|\frac{1}{k}(T^k - I_n)\right\|$

$\frac{1}{k}\left(\left\|T^k\right\|_1 + \|I_n\|_1\right) \leqslant \frac{2}{k}$

21 21°] Soit $x \in \mathbb{C}^n$, montrons que la suite vectorielle $(R_k x)_k$ a au moins une valeur d'adhérence

Comme R_k est stochastique pour tout $k > 0$, on a d'après la question 19) : $\|R_k x\|_1 \leqslant \|R_k\|_1 \|x\|_1 \leqslant \|x\|_1$. La suite $(R_k x)_k$ est bornée dans l'espace de dimension finie $\mathbb{C}^n$, donc par le théorème de Bolzano-Weiestrass, la suite $(R_k x)_k$ admet au moins une valeur d'adhérence dans $\mathbb{C}^n$.

22 22°] Soit y une valeur d'adhérence de la suite $(R_k x)_{k\geqslant 1}$ et $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, $k \mapsto \varphi(k)$ une extraction telle que $\lim_{k\infty} R_{\varphi(k)}x = y$. Or $\left\|TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x\right\|_1 \leqslant \left\|TR_{\varphi(k)} - R_{\varphi(k)}\right\|_1 \|x_1\|_1 \leqslant \frac{2}{\varphi(k)}\|x_1\|_1 \underset{k\infty}{\to} 0$, donc $\lim_{k\infty}\left(TR_{\varphi(k)}x - R_{\varphi(k)}x\right) = 0$ (toutes les normes sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes) et comme T est continue sur $\mathbb{C}^n$ (application liéaire sur un espace de dimension finie) et que $\lim_k R_{\varphi(k)}x = y$, il en résulte que $\lim_k TR_{\varphi(k)}x = Ty$ et puis $Ty = y$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $T^j y = y$ (y point fixe de T), donc $R_k y = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}T^j y = \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}y = y$.

23 23°] Soient y et z deux valeurs d'adhérence de la suite $(R_k x)_k$ et m, l deux entiers naturels, on a :
$R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y) = -R_l z + R_m y = y - z$ (resulte de la question 20) et du fait que R_l et R_m commutent car des polynômes en T) .

24 24°] Montrons que la suite $(R_k x)_k$ admet une seule valeur d'adhérence.
Si y et z sont des vaelurs d'adhérence de la suite $(R_k x)_k$, alors d'après la question **23**)

$$\begin{aligned}\|y-z\|_1 &= \|R_l(R_m x - z) - R_m(R_l x - y)\|_1 \\ &\leqslant \|R_l(R_m x - z)\|_1 + \|R_m(R_l x - y)\|_1 \\ &\leqslant \|R_l\|_1 \|R_m x - z\|_1 + \|R_m\|_1 \|R_l x - y\|_1 \\ &\leqslant \|R_m x - z\|_1 + \|R_l x - y\|_1 \qquad \text{car } \|R_k\|_1 \leqslant 1\end{aligned}$$

On prend alors $l = \varphi(k)$ et $m = \psi(k)$ où φ et ψ sont deux extractions telles que $\lim\limits_{k\infty} \|R_{\psi(k)} x - z\|_1 = 0$ et $\lim\limits_{k\infty} \|R_{\varphi(k)} x - y\|_1 = 0$, pour déduire que $\lim\limits_{k\infty} \|y - z\|_1 = 0$ et puis $y = z$.

25 25°] Soit $x \in C^n$, la suite $(R_k x)_k$ est bornée et admet une unique valeur d'adhérence dans C^n, donc converge dans C^n. Sa limite dépond à priori de x, notons la Rx : $Rx = \lim\limits_{k\infty} R_k x$.
Par linérité de R_k et de la limite, on déduit que R est linéaire (R est donc une matice, d'après d'identification faite au début du problème) .

Si l'on prend $x = E_j$ où $(E_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ est la base canonique de C^n, on a : $\lim\limits_{k} R_k E = RE_j$, donc les suites composantes de $(R_k)_k$ convergent vers les composantes de R et par suite $(R_k)_k$ converge vers R ..

26 26°] Montrons que T et R commutent .
T et R_k commutent car R_k est un polynôme en T. Comme $TR_k = R_k$ pour tout $k \geqslant 1$ et que les applications $\begin{matrix} M_{n,n}(\mathbb{C}) & \to & M_{n,n}(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & MT \end{matrix}$ et $\begin{matrix} M_{n,n}(\mathbb{C}) & \to & M_{n,n}(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & TM \end{matrix}$ sont continues (car linéaires sur un espace de dimensions finie) , on a donc : $TR = \lim\limits_{k} TR_k = \lim\limits_{k} R_k T = RT$.

27 27°] Montrons que $RT = R$ et $R^2 = R$.
D'après al question 20) la suite $(TR_k - R_k)_k$ converge vers 0 et par la question 25) la suite $(R_k)_k$ converge vers R, donc $(TR_k)_k$ converge vers R. Mais $(TR_k)_k$ converge aussi vers TR, donc $TR = R$..
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $R_k R = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} T^j R = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} RT^j$ et puisque $RT = R$, on a aussi $RT^j = R$ pour tout $j \geqslant 0$,
donc $R_k R = \dfrac{1}{k}\sum\limits_{j=0}^{k-1} R = R$.
On fait tendre alors k vers $+\infty$ (l'application $M \mapsto MR$ est continue), il en resulte que $R^2 = R$.

28 28°] Par $TR = R$, on a : $(T - I_n)R = R(T - I_n) = 0$ (T et R commutent). Donc : $\begin{cases} \mathrm{Im}(T - I_n) \subset \mathrm{Ker}(R) \\ \mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Ker}(T - I_n) \end{cases}$
De plus $R^2 = R$, donc R est un projecteur tel que $\mathrm{Im}(R) \subset \mathrm{Ker}(T - I_n)$.

29 29°] On suppose que $\mathrm{Ker}(T - I_n) = 1$, alors par la question 28) , $\mathrm{rg}(R) \leqslant 1$.
Notons $u = (1, ..., 1)$, on a : $R_k u = u$ pour tout $k \geqslant 1$ car R_k est stochastique. Donc $Ru = \lim\limits_{k\infty} R_k u = u$ et par suite $R \neq 0$ (R est même stochastique).
D'où $\mathrm{rg}(R) \geqslant 1$.
On conclut que $\mathrm{Im}(R) = \mathrm{Ker}(T - I_n)$ et $\mathrm{Ker}(R) = \mathrm{Im}(T - I_n)$.
On sait que x_0 est un vecteur propre de T associé à la valeur propre 1 (voir questions 13 et 17), donc $\mathrm{Ker}(T - I_n) = \mathrm{vect}(x_0)$.
Soit $x \in B$, on a $Rx \in \mathrm{Im}(R) = \mathrm{Ker}(T - I_n) = \mathrm{vect}(x_0)$, donc il existe $\lambda \in R$ tel que $Rx = \lambda x_0$ (**).
De (**) on déduit que $\lambda \geqslant 0$ car $R \geqslant 0$ et $x_0 > 0$

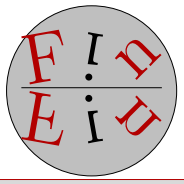
De plus $|\lambda|\,\|x_0\|_1 = \|Rx\|_1 = \sum_{i=1}^{n}(Rx)_i$ car $R \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(R)_{ij}x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(R)_{ij}x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}(R)_{ij}}_{=1}x_j \quad R \text{ est stochastique} \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j = \|x\|_1
\end{aligned}$$

Donc $\lambda = |\lambda| = \dfrac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}$ et par suite $Rx = \dfrac{\|x\|_1}{\|x_0\|_1}x_0$

Remarque : Si $y \in B \cap \sum = C$, alors $y \in B$ et $\|y\|_1 = 1$, et par suite

$$\lim_{k\infty} R_k y = Ry = \frac{x_0}{\|x_0\|_1}.$$



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir libre N°10

Résolution d'une EDP
Changement de variables

MP-CPGE Rabat

Vendredi 3 Décembre 2010

Blague du jour

Une fonction constante et $\exp$ marchent tranquillement dans la rue. Soudain la ils aperçoivent la différentielle qui approche. Se sentant menacée, la fonction constante se sauve. Dans un air moqueur et de défi, l'$\exp$ crie : Ah !Ah ! je m'inquiète pas, MOI, je suis une puissance, je suis ex. Dans quelques minute la différentielle revient avec juste sa force partielle et crie : Salut, MOI, je suis $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Mathématicien du jour

Philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi allemand. Orphelin de père à 6 ans, il a quand même réussi une carrière florissante. Il est reconnu comme le plus grand intellectuel d'Europe, pensionné par plusieurs grandes cours, il tait aussi correspondant des souverains et souveraines.
Comme philosophe, il s'est intéressé fort tôt à la scolastique et à la syllogistique. Il a conçu le projet d'une encyclopédie ou bibliothèque universelle . Comme mathématicien, il a fait entrer les sciences dans la nouvelle ère de l'analyse intégra-différentielle.

Notations.

- Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0, y > 0\}$ et f est de classe C^2 sur D.
- On pose $r = \sqrt{x^2+y^2}, t = \dfrac{y}{x}$ et $f(x,y) = g(r,t)$.
- On pose enfin $Tf(x,y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $N_a = \{f \in \mathcal{C}^1(D)$ tel que $Tf - af = 0\}$.

1 Montrer que D est un ouvert.

2 Préciser le domaine de définition de g, puis justifiez qu'elle est de classe C^2.

3 Si $(f,h) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(D)$, exprimer $T(fh)$ en fonction de f, h, Tf et Th.

4 Si $(f,\varphi) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, donner l'expression de $T(\varphi \circ f)$.

5 Exprimer Tf en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial t}, r, t$.

6 Calculer Tt.

7 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$ alors $\varphi \circ t \in N_0$.

8 En déduire la forme générale des fonctions $f \in N_0$.

9 Calculer Tr.

10 Montrer que $f \in N_0 \iff rf \in N_1$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

11 Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $t(r^a)$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_a$.

12 On se propose dans la suite de résoudre l'équation : (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$.

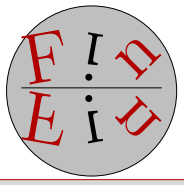
a On suppose d'abord que : $a = b$ Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \varphi(r)h$ où $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ que l'on explicitera, en déduire la forme générale des solutions de (*).

b On suppose maintenant que : $a \neq b$ Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \lambda h$ où λ est une constante que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).

13 Résoudre les équations suivants :

a $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy}$.

b $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre N°10 (Pr Mamouni)

Résolution d'une EDP
Changement de variables

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Pour une question bien précise :
- Un ingénieur pense que ses équations sont une approximations de la réalité.
- Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.
- Un mathématicien s'en moque.

John Machin (1680 - 1751)

Mathématicien anglais, connu principalement pour avoir calcul en 1706, 100 décimales de $\boldsymbol{\pi}$ grâce à la formule qui porte son nom : $\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}} = \mathbf{4}\arctan\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} - \arctan\mathbf{1239}$. Malgré un nom de famille très drôle, John Machin a enseigné les mathématiques à Brook Taylor. Il était aussi professeur d'astronomie, secrétaire de la Royal Society et membre de la commission qui décida de la priorité de Calcul entre Leibniz et Newton en 1712.

Mathématicien du jour

.

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_1(x,y) > 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_2(x,y) > 0\}$ est un ouvert en tant qu'intersection de deux ouverts, car les fonctions $f_1(x,y) \longmapsto x$ et $f_2(x,y) \longmapsto y$ sont continues.

2) La linéarité de l'application $T : f \longrightarrow T(f)$ découle de celle des dérivées partielles.

3) $T(fh) = fT(h) + hT(f)$ car $\dfrac{\partial(fh)}{\partial x} = f\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(fh)}{\partial y} = f\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4) $T(\varphi\circ f) = (\varphi'\circ f)T(f)$ car $\dfrac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial x} = (\varphi'\circ f)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial(\varphi\circ f)}{\partial y} = (\varphi'\circ f)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

5) D'aprés les formules du cours : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$, on en déduit que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial 1}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$

d'où $T(f) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

6) $Tt = 0$, simple calcul.

7) $T(\varphi\circ t) = (\varphi'\circ)Tt = 0$, donc $\varphi\circ \in N_0$.

8) D'aprés ce qui précède, si $f = \varphi\circ t$, alors $f \in N_0$. Inversement soit $f \in N_0$, alors $T(f) = r\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0$, donc $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 0$, donc $g(r,t) = \varphi(t)$, d'où $f(x,y) = g(r,t) = \varphi(t) = \varphi\circ t(x,y)$. Donc $\varphi\circ t$ est la forme générale des éléments de N_0.

9) $Tr = r$, simple calcul.

10) $rf \in N_1 \iff T(rf) = rf \iff rT(f) + fT(r) = rf \iff T(f) = 0$ car $Tr = r$, ainsi $f \in N_1 \iff \dfrac{1}{r}f \in \mathbb{N}_0 \iff \dfrac{1}{r}f = \varphi \circ t \iff f = r\varphi \circ t$, c'est la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

11) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $T(r^a) = T\left((x^2+y^2)^{\frac{a}{2}}\right) = ar^a$, de la même façon que précédement, on a $T(r^a f) = r^a T(f) + ar^a f$, donc $r^a f \in N_a \iff f \in N_0$ et on en déduit que la forme générale des fonctions $f \in N_a$ est $f = r^a \varphi \circ t$.

12) (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$, donc $Th = bh$.

a) Supposons $a = b$, soit $f_0 = \varphi(r)h$ une solution particulière f_0 où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$, donc $Tf_0 = T((\varphi \circ r)h) = (\varphi \circ r)Th + hT(\varphi \circ r) = (\varphi \circ r)bh + h(\varphi' \circ r)Tr = bf + rh(\varphi' \circ r)$, ainsi $Tf_0 - af_0 = bh$ devient $(b-a)f_0 + rh(\varphi' \circ r) = h$, d'où $r\varphi'(r) = 1$, c'est une équation différentielle du 1ère ordre de solution $\varphi(r) = \ln r$. Soit f une solution générale de (*), comme l'est f_0 aussi, alors $T(f - f_0) - a(f - f_0) = 0$, d'où $f - f_0 \in N_a$, donc $f - f_0 = r^a \varphi \circ t$, d'où $f = f_0 + r^a \varphi \circ t = \ln r + r^a \varphi \circ t$ c'est la forme générale des solutions de (*) quand$a = b$

b) On suppose maintenant que : $a \neq b$. Soit $f_0 = \lambda h$ alors $Tf_0 = \lambda Th = \lambda bh$, $Tf_0 - af_0 = h$ donne $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$. De façon pareille toute solution f de (*) s'écrit sous la forme $f = f_0 + r^a \varphi \circ t = \dfrac{1}{b-a}h + r^a \varphi \circ t$, c'est la forme générale des solutions de (*) quand $a \neq b$.

13) a) Pour cette équation $a = 1$, $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2-xy}$. Les calculs montrent que $Th = 0$, d'où $b = 0$, donc $a \neq b$, d'où $f(x,y) = -h(x,y) + \sqrt{x^2+y^2}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Ici $a = 2, h(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$. Les calculs montrent que $Th = 2h$, d'où $a = b = 2$, donc $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir libre N°11

Extrema liés Multiplicateurs de Lagrange

MP-CPGE Rabat

Vendredi 10 Décembre 2010

Blague du jour

Lors d'un discours prononcé devant une assemble de professeurs de mathématiques, George W.Bush les met en garde contre le mauvais usage des mathématiques pour inculquer aux jeunes américains des visions politiques extrémistes.
Si j'ai bien compris, dit le président, dans vos cours d'algèbre vous apprenez à vos étudiants la résolution des problèmes et d'équations avec l'aide des radicaux. Je ne peux pas dire que j'approuve ceci...

Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813)

Mathématicien du jour

En italien Giuseppe Lodovico Lagrangia , est un mathématicien, mécanicien et astronome franco-italien. N en Italie, mais de famille française par son arrière-grand-père.
Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, son nom figure partout en mathématiques. Il développe la mécanique analytique, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie. Il élabore le système métrique avec Lavoisier et enseigne les mathématiques à l'école normale et à l'école polytechnique.

1 Principe

1 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ où $1 \leqslant i \leqslant m$ et $V = \{x \in U \text{ tel que } f_i(x) = 0,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Montrer le résultat suivant :
Si $f|_V$ admet un extremum local en un point $a \in V$, alors

$$\exists (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \text{ tel que } \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\text{grad}} f_i(a)$$

Les coefficients $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ s'appellent multiplicateurs de Lagrange.

2 Distance d'un point une sous-espace affine.

2 Soient $\mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a \in \mathcal{E}$, on se propose de donner une formule pour calculer

$$d(a, \mathcal{E}) = \min_{x\in\mathcal{E}} d(a, x)$$

3 Montrer que la distance de a à $\mathcal{E}$ est réalisée en un seul point, $x_a = p_{\mathcal{E}}(a)$, la projection orthogonale de a sur $\mathcal{E}$, i.e.

$$d(a,\mathcal{E}) = d(a,x_a)$$

4 Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbb{R})$ tel que $rg(A) = n-p$ et $\exists b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{E}$ soit d'équation $Ax+b=0$, i.e., $x \in \mathcal{E}$ si et seulement si $Ax+b=0$.

5 Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}\left({}^tAA\right)$, puis en déduire que ${}^tAA$ est inversible.

6 Montrer que $x_a = a - ({}^tA).\left({}^tAA\right)^{-1}(Aa+b)$, en déduire que $d(a,\mathcal{E}) = \left\|({}^tA).\left({}^tAA\right)^{-1}(Aa+b)\right\|$

7 Soit $f : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(a,x)^2\end{array}$, calculer $\overrightarrow{\text{grad}}f(x)$, puis en déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $x_a - a = \overrightarrow{\text{grad}}f(x_a) = ({}^tA).\lambda$

8 Montrer ensuite que $\lambda = -\left(AA^t\right)^{-1}(Aa+b)$.

9 Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ d'équation $\mathcal{H} : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ et $M = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{H}$, montrer que

$$d(M,\mathcal{H}) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

3 Le quotient de Rayleigh.

1 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré d si elle vérifie la relation suivante :

$$f(\lambda x) = \lambda^d(f(x)),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que si f est homogène de degré d et bornée sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$, alors
$\exists \alpha \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant \alpha \|x\|^d$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on pose

$$R(x) = \frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle},\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\quad \text{Quotient de Rayleigh.}$$

Montrer que que la fonction $f : x \mapsto \langle Ax,x\rangle$ est homogène.
Montrer que la fonction $x \mapsto R(x)$ admet un minimum et maximum globaux.

3 Montrer que $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un extremum pour la fonction $x \mapsto R(x)$ si et seulement si $\dfrac{a}{\|a\|}$ est un extremum pour la fonction $x \mapsto f(x)$.

4 Soit $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ extremum pour f, montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Aa = \lambda a$
Indication : Penser à utiliser le principe des extremas liés de Lagrange pour la fonction f avec la contrainte $f_1 : x \mapsto \|x\|^2 - 1$.

5 En déduire que $\min\limits_{x\neq 0} \dfrac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \min\limits_{\lambda\in sp(A)} |\lambda|$, $\max\limits_{x\neq 0} \dfrac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle} = \max\limits_{\lambda\in sp(A)} |\lambda|$

4 Les lois de l'optique géométrique

Nous supposons que la lumière se déplace en minimisant le temps de parcours et que, de plus, dans un milieux homogène, sa vitesse est constante. Dans un tel milieu, ses trajectoires sont donc des segments de droite. La question est de savoir comment est modifie sa trajectoire lorsqu'elle traverse la surface séparant deux milieux dans lesquels elle circule des vitesses différentes (lois de la réfraction) ou lorsqu'elle se réfléchit en un point de (lois de la réflexion). Dans le premier cas, un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle S place dans le premier milieu traverse une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ en un point M et poursuit sa trajectoire jusqu'en un point cible C du second. Dans le second, M est le point en lequel le rayon se réfléchit vers la cible et celle-ci est dans le même milieu que la source. Nous supposons que Σ est définie par une équation cartésienne de la forme $f(x,y,z)=0$, o f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition. Soit v_1 la vitesse de la lumière avant l'incidence et v_2 après, on a en particulier $v_1 = v_2$ en cas de réflexion.

1 Montrer que la fonction $g : M \mapsto \left\|\overrightarrow{SM}\right\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$ et donner $\overrightarrow{\text{grad}}g(M)$ pour tout $M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$

2 Soit $t : M \mapsto t(M)$, la fonction qui calcule le temps de parcours du point source S au point cible C, en passant par un point $M \in \Sigma$. Montrer que : $t(M) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}{v_1} + \dfrac{\left\|\overrightarrow{CM}\right\|}{v_2}$.

3 En déduire $\overrightarrow{\text{grad}}t(M)$.

4 Rappeler le principe des extremas liés et multiplicateurs de Lagrange.

5 Soit $A \in \Sigma$ où le temps de parcours du point source S au point cible C, passant par A est minimal.
Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{\overrightarrow{SA}}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \cdot v_1} + \dfrac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot v_2} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}f(A)$

6 Que représente $\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$ pour Σ.

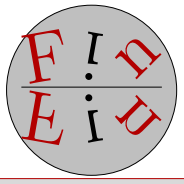
7 En déduire la 1ère loi de l'optique géométrique :
Le rayon incident $\overrightarrow{SA}$, le rayon réfracté (ou réfléchi), $\overrightarrow{CA}$ et la normale au point d'incidence la surface de séparation Σ sont dans un même plan.

8 Ce plan coupe le plan tangent à la surface Σ selon une droite Δ. En projetant scalairement l'égalité précédente sur le vecteur unité normé $\overrightarrow{u}$ de celle-ci orienté dans le sens de déplacement de la lumière, en déduire la seconde loi :

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{v_2}{v_1}$$

où i désigne l'angle d'incidence et r celui de réflexion ou de réfraction (faire un dessin)

9 Que peut-on dire à propos des angles d'incidence et de réflexion.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre N°11 (Pr Mamouni)

Extrema liés
Multiplicateurs de Lagrange

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Pourquoi ne faut-il pas lancer un défi (lisez $\mathbf{d\varphi}$) un mathématicien ?
- Réponse : Parce qu'il l'intègre et en fait un $\boldsymbol{\varphi}$!
- Qu'est ce que crie un escargot sur le dos d'une tortue ?
- Réponse : Yaaaaaaaaaaahooooooooooooooooooooooouuuuuuuuuuuuuu !!!!
- Que dit un hérisson qui se cogne à un cactus ?
- Réponse : maman !

Ludwig Otto Hesse (1811-1874)

Mathématicien du jour

Mathématicien russo-allemand. Il a travaillé sur les invariants algébriques. Il a donné son nom à la Courbe de Hesse, à la Matrice hessienne $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et à la forme normale de Hesse. Parmi ses professeurs, on citera Jacobi et Bessel. Les travaux les plus célèbres de Hesse portaient sur la théorie des fonctions algébriques et sur celle des invariants.

Les lois de l'optique géométrique

1 Posons $S=(a,b,c)$, on a $g : M=(x,y,z) \mapsto \left\|\overrightarrow{SM}\right\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3\setminus\{S\}$ comme composé des fonctions

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\setminus\{S\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\overrightarrow{\text{grad}}g(M) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(M)\,\vec{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}(M)\,\vec{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}(M)\,\vec{k} = \dfrac{(x-a)\,\vec{i}+(y-b)\,\vec{j}+(z-c)\,\vec{k}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \dfrac{\overrightarrow{SM}}{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}$ pour tout $M\in\mathbb{R}^3\setminus\{S\}$.

2 Soit t_1, le temps de parcours du point source S au point M et t_2 celui du point M au point cible C, on a $t(M)=t_1+t_2$. Or le mouvement du point S au point M est un mouvement uniforme, à vitesse constante égale v_1, d'où $\left\|\overrightarrow{SM}\right\| = tv_1$, donc $t_1 = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}{v_1}$. De même $t_2 = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CM}\right\|}{v_2}$, d'où $t(M) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}{v_1} + \dfrac{\left\|\overrightarrow{CM}\right\|}{v_2}$.

3 D'après les deux questions précédentes, on en déduit que : $\overrightarrow{\text{grad}}t(M) = \dfrac{\overrightarrow{SM}}{v_1\cdot\left\|\overrightarrow{SM}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{CM}}{v_2\cdot\left\|\overrightarrow{CM}\right\|}$

4 Si U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ où $1\leqslant i\leqslant m$ et $V=\{M\in U$ tel que $f_i(M)=0,\ \forall 1\leqslant i\leqslant m\}$ tel que $f|_V$ admet un extremum en un point $A\in V$, alors

$\exists(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{f}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{f}_i(\mathbf{A})$. Les coefficients $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ s'appellent multiplicateurs de Lagrange.

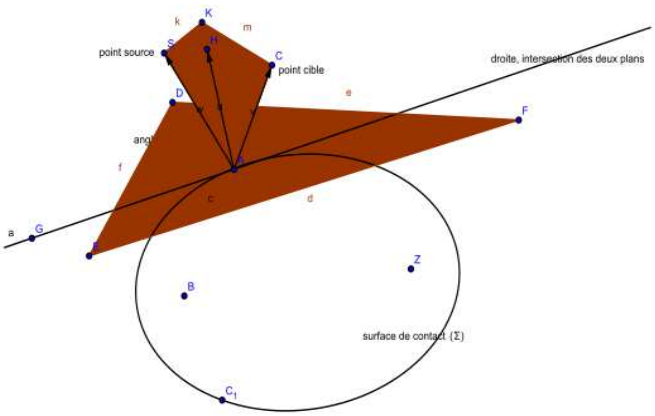
5 le point $\mathbf{A} \in \mathbf{\Sigma}$ est celui où la fonction $\mathbf{t} : \mathbf{M} \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{M})$ atteint son minimum sur la surface $\mathbf{\Sigma}$ d'équation $\mathbf{f}(\mathbf{M}) = 0$, d'après le principe des exremas liés de Lagrange, on en déduit que :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{t}(\mathbf{A}) = \frac{\overrightarrow{SA}}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \cdot v_1} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot v_2} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{f}(\mathbf{A})$$

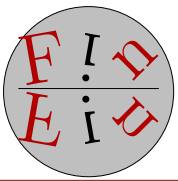
6 Résultat du cours, comme application du théorème des fonctions implicites : $\overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{f}(\mathbf{A})$ dirige la normale du plan tangent $\mathbf{\Sigma}$ au point $\mathbf{A}$, car $\mathbf{\Sigma}$ a pour équation $\mathbf{f}(\mathbf{M}) = 0$.

7 D'après la question les trois vecteurs $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{f}(\mathbf{A})$ forment une famille lie de l'espace, donc sont dans un même plan.

8 Soit $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{AI}$ un vecteur directeur unitaire de la droite Δ, intersection de deux plans (voir dessin ci-dessous), on a $\overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{f}(\mathbf{A}) \perp \overrightarrow{z} = 0$, $\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{z}} = \frac{\pi}{2} - i$ et $\widehat{\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{z}} = \frac{\pi}{2} - r$ (angles non orientés), d'o $\mathbf{f}(\mathbf{A}) \cdot \overrightarrow{z} = 0$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{z} = \pm \left\|\overrightarrow{SA}\right\| \sin i$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{z} = \pm \left\|\overrightarrow{CA}\right\| \sin r$. En passant au produit scalaire par $\overrightarrow{z}$ dans la relation $\frac{\overrightarrow{SA}}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \cdot v_1} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot v_2} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}\mathbf{f}(\mathbf{A})$, puis aprs la valeur absolue, on obtient la 2me loi : $\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{v_2}{v_1}$.



9 Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux car dans le cas de la réflexion, le rayon est toujours dans le même milieu, donc $v_1 = v_2$.



À la prochaine

.

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir libre N°12

Mèthode QR et applications

MP-CPGE RABAT

Vendredi 7 Janvier 2011

Blague du jour

● Une puce et un labrador discutent :
-Le chien : Qu'est-ce que tu a regardé hier soir la télé ?
-La puce : La deuxième chienne, et toi ?
- Moi, canal puce ...
● Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
Réponse : c'est un chameau qui bosse double !

Alston Scott Householder (1904 -1993)

Mathématicien américain specializé en mathématiques appliquées à la biologie et en analyse numérique. On lui doit les transformations de Householder et les méthodes de Householder pour la résolution d'équations algébriques ou linéaires. Il a contribué au développement de plusieurs revues mathématiques, il a été président de l'American Mathematical Society

Mathématicien du jour

Objectif : Le but de ce devoir libre est de présenter différentes méthodes pour obtenir la factorisation $\mathbf{QR}$ très utile pour la résolution exacte ou approchée d'un système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ et une application pour la résolution du problème des moindres carrées.

1 Factorisation QR.

On se propose dans cette partie de démontrer puis de donner des application du théorème suivant :

Théorème : Toute matrice carrée $\mathbf{A}$ se décompose sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ où $\mathbf{Q}$ est une matrice orthogonale et $\mathbf{R}$ une matrice triangulaire supérieure. Cette factorisation est unique si on impose le signe des termes diagonaux de $\mathbf{Q}$, quand $\mathbf{A}$ est inversible.

1.1 Unicité.

Soit $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}'$ deux matrices orthogonales et $\mathbf{R}, \mathbf{R}'$ deux matrices triangulaires supérieures telles $\mathbf{QR} = \mathbf{Q}'\mathbf{R}' = \mathbf{A}$ inversibles.

1 Dire pourquoi $\mathbf{QQ}'^{-1}$ est orthogonale, triangulaire supérieure. En déduire qu'elle est diagonale.

2 Que peut-on dire de ses termes diagonaux.

3 Conclure.

1.2 Existence

a Méthode de Gram-Schmidt

Soit A une matrice carré d'ordre n inversible. On suppose $A = QR$ avec Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure carrées d'ordre n. Soit A_j, Q_j et R_j les colonnes respectives des matrices A, Q et R. On note par $r_{i,j}$ les coefficients de la matrice R, avec $r_{ii} \geqslant 0$.

1 Montrer que : $\begin{cases} A_1 = r_{11}Q_1 \\ A_2 = r_{12}Q_1 + r_{22}Q_2 \\ \vdots \\ A_n = r_{1n}Q_1 + r_{2n}Q_2 + \cdots + r_{nn}Q_n \end{cases}$

2 Dire comment trouver les coefficients r_{ij} et les colonnes Q_i.
Indication : les colonnes Q_i forment un base orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$.

3 Montrer que $\text{Vect}(A_1, \cdots, A_k) = \text{Vect}(Q_1, \cdots, Q_k)$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$
Que représente la famille $(Q_1, \cdots, Q_n)$ pour la famille $(A_1, \cdots, A_n)$, et proposer une une méthode de calcul simple pour trouver les matrices Q et R.

4 Que se passe-t-il quand la matrice A n'est pas inversible.

b Méthode de Givens.

Idée : Multiplier $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ successivement par des matrices orthogonales pour faire apparaître des zéros en dessous de la diagonale.
Soit i, j deux indices fixes. On pose :

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ii} = a_{ji} = 0 \\ \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ji}^2}} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ii} = a_{ij} = 0 \\ \dfrac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & c_{ij} & & & s_{ij} & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & -s_{ij} & & & c_{ij} & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

1 Montrer que Q_1 est la matrice d'une rotation.

2 Montrer que le coefficient d'indice (j, i) de Q_1A est nul.

3 Dire comment trouver les matrices Q et R.

4 Écrire un programme qui décrit la méthode de Givens.

C Méthode de Householder.

Définition : On appelle matrice de Householder, toute matrice $H(v)$ de la forme :

$H(v) = I_n - \dfrac{v^t v}{\|v\|^2}$ où v est un vecteur colonne.

1 Montrer que les matrices de Householder sont des matrices orthogonales.

2 Soit $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$, on se propose de montrer dans cette question qu'il existent deux matrices de Householder $H(v_1)$ et $H(v_2)$ telles que les $n-1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. On note par $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a 1ère cas : $\sum_{i=2}^{n} |a_i| \neq 0$. On pose $v_1 = a + \|a\| e_1$ et $v_2 = a - \|a\| e_2$.

i Montrer que v_1 et v_2 sont différents et distincts.

ii Calculer ${}^t e_i H(v_1) a$ et ${}^t e_i H(v_2) a$.

iii En déduire le résultat.

b 2ème cas : $\sum_{i=2}^{n} |a_i| + 0$.

i Montrer que $H(a_1 + \|a\| e_1)a = \|a\| e_1$.

ii En déduire le résultat.

3 On note par a la 1ère colonne de A, soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que les $n-1$ dernières composantes de $H(v_1)a$ et $H(v_2)a$ sont toutes nulles. Quelle est la forme de la matrice HA.

4 Si A est de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$ Dire comment annuler les coefficients en dessous de la diagonale dans la 2ème colonne de A.

5 Dire comment trouver les matrices Q et R.

2 Méthode des moindres carrés

Problème : Quel est la droite la plus proche à trois points donnés. En général quel est le polynôme de degré m (degré fixe), dont la courbe est la plus proche à n points donnés.

Position du problème : Soit m, n deux entiers naturels donnés et $M_i = (x_i, y_i)$, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ n points donnés. Comment choisir les coefficients du polynôme de degré m, $P(X) = \sum_{k=1}^{m} a_k X^{k-1}$ pour que la somme $\sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$ soit minimale.

1 1ère cas : $k = n$.

a Donner l'écriture matricielle du système $\begin{cases} P(x_1) = y_1 \\ \vdots \\ P(x_n) = y_n \end{cases}$

b En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution unique.

c Quel est cette solution.

2 2ème cas : $k \leqslant n$.

a Écrire $\sum_{i=1}^{n} (P(x_i) - y_i)^2$ sous la forme $\|Ax - b\|^2$ où A une matrice et x, b deux vecteurs colonnes à déterminer.

b En déduire que le problème des moindres carrés admet une solution au point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{\mathbf{grad}} f(a) = \vec{0}$ où $f(x) = \|Ax - b\|^2$.

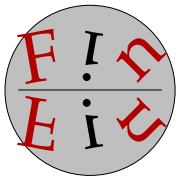
c En déduire que a est solution du système ${}^tAAx = {}^t b$

d Dire pourquoi ce dernier système admet une solution.

e Dire comment appliquer la factorisation QR pour la résolution de de dernier système.

f Application : Quelle est la droite du plan la plus proche aux trois points $A(0,0), B(1,0)$ et $C(0,1)$.

3 3ème cas : $k \geqslant n$. Y-a-t-il des solutions au problème des moindres carrés dans ce cas.



À la prochaine

F30B

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir libre N°13 (source : Banque PT-2006)

Méthode LU et applications

MP-CPGE RABAT

Epreuve de Mathématiques A

Lundi 10 Janvier 2011

Durée 4 h

Blague du jour

Un mathématicien, un physicien et un biologiste sont dans un train au Maroc. Par la fenêtre, ils aperçoivent un mouton noir.
-Comme c'est intéressant, s'exclame le biologiste, au Maroc, les moutons sont noirs !?!
- On ne peut pas affirmer ça, réplique le physicien. Toutefois, il existe au moins un mouton noir au Maroc.
- Allons, allons, faut pas être sur à ce point, continue le mathématicien, la seule chose que l'on puisse affirmer, c'est qu'au Maroc il existe au moins un mouton, dont au moins un coté du mouton est noir !

Erhard Schmidt (1876-1959)

Mathématicien allemand né à Dorpat, en Allemagne (aujourd'hui Tartu, en Estonie).
Avec David Hilbert, il est considéré comme l'un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle abstraite moderne. Il était étudiant de Schwarz et fût encadré par Hilbert pour son doctorat. Ses travaux de recherche portaient surtout sur les équations intégrales et sur les espaces de Hilbert, à la topologie et inégalités isopérimétriques vers la fin de sa vie. Notons enfin que Laplace avait le procèdé de Gram-Schmidt bien avant que ces derniers le fassent

Mathématicien du jour

sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Le problème est composé de 3 parties totalement indépendantes.

Pour tout entier naturel n, nous notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à coefficients réels d'ordre n.
Nous identifierons dans tout ce problème un vecteur de $\mathbb{R}^n$ avec la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique.

Préliminaires

1. Rappeler la définition d'une matrice symétrique.
2. Rappeler la définition d'une matrice orthogonale.

3. Soient p, q, m, n des entiers naturels strictement positifs.
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$ sont deux matrices à coefficients réels,
   (a) A quelle condition sur p, q, m, n le produit matriciel AB est-il possible ?
   (b) Quelle est alors la taille de la matrice AB ?
   (c) Si on note c_{ij} le coefficient générique de la matrice AB, donner son expression en fonction des coefficients des matrices A et B.

Partie I

Dans cette partie, on considère les matrices

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les déterminants de L et A.
2. Montrer que les matrices L et A sont inversibles.
Calculer l'inverse de L.
3. Déterminer une matrice U triangulaire supérieure telle que $A = LU$.

Partie II

Soit L, U et $A = LU$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, de coefficients respectifs, ℓ_{ij}, u_{ij} et a_{ij}.

1. A quelle condition sur les coefficients ℓ_{ij} la matrice L est-elle triangulaire inférieure ?
A quelle condition sur les coefficients u_{ij} la matrice U est-elle triangulaire supérieure ?
2. Nous supposerons dorénavant que U est triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure.
Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, montrer que l'on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}. \tag{1}$$

3. On considère, jusqu'à la fin de cette partie, la matrice d'ordre 3 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible.

4. On cherche maintenant une matrice U triangulaire supérieure et une matrice L triangulaire inférieure ayant de plus tous ses coefficients diagonaux égaux à 1, telles que $A = LU$.
   (a) En utilisant la formule (1) pour a_{11}, calculer u_{11}.
   (b) En exprimant ensuite a_{i1}, calculer ℓ_{i1} pour tout $i \leq 3$.
   (c) En exprimant a_{12}, calculer u_{12}.
   (d) En exprimant a_{22}, calculer u_{22}.
   (e) En exprimant a_{32}, calculer ℓ_{32}.
   (f) En raisonnant de manière analogue, déterminer les coefficients restants.
5. Calculer U^{-1} et L^{-1}.
6. En déduire la solution de l'équation

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Partie III

Notons $\|\ \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. C'est à dire, si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nous posons

$$|||B||| = \sup_{\{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}} \frac{\|Bx\|}{\|x\|}.$$

1. Calculer $|||I|||$.
2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Bx\| \leq |||B|||\, \|x\|.$$

3. Soit α un réel tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Bx\| \leq \alpha \|x\|.$$

   Comparer α et $|||B|||$.
4. Montrer que pour toutes matrices B_1 et B_2 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|||B_1 B_2||| \leq |||B_1|||\, |||B_2|||.$$

5. Soit B une matrice diagonale où les coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont rangés de telle sorte que

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \cdots \leq |\lambda_n|.$$

   On note e_i le i-ème vecteur de la base canonique.

(a) Que vaut Be_i ?

(b) En décomposant un vecteur x quelconque dans la base canonique, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Bx\| \leq |\lambda_n| \, \|x\| .$$

(c) Montrer que

$$|||B||| = |\lambda_n|.$$

6. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que la matrice $S = {}^tBB$ est diagonalisable.

(b) Si u est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ, calculer $\|Bu\|^2$ en fonction de $\|u\|^2$ et de λ (Il peut être utile de remarquer que, pour tout vecteur colonne y de $\mathbb{R}^n$, on a $\|y\|^2 = {}^tyy$).
En déduire que toutes les valeurs propres de S sont positives.
Notons $\rho({}^tBB)$ sa plus grande valeur propre.

(c) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice P telle que

$$D = {}^tPSP.$$

(d) En déduire qu'il existe n nombres réels positifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ que nous supposerons rangés par ordre croissant et n vecteurs $p_1, \ldots, p_n$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \ldots, n\}, & {}^tp_ip_i = 1, \\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}, & Sp_i = \lambda_i p_i, \\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \ i \neq j, & {}^tp_ip_j = 0. \end{cases}$$

(e) Si $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$, que valent $\|x\|$ et $\|Bx\|$?

(f) En décomposant un vecteur x quelconque dans la base $(p_1, \ldots, p_n)$, montrer que $|||B||| = \sqrt{\rho({}^tBB)}$.

7. On considère la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $|||B|||$.

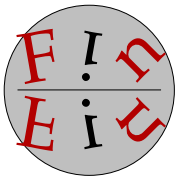
Les 2 premières parties présentent la décomposition LU d'une matrice qui permet de calculer facilement l'inverse de la matrice A^{-1} et donc de résoudre le système linéaire $Ax = b$ numériquement. La troisième partie introduit la notion de rayon spectral d'une matrice. On peut ensuite montrer (ce n'est pas l'objet de ce problème) que la condition $\rho({}^tBB) < 1$ implique que la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = Bx_k + b \end{cases}$$

converge quand k tend vers l'infini vers la solution du système linéaire

$$(I - B)x = b.$$

Cela permet de donner numériquement une valeur approchée de la solution de ce système en un temps beaucoup plus rapide que la méthode précédente.



À la prochaine

.

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir libre N°13 (Corrigé Pr Chèno)

Méthode LU et applications

MP-CPGE RABAT

Lundi 10 Janvier 2011

Blague du jour

- Une logicienne (spécialiste en logie) vient d'avoir un enfant. Une de ses amies lui téléphone, et lui demande : C'est une fille ou un garçon ? Oui, répond la logicienne.
- Nous sommes dans le bateau des fonctions. Brusquement, le capitaine Factoriel s'exclame : On dérive, on dérive ! (on risque de se noyer). Les fonctions s'affolent, surtout la constante. Mais l'exponentielle réplique : Bof, moi on ne me dérive jamais.
- La vie est complexe, elle a une face réelle et une autre imaginaire.

Leonhard Euler (1707-1783)

Mathématicien et un physicien suisse. Complétement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moiti de son travail durant cette période. Euler fut profondément pieux pendant toute sa vie, il répondait souvent cette anecdote : $e^{2i\pi}+1=0$, donc Dieu existe. Certains scientifiques ont appelé cette identité la formule la plus remarquable du monde . Euler écrit *Tentamen novae theoriae musicae* en 1739 qui est une tentative d'accorder les mathématiques et la musique ; une biographie commente que le travail est destinée à des musiciens trop avancés dans leurs mathématiques et à des mathématiciens trop musicaux. Dans les sciences économiques, il prouve que si chaque facteur de production est payé à la valeur de son produit marginal, alors (sous des rendements à l'échelle constants) le revenu total et le rendement seront complétement épuisés.

Mathématicien du jour

Préliminaires

Question 1.
Une matrice carrée $A=(a_{ij})$ est dite symétrique si pour tout (i,j), on a $a_{ij}=a_{ji}$, c'est-à-dire si $A={}^tA$.

Question 2.
Une matrice carrée est orthogonale si A est inversible et son inverse est égale à sa transposée, autrement dit $A\,{}^tA=I_n$, où I_n désigne la matrice unité.

Question 3.
Le produit AB existe si $q=m$.
Dans ce cas le produit AB possède p lignes et n colonnes.

On a, pour $1\leqslant i\leqslant p$ et $1\leqslant j\leqslant n$, $c_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{q}a_{ik}b_{kj}$.

Partie I

Question I.1
L est triangulaire, donc dét $L=1$ (c'est le produit des termes diagonaux).

Ensuite : dét $A=2\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&3\\1&1&6\end{vmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=}2\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&3\\0&0&3\end{vmatrix}=2\times3\times\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}=6.$

Question I.2

Comme ces deux matrices sont de déterminant non nul, elles sont inversibles.

La méthode du pivot conduit à $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On aura remarqué que dans cette méthode du pivot, la matrice L étant triangulaire, les calculs sont extrêmement simples et se résument à évaluer simultanément $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$.

Question I.3

Si on veut que $A = LU$, on est obligé de prendre $U = L^{-1}A$ et on trouve $U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, qui est bien triangulaire supérieure.

Partie II

Question II.1

On dit que L est triangulaire supérieure si $\ell_{ij} = 0$ dès que $1 \leqslant i < j \leqslant n$; on dit que U est triangulaire supérieure si $u_{ij} = 0$ dès que $1 \leqslant j < i \leqslant n$.

Question II.2

La formule habituelle est $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \ell_{ik} u_{kj}$, mais si $k > i$ on a $\ell_{ik} = 0$ et si $k > j$ on a $u_{kj} = 0$, de sorte qu'on peut ne calculer la somme que pour $k \leqslant \min(i,j)$: $a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \ell_{ik} u_{kj}$.

Question II.3

On a :

$$\det A \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2-2C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3-2C_1}}{=} 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 \times (-1) \times (-1) = 5 \neq 0,$$

donc A est inversible.

Question II.4

II.4.a La formule (1) fournit $1 = a_{11} = \ell_{11} u_{11} = u_{11}$ donc $u_{11} = 1$.

II.4.b Puis $2 = a_{21} = \ell_{21} u_{11} = \ell_{21}$ et $2 = a_{31} = \ell_{31} u_{11} = \ell_{31}$ donc $\ell_{21} = \ell_{31} = 2$.

II.4.c Puis $2 = a_{12} = \ell_{11} u_{12} = u_{12}$ donc $u_{12} = 2$.

II.4.d De même $1 = a_{22} = \ell_{21} u_{12} + \ell_{22} u_{22} = 2 \times 2 + 1 \times u_{22}$ donc $u_{22} = -3$.

II.4.e Pareillement $2 = a_{32} = \ell_{31} u_{12} + \ell_{32} u_{22} = 2 \times 2 - 3 \times \ell_{32}$ donc $\ell_{32} = \dfrac{2}{3}$.

II.4.f Reste à trouver la troisième colonne de U. On écrit $2 = a_{13} = \ell_{11} u_{13}$ donc $u_{13} = 2$; puis $2 = a_{23} = \ell 21 u_{13} + \ell 22 u_{23} = 2 \times 2 + u_{23}$ donc $u_{23} = -2$; enfin $1 = a_{33} = \ell_{31} u_{13} + \ell_{32} u_{23} + \ell_{33} u_{33} = 2 \times 2 - \dfrac{2}{3} \times 2 + u_{33}$ donc $u_{33} = -\dfrac{5}{3}$.

Finalement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix}.$$

Question II.5

On trouve facilement $U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 2/5 \\ 0 & -1/3 & 2/5 \\ 0 & 0 & -3/5 \end{pmatrix}$ et $L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}$.

Là encore, les matrices étant triangulaires, on aura noté que les calculs sont extrêmement simples !

Question II.6

On résout $Ax = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \iff LUx = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Notons $y = Ux$. Le système $Ly = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ est triangulaire, donc facile à résoudre, on obtient $y = \begin{pmatrix}1\\-2\\4/3\end{pmatrix}$.

On résout pour terminer le système $Ux = y$, qui est aussi triangulaire donc facile : on obtient finalement $x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\6\\-4\end{pmatrix}$.

Partie III

Question III.1

Comme pour tout vecteur x non nul, on a $Ix = x$, on trouve bien sûr $|||I||| = 1$.

Question III.2

La majoration est évidente pour $x = 0$, puisque $\|B0\| = 0 \leqslant 0 = |||B|||\,\|0\|$.

Pour un vecteur $x \neq 0$, on a $|||B|||$ qui majore le quotient $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$ donc $\|Bx\| \leqslant |||B|||\|x\|$.

Question III.3

α est un majorant des quotients $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$, alors que $|||B|||$ est **la borne supérieure** de l'ensemble de ces quotients, c'est-à-dire le plus petit des majorants : c'est donc que $|||B||| \leqslant \alpha$.

Question III.4

Pour tout x, on a $\|(B_1B_2)(x)\| = \|B_1(B_2x)\| \leqslant |||B_1|||\|B_2x\| \leqslant |||B_1||| \times |||B_2|||\|x\|$, grâce au III.2.

On en déduit que $\alpha = |||B_1||| \times |||B_2|||$ majore les quotients $\dfrac{\|B_1B_2x\|}{\|x\|}$, et d'après ce qui précède, $|||B_1B_2||| \leqslant \alpha = |||B_1|||\,|||B_2|||$.

Question III.5

Remarquons que l'hypothèse entraîne $\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^2$.

III.5.a Bien sûr, on a : $Be_i = \lambda_i e_i$.

III.5.b Donc, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $Bx = \sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i e_i$. Alors on peut écrire :

$$\|Bx\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\lambda_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2\lambda_n^2 = \lambda_n^2\|x\|^2,$$

donc $\|Bx\| \leqslant |\lambda_n|\|x\|$.

III.5.c $|\lambda_n|$ est donc un majorant des quotients $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$, et donc, comme on l'a vu en III.3, on a $|||B||| \leqslant |\lambda_n|$.

Mais on a de plus $\|Be_n\| = \|\lambda_n e_n\| = |\lambda_n|$ donc $\dfrac{\|Be_n\|}{\|e_n\|} = |\lambda_n|$ et on a aussi $|||B||| \geqslant |\lambda_n|$.

Finalement $|||B||| = |\lambda_n|$.

Question III.6

III.6.a La matrice S est symétrique donc diagonalisable : en effet, ${}^tS = {}^t({}^tBB) = {}^tB\,{}^ttB = {}^tBB = S$.

III.6.b On nous fait remarquer que pour tout vecteur y, $\|y\|^2 = {}^tyy$.

On en déduit que $\|Bu\|^2 = {}^t(Bu)\,(Bu) = {}^tu{}^tBB\,u = {}^tu\,S\,u = {}^tu\,\lambda u = \lambda\,{}^tuu = \lambda\|u\|^2$.

Ainsi on a $\lambda = \dfrac{\|Bu\|^2}{\|u\|^2} \geqslant 0$.

III.6.c S étant symétrique, elle est non seulement diagonalisable mais diagonalisable dans une base orthonormée.

C'est dire qu'il existe P orthogonale telle que $D = P^{-1}SP = {}^tPSP$ est une matrice diagonale.

III.6.d Soit p_i le vecteur i-ème colonne de la matrice P : $(p_1,\dots,p_n)$ est une base orthonormée de diagonalisation de S.
C'est dire que chaque p_i est de norme 1 : ${}^tp_ip_i=1$; que les p_i sont deux à deux orthogonaux : ${}^tp_ip_j=0$ si $i\neq j$; que chaque p_i est vecteur propre de S : il existe $\lambda_i\geqslant 0$ tel que $Sp_i=\lambda p_i$.
Il suffit de ranger ces vecteurs dans l'ordre croissant des λ_i pour conclure au résultat demandé.

III.6.e On a $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ip_i$ et $Sx=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_ip_i$. Mais comme la base $(p_1,\dots,p_n)$ est orthonormée, cela prouve que $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$ et $\|Bx\|^2={}^t(Bx)\,(Bx)={}^tx{}^tBB\,x=(x\mid S\,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i^2$.

III.6.f $|||B|||$ est la borne supérieure des quotients $\dfrac{\|Bx\|}{\|x\|}$ pour $x\neq 0$.

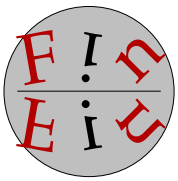
Or pour $x=p_n$, on trouve $\|Bp_n\|^2=\lambda_n$ et $\|p_n\|^2=1$ (prendre $\alpha_i=0$ sauf $\alpha_n=1$), donc le quotient vaut ici $\sqrt{\lambda_n}$ et donc $|||B|||\geqslant\sqrt{\lambda_n}$.

Mais λ_n est la plus grande des valeurs propres, donc $\|Bx\|^2\leqslant\lambda_n\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\lambda_n\|x\|^2$, ce qui permet de majorer tous les quotients par $\sqrt{\lambda_n}$.
Finalement $|||B|||=\sqrt{\lambda_n}=\sqrt{\rho({}^tBB)}$.

Question III.7

On évalue $S={}^tBB=\begin{pmatrix}5&1\\1&1\end{pmatrix}$. Les valeurs propres de S sont $\lambda_1=3-\sqrt{5}<\lambda_2=3+\sqrt{5}$.

On en déduit que $|||B|||=\sqrt{3+\sqrt{5}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.



À la prochaine

.

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir survéillé N°4

Espaces vectoriels euclidiens
Calcul différentiel

MP-CPGE RABAT

Samedi 15 Janvier 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Méthode pour éteindre un feu :
- Une personne normale va chercher un seau d'eau et la jette sur le feu.
- Un physicien regarde le feu en faisant des calculs précis pour estimer la quantité d'eau à utiliser.
- Un mathématicien regarde le feu et dit : " Je sais que la solution existe. "

David Hilbert (1862-1943)

Mathématicien allemand. Il est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du XXe siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle (avec les espaces de Hilbert).
L'un des exemples les mieux connus de sa position de chef de file est sa présentation, en 1900, de ses fameux problèmes qui ont durablement influencé les recherches mathématiques du XXe siècle. Hilbert et ses étudiants ont fourni une portion significative de l'infrastructure mathématique nécessaire à l'éclosion de la mécanique quantique et de la relativité générale.
Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor en théorie des ensembles et sur les nombres transfinis. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.

Mathématicien du jour

1 Problème 1 : MINES-PONTS 2003, MP, Math 2

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre
L'objet du problème est l'étude de méthodes analytiques (méthodes du gradient, du Lagrangien) pour résoudre l'équation linéaire $A.x = b$ où A est une matrice symétrique positive, inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$. Dans tout le problème, l'entier n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n = 2$) ; la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée $e_1, e_2, ..., e_n$; le produit scalaire de deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ est noté $(x|y)$. La norme d'un vecteur x est notée $\|x\|$. Les matrices considérées sont réelles ; l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il est admis que l'application qui, à une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, associe la borne supérieure $N(M)$ des

normes des images par M des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ est une norme : $N(M) = \sup_{\|x\|=1} \|M.x\|$. Une matrice symétrique A est dite positive lorsque, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire des vecteurs $A.x$ et x est positif ou nul $(A.x|x) \geqslant 0$.

1.1 Première partie

Le but de cette partie est la résolution de l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible, b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ et x un vecteur inconnu.

a Résultats préliminaires

: Soit M une matrice carrée symétrique d'ordre n.

1 Démontrer qu'il existe un plus grand réel p et un plus petit réel q tels que, pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire $(M.x|x)$ vérifie l'encadrement suivant : $p\|x\|^2 \leqslant (M.x|x) \leqslant q\|x\|^2$.
Préciser ces deux réels p et q en fonction des valeurs propres de la matrice M.

2 Montrer que, pour que cette matrice M soit inversible et positive, il faut et il suffit que toutes ses valeurs propres soient strictement positives.

3 Démontrer que la norme $N(M)$ d'une matrice M symétrique est égale à la plus grande valeur absolue des valeurs propres λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de la matrice M : $N(M) = \sup_{(1\leqslant i\leqslant n)} |\lambda_i|$.Etant donnés la matrice carrée, d'ordre n, symétrique positive A et le vecteur b, soit α un réel strictement positif strictement majoré par $2/\lambda_n$ $(0 < \alpha < 2/\lambda_n)$ o'u λ_n est la plus grande valeur propre de la matrice A ; soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par un premier vecteur x^0 choisi arbitrairement dans $\mathbb{R}^n$ et par la relation de récurrence suivante : pour tout entier naturel k, $x^{k+1} = x^k + \alpha(b - A.x^k)$.

b Etude de la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$

:

4 Démontrer que la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite le vecteur z de l'espace $\mathbb{R}^n$, solution de l'équation $A.x = b$.

Soit f la fonction réelle, définie dans $\mathbb{R}^n$, par la relation : $f(x) = \frac{1}{2}(A.x|x) - (b|x)$.

c Minimum de f

:

5 Calcul préparatoire : démontrer que l'expression $f(x+u) - f(x)$ se calcule en fonction des expressions $(A.u|u)$, $(A.x|u)$ et $(b|u)$.

6 Démontrer que la fonction $f : x \mapsto f(x)$ admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(1 \leqslant k \leqslant n) : x \to \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$.
Etant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, soit $g(x)$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont les coordonnées, dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, sont égales aux valeurs des dérivées partielles de la fonction f en ce point x : $g(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) e_k$.

7 Exprimer ce vecteur $g(x)$ au moyen de la matrice A et des vecteurs x et b.
Etant donnés deux vecteurs x et u de $\mathbb{R}^n$, soit $I(x,u)$ l'expression suivante :
$I(x,u) = f(x+u) - f(x) - (g(x)|u)$.

8 Démontrer que, pour tout vecteur x donné, il existe deux constantes positives ou nulles r et s telles que, pour tout vecteur u, $I(x,u)$ vérifie la relation suivante : $r\|u\|^2 \leqslant I(x,u) \leqslant s\|u\|^2$.

9 Démontrer que, pour que la fonction f admette en z un minimum, il faut et il suffit que le vecteur z vérifie la relation $A.z = b$.

d Recherche du minimum de f

:
Soit α un réel compris strictement entre 0 et $2/\lambda_n$ $(0 < \alpha < 2/\lambda_n)$.

10 Etant donné un vecteur x de $\mathbb{R}^n$, déterminer le signe de l'expression suivante $f(x - \alpha g(x)) - f(x)$.

11 Proposer, à partir de ce résultat, une méthode pour construire une suite de vecteurs $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers le vecteur z en lequel la fonction f atteint son minimum ; la justication de la convergence n'est pas demandée.

1.2 Seconde partie

Le but de cette partie est de rechercher un vecteur x appartenant à un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie l'équation $A.x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n symétrique positive et inversible. Le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est supposé être le noyau d'une matrice B appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; ce noyau est supposé différent de tout l'espace $\mathbb{R}^n$ ($ker B \neq \mathbb{R}^n$). L'équivalence, établie dans la première partie, entre d'une part résoudre l'équation $A.x = b$ et d'autre part chercher le vecteur z rendant minimum la fonction f définie sur $\mathbb{R}^n$ par la relation suivante $f(x) = \frac{1}{2}(A.x|x) - (b|x)$, conduit à se poser le problème suivant : Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le noyau F est différent de $\mathbb{R}^n$; rechercher un vecteur $\overline{x}$ appartenant à F rendant minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F.

a Existence du minimum de la fonction f dans F :

12 Démontrer que la fonction f possède la propriété suivante : pour tout réel c, il existe un réel ρ tel que, pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à ρ $(\|x\| \geqslant \rho)$, le réel $f(x)$ est supérieur ou égal à c $(f(x) \geqslant c)$.

13 En déduire que, si y est un point de F, il existe un réel r tel que pour tout vecteur x de F de norme supérieure ou égale à r $(\|x\| \geqslant r)$, $f(x)$ est supérieur ou égal à $f(y)$.

14 Démontrer à l'aide du résultat précédent qu'il existe au moins un vecteur $\overline{x}$ du sous-espace vectoriel F en lequel la restriction de la fonction f à ce sous espace F atteint un minimum.

15 Démontrer qu'il existe un seul vecteur $\overline{x}$ en lequel la fonction f atteint son minimum dans F, en admettant que la fonction f est convexe ; c'est-à-dire : pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ de vecteurs et

tout réel λ appartenant à l'intervalle ouvert $]0,1[$, les valeurs prises par la fonction f vérifient la relation suivante : $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$, où l'inégalité est stricte si et seulement si les vecteurs x et y sont différents.

b Propriétés du point x :

16 Démontrer que, pour qu'un vecteur y de F rende minimum la restriction de la fonction f au sous-espace vectoriel F, il faut et il suffit que le vecteur $Ay-b$ soit orthogonal à ce sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.

17 Démontrer que la valeur prise par la fonction f au point $\overline{x}$, en lequel elle atteint son minimum dans F, est donnée par la relation suivante : $f(\overline{x})=-\frac{1}{2}(A\overline{x}|\overline{x})=-\frac{1}{2}(b|\overline{x})$.

2 Problème 2 : Polytechnique 2010, MP, Math 1

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Sur quelques questions de calcul différentiel

Notations et conventions

Pour tout entier $n>0$, on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel et $||\,.\,||$ la norme associée sur $\mathbf{R}^n$, S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles à n lignes et n colonnes, I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles, et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ celui des matrices de déterminant 1. On note $\mathrm{Tr}\,(M)$ la trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ${}^tM$ sa transposée, $\widetilde{M}$ la matrice de ses cofacteurs, et l'on rappelle la formule

$$M\,{}^t\widetilde{M}=\det(M)\,I_n\ .$$

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on désigne par $\exp M$ son exponentielle, définie par $\exp M=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{M^k}{k!}$. On rappelle que l'application $t\mapsto \exp(tM)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée en 0 est M. De même, si φ est un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\exp(\varphi)$ son exponentielle donnée par la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\varphi^k}{k!}$.

Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si $f:U\to\mathbf{R}^p$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on note df_x sa différentielle au point x, soit :

$$\forall h\in\mathbf{R}^n,\quad df_x(h)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(x+th)-f(x))\ .$$

4. Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit g sa restriction à S^{n-1}. Montrer que g admet des extremums. Si x est un extremum, en considérant une application γ comme ci-dessus, montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$df_x(h) = \lambda\langle x, h\rangle, \quad (\forall h \in \mathbf{R}^n)\ .$$

5. Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit

$$f : \begin{cases} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax\rangle \end{cases}.$$

5a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

5b. Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1}. Montrer que x est vecteur propre de A.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère les fonctions suivantes :

$$q : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}^2 \end{cases}$$

où m_{ij} est le coefficient de M sur la i-ème ligne et j-ième colonne,

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \det(M) - 1 \end{cases}$$

ainsi que la restriction de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, que l'on note g.

6a. Montrer que $q(M) = \mathrm{Tr}\,({}^tMM)$.

6b. Vérifier que $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6c. Montrer que q est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

7. On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant pour coefficient 1 à la i-ième ligne et j-ième colonne, et 0 partout ailleurs. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\det(M + tE_{ij})$ en fonction de $\det(M)$, de t et des coefficients de la matrice $\widetilde{M}$.
En déduire que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $df_M(H) = \mathrm{Tr}\,({}^t\widetilde{M}H)$.

8. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que la restriction g de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum.

9. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det(\exp M) = e^{\mathrm{Tr}\,(M)}$.

10. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$. Montrer que l'application

$$\gamma : \begin{cases}]-1, 1[\to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \\ t \mapsto M\exp(tM^{-1}H) \end{cases}$$

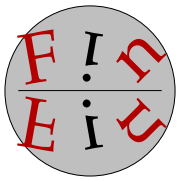
est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma(0) = M$, $\gamma'(0) = H$.

.

11. Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et soit H dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$.

11a. Montrer que $dq_M(H) = 0$.

11b. Déduire de ce qui précède que M est une matrice orthogonale. Que vaut alors $g(M)$?



Bonne Chance

.

MAMOUNI MY ISMAIL

Corrigé Devoir surveillé N°4 (Prs Doué et Boujaida)

Espaces vectoriels euclidiens
Calcul différentiel

MP-CPGE RABAT

Samedi 15 Janvier 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Problème de la casserole de Poincaré : Dans une pièce, se trouve un évier muni d'un robinet d'eau courante, une casserole accrochée à un mur, un réchaud à gaz et une boîte d'allumettes.
Problème : comment faire chauffer de l'eau ?
Solution : on prend la casserole, on la remplit d'eau, on la pose sur le réchaud que l'on allume.

Deuxième problème : nous sommes dans la même pièce, mais à présent, la casserole est remplie d'eau, posée sur le réchaud. La question est la même : faire chauffer de l'eau.

Solution du physicien : on allume le réchaud.

Solution du mathématicien : on vide la casserole, on la raccroche au mur, et on est ramené au problème précédent.

Henri Poincaré (1854-1912)

Mathématicien, physicien et philosophe français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos ; il est aussi un précurseur majeur de la théorie de la relativité restreinte. On le considère comme un des derniers grands savants universels, maîtrisant en particulier l'ensemble des branches des mathématiques.

Mathématicien du jour

1 Problème 1 : Corrigé Pr Doué

1.1 Première partie

1 On utilise le théorème spectral : $\mathbf{M}$, symétrique réelle, admet une base $\mathcal{B}$ *orthonormée* de vecteurs propres . En écrivant $(x)_i$ les composantes d'un vecteur quelconque $x \in \mathbb{R}^n$ dans cette base, on a que l'expression du produit scalaire est l'expression canonique, et d'autre part, que $\mathbf{M}.x$ s'écrit simplement en fonction des valeurs propres (l_i) correspondantes de $\mathbf{M}$: $(\mathbf{M}.x)_i = l_i.(x)_i$. On en déduit : $(\mathbf{M}x \mid$

$x) = \sum_{i=1}^{n} l_i.(x)_i^2$. D'où, en appelant p (respectivement q) la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres de M , on a l'inégalité :

$$p.\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} p.(x)_i^2 \leqslant (Mx \mid x) \leqslant \sum_{i=1}^{n} q.(x)_i^2 = q.\|x\|^2 \ .$$

Remarquons que ces inégalités sont les meilleures possibles, puisqu'elles deviennent des égalités lorsque x est un vecteur propre associé à la plus petite (respectivement la plus grande) des valeurs propres .

2 La condition suffisante découle de l'inégalité ci-dessus : si $p > 0$, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ (Mx \mid x) \geqslant p.\|x\|^2 \geqslant 0$; d'autre part, 0 n'est alors pas valeur propre , donc $M.x = 0 \Rightarrow x = 0$, et M est injective, donc inversible.
Mais la condition est aussi nécessaire, car l'inégalité $(Mx \mid x) \geqslant 0$ doit être en particulier vraie pour les vecteurs propres (non nuls) de M , d'où, pour toute valeur propre l_i de M , $l_i.\|x\|^2 \geqslant 0$, soit $l_i \geqslant 0$; de plus, l'inversibilité de M interdit la valeur propre 0 , donc les valeurs propres l_i de M sont bien > 0 .

3 En se plaçant toujours dans une base orthonormée propre pour M , on a, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|M.x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (Mx)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} l_i^2.x_i^2 \leqslant \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} l_i^2\right).\sum_{i=1}^{n} (x)_i^2 = \left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} l_i^2\right).\|x\|^2 \ .$$

En prenant la racine carrée des deux membres de l'inégalité ci-dessus, et en utilisant $\sqrt{\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} l_i^2\right)} = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |l_i|$, on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ \|M.x\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |l_i|.\|x\|$, d'où déjà l'implication :

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ \ \|x\| = 1 \Rightarrow \|M.x\| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |l_i| \ ;$$

Mais la première inégalité ci-dessus devient une égalité si x est un vecteur propre associé à la valeur propre l_{i_0} telle que $|l_{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |l_i|$. Comme un vecteur propre, non nul, peut toujours être normalisé, on voit que dans l'implication (1) on peut obtenir l'égalité à droite. Donc le nombre $\max_{1\leqslant i\leqslant n} |l_i|$ est le plus petit des majorants possibles, soit par définition, $N(M) = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |l_i|$.

4 On suppose ici, comme indiqué dans le préambule de cette partie de l'énoncé, que A est inversible, donc (cf **2.**) que les valeurs propres de A sont *strictement* positives.
La formule de récurrence s'écrit $x^{k+1} = S.x^k + \alpha.b$ où on a posé $S = Id - \alpha.A$. S est encore une matrice symétrique, dont les valeurs propres sont les $1 - \alpha.l_i$, l_1 , ... , l_n étant les valeurs propres (distinctes ou non) de A . Vu la condition imposée à α , les valeurs propres de S sont dans $]-1,1[$, et en particulier $N(S) < 1$. L'unique point z vérifiant $A.z = b$ vérifie aussi $z = S.z + \alpha.b$, donc la suite de vecteurs $y^k = z - x^k$ vérifie la relation de récurrence $y^{k+1} = S.y^k$, soit $y^k = S^k.y^0$. Par propriété de la norme N , $\|S.y\| \leqslant N(S).\|y\|$, on a donc $\|y^k\| \leqslant (N(S))^k.\|y^0\|$. De $N(S) \in]0,1[$ on conclut alors que $y^k \to 0$, soit $x^k \to z$.

5 Par bilinéarité et symétrie du produit scalaire, on trouve :

$$f(x+u) - f(x) = (Ax \mid u) - (b \mid u) + \frac{1}{2}(Au \mid u) = (Ax - b \mid u) + \frac{1}{2}(Au \mid u) \ .$$

6 Par définition, une dérivée partielle s'obtient en cherchant la limite de $\frac{1}{t}(f(x+te_k) - f(x))$ lorsque $t \to 0$. Par le calcul précédent, on a

$$\frac{1}{t}(f(x+te_k) - f(x)) = (Ax - b \mid e_k) + \frac{t}{2}(Ae_k \mid e_k) \ ,$$

et il en résulte clairement l'existence de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, égale à $(Ax - b \mid e_k)$.

7 On sait qu'en base orthonormée les composantes d'un vecteurs s'expriment par les produits scalaires avec les vecteurs de base, donc, vu la définition de g et le calcul ci-dessus, on a $g(x) = A.x - b$.

8 Cela a été vu en **1.** : par **5.**, $I(x,u) = \frac{1}{2}(Au \mid u)$ où la matrice $\frac{1}{2}A$ est symétrique définie positive, donc l'encadrement $r\|u\|^2 \leqslant I(x,u) \leqslant s\|x\|^2$ a lieu pour r,s respectivement égaux à l'inf et au sup des valeurs propres de $\frac{1}{2}A$.

9 Condition nécessaire : un minimum absolu sur $\mathbb{R}^n$ est a fortiori un minimum local et par théorème ($\mathbb{R}^n$ est un ouvert !), c'est nécessairement un point critique.
Condition suffisante : si $g(x) = 0$, on a pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, puisque $I(x,u) \geqslant 0$, $f(x+u) = f(x) + I(x,u) \geqslant f(x)$, donc $f(x)$ est un minimum absolu.

10 En appliquant le calcul du **5.** au vecteur $u = -\alpha.g(x) = -\alpha(Ax - b)$, on obtient (par **1.** et dfinition de l_n) :

$$f(x - \alpha g(x)) - f(x) = -\alpha(g(x) \mid g(x)) + \frac{\alpha^2}{2}(Ag(x) \mid g(x)) \leqslant \left(-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}l_n\right).\|g(x)\|^2 \ .$$

L'hypothèse $0 < \alpha < \frac{2}{l_n}$ entraîne $-\alpha + \frac{\alpha^2}{2}l_n < 0$, donc $f(x - \alpha g(x)) - f(x) \leqslant 0$ (l'ingalit est mme stricte sauf si $g(x) = 0$).

11 L'algorithme consiste à prendre un $y^0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque (par exemple $y^0 = 0$) puis de définir (y^k) par la relation $y^{k+1} = y^k - \alpha.g(y^k)$, α choisi comme précédemment. On obtient ainsi une suite (y^k) telle que $f(y^k)$ soit strictement décroissante. On remarque que cette suite est en fait exactement celle définie au **4.**, puisque $g(x) = Ax - b$. Elle converge donc vers $z = A^{-1}b$, qui vérifie $g(z) = 0$. Par **9.**, f admet bien un minimum en $z = \lim y^k$ dans ce cas.

1.2 Deuxième partie

12 Par **1.** on a une inégalité de la forme : $\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ r.\|x\|^2 \leqslant \frac{1}{2}(Ax \mid x)$, $r = \frac{1}{2}\min_{l \in sp(A)} l$ étant strictement positif. De plus, par Cauchy-Schwarz, $(b \mid x) \leqslant \|b\|.\|x\|$. D'où finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \ f(x) \geqslant \|x\|.(r.\|x\| - \|b\|) \ .$$

Comme la fonction au membre de droite $z \mapsto h(z) = z(rz - \|b\|)$ tend vers $+\infty$ quand $z = \|x\| \to \infty$, la propriété demandée est clairement vérifiée.

13 C'est la propriété précédente, appliquée à $c = f(y)$, et restreinte aux vecteurs x de F .

14 Un sous-espace vectorielétant non vide, soit $y \in F$ fixé. Par ci-dessus, r étant choisi tel que $\|x\| \geqslant r \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$, le minimum de $f_{|F}$ est à chercher dans $K = F \cap \bar{B}(0,r)$. Or, en dimension finie, un sous-espace vectorielest un fermé, ainsi qu'une boule fermée, et de même pour leur intersection. Donc K , fermé et borné d'un espace vectoriel de dimension finie, est compact. f est une application continue (car polynômiale en les composantes), donc elle admet un minimum $\bar{x}$ atteint sur K , cqfd.

15 Admettons f convexe, et supposons l'existence de 2 minimums $\bar{x} \neq \bar{y}$ à $f_{|F}$. Déjà, par double inégalité, $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$. Puis, pour $l = 1/2$, par exemple, on a :

$$f\left(\frac{1}{2}\bar{x} + \frac{1}{2}\bar{y}\right) < \frac{1}{2}f(\bar{x}) + \frac{1}{2}f(\bar{y}) = f(\bar{x}) \ ,$$

ce qui, puisque $\frac{1}{2}\bar{x}+\frac{1}{2}\bar{y}$ reste dans F, contredit que $\bar{x}$ est un minimum pur $f_{|F}$. Donc le minimum, qui existe par **14.**, est unique. *Remarque : f est la somme d'une fonction quadratique $x \mapsto \frac{1}{2}(Ax \mid x)$ et d'une fonction linéaire $x \mapsto -(b \mid x)$. Une fonction linéaire étant évidemment convexe (au sens large), la stricte convexité de f résulte de celle de $x \mapsto (Ax \mid x)$. Or celle-ci découle simplement de la définie positivité de la matrice symétrique A. On a en effet, pour tout $\lambda \in]0,1[$ et pour tout x, y de $\mathbb{R}^n$ tels que $x \neq y$:*

$$\begin{cases} & (A((1-\lambda)x+\lambda y) \mid (1-\lambda)x+\lambda y) \overset{?}{<} (1-\lambda)(Ax \mid x)+\lambda(Ay \mid y) \\ \iff & \lambda(1-\lambda)(Ax \mid x)-2\lambda(1-\lambda)(Ax \mid y)+\lambda(1-\lambda)(Ay \mid y) \overset{?}{>} 0 \\ \iff & \lambda(1-\lambda)(A(x-y) \mid x-y) \overset{?}{>} 0\ , \end{cases}$$

et cette dernière inégalité est acquise par hypothèse sur λ et définie- positivité de A.

16 g, calculé à la question **7.**, est le gradient de f, et on sait que, pour tout vecteur u, $\frac{\partial f}{\partial u}(y) = df_y(u) = (g(y) \mid u)$. Or, $\frac{\partial f}{\partial u}(y)$ représente la dérivée en $t=0$ de la fonction $\varphi : t \mapsto f(y+t.u)$, donc si $y \in F$ est un minimum pour $f_{|F}$, et si $u \in F$, φ admet un minimum absolu en 0. Il en résulte bien $0 = \varphi'(0) = (g(y) \mid u) = (Ay-b \mid u)$.
Réciproquement, si $Ay-b$ est orthogonal à F, on a comme à la question **9.** que $\forall u \in F\ f(y+u)-f(y) = I(y,u) = \frac{1}{2}(Au \mid u) \geqslant 0$, et $f(y)$ est bien un minimum de $f_{|F}$.

17 On a donc $(A\bar{x}-b \mid \bar{x}) = 0$, soit $(A\bar{x} \mid \bar{x}) = (b \mid \bar{x})$. De l'expression de f on déduit alors

$$f(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(A\bar{x} \mid \bar{x}) = -\frac{1}{2}(b \mid \bar{x})\ .$$

2 Problème 2 : Corrigé Pr Boujaida Sadik

2.1 Question Préliminaire :

1 Si g de classes $\mathcal{C}^1$ sur une partie V définie par une équation de type $f(x) = 0$ où f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et si g admet sur V un extremum en un point $a \in V$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $dg_a = \lambda df_a$.

2 $dg_a(h) = 2\,(a|h)$.

3 .

2.2 Première partie :

N.B : Pour les élèves marocains, programme 2009, x est un extrémum de f selon la contrainte $\|x\|^2 = 1$, la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ ayant pour gradient en x le vecteur $2x$, il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $gradf(x) = 2\mu x$, soit $f_x(h) = 2\mu\langle x, h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.
C'est un fruit qui vous est défendu dès que votre copie est destinée à passer les frontières.

4 La fonction $g : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et la sphère unité S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$, g est donc bornée et atteint ses bornes sur S^{n-1}.
Soit x un extrémum de g. D'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $dg_x(h) = \lambda df_x(h)$.

5 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. $f : x \longmapsto \langle x, Ax\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$.

a f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée des applications $x \longmapsto (x, Ax)$ qui est linéaire et du produit scalaire qui est bilinéaire.

Pour le calcul de la différentielle, mieux vaut ici utiliser la définition.

$f(x+h) - f(x) = \langle x, Ah\rangle + \langle h, Ax\rangle + \langle h, Ah\rangle = 2\langle Ax, h\rangle + \langle Ah, h\rangle$.

L'application $h \longmapsto 2\langle Ax, h\rangle$ est linéaire et $\langle Ah, h\rangle \leqslant \|A\|\,|h|^2$ donc $\langle Ah, h\rangle = o(|h|)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ f_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle$$

b Soit x un extrémum de la restriction de f sur S^{n-1}.

D'après (4.) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ f_x(h) = 2\langle Ax, h\rangle = \lambda\langle x, h\rangle$$

Nous avons donc $Ax = \dfrac{\lambda}{2}x$. x est donc un vecteur propre de A.

N.B : Nous venons de démontrer que toute matrice carrée symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle, étape essentielle dans la démonstration du théorème spectrale.

2.3 Deuxième partie

6 **a** Archi-connu.

b Idem.

c Nous allons noter $\langle A, B\rangle$ le produit scalaire $\mathrm{tr}^t AB$.

Une démarche similaire à celle suivie en (5.) permet de justifier que l'application $q : M \longmapsto \langle M, M\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ q_M(H) = 2\langle M, H\rangle = 2\mathrm{tr}^t MH$$

7 La linéarité du déterminant par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne permet d'écrire

$$\det(M + tE_{ij}) = \det M + t\Delta_{ij}(M)$$

où $\Delta_{ij}(M)$ est le cofacteur du coefficient d'indice (i,j) de M.

La fonction $t \longmapsto \det(M + tE_{ij})$ est donc dérivable et sa dérivée est constante de valeur $\Delta_{ij}(M)$. Ce qui signifie que l'application f admet une dérivée partielle en M selon le coefficient a_{ij} d'indice (i,j) de M et que

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(M) = \Delta_{ij}(M).$$

Les applications Δ_{ij} sont des fonctions polynomiales des coefficients de M et sont donc continues donc $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ij}}$ est continue. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_M(H) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{ij}\Delta_{ij}(M) = \mathrm{tr}^t\widetilde{M}H$$

8 $SL_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application continue $\det$ du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$, c'est donc un fermé.

g étant positive l'ensemble $I = \{g(M)/M \in SL_n(\mathbb{R})\}$ admet une borne inférieure que nous allons noter δ. En utilisant la caractérisation de la borne inférieure on prouve l'existence d'une suite d'éléments $(\alpha_n)_n$ de I qui converge vers δ. Considérons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément A_n de $SL_n(\mathbb{R})$ tel que $g(A_n) = |A_n|^2 = \alpha_n$.

La suite $(\|A_n\|^2)_n$ est convergente donc $(A_n)_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, elle admet au moins une suite extraite $(A_{\varphi(n)})_n$ qui converge. Posons $A = \lim A_{\varphi(n)}$. Par continuité de g, $\left(g(A_{\varphi(n)})\right)_n$ converge vers $g(A)$ et donc $\delta = g(A)$. Comme $SL_n(\mathbb{R})$ est un fermé alors $A \in SL_n(\mathbb{R})$ et donc $\delta \in I$.

g admet donc un minimum absolue en A sur $SL_n(\mathbb{R})$.

9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la fonction $\rho : t \longmapsto \det(e^{tM}), t \in \mathbb{R}$.
ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\rho'(t) &= f_{e^{tM}}\left(\frac{1}{t}e^{tM}\right) = f_{e^{tm}}\left(Me^{tM}\right)\\ &= \operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}(e^{tM})Me^{tM} = \operatorname{tr}({}^t\operatorname{Com}(e^{tM})e^{tM}M\\ &= \operatorname{tr}\det(e^{tM})M\\ &= \det(e^{tM})\operatorname{tr}M\end{aligned}$$

Ainsi ρ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \operatorname{tr}My = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \rho(t) = \lambda e^{t\operatorname{tr}M}$.
Comme $\rho(0) = \det(e^0) = \det(I_n) = 1$ alors $\lambda = 1$. Pour $t = 1$ nous obtenons alors

$$\det(e^M) = e^{\operatorname{tr}M}.$$

10 $M \in SL_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $f_M(H) = 0$ et $\gamma : t \longmapsto Me^{tM^{-1}H},\ t \in]-1,1[$.
Soit $t \in]-1,1[$

$$\det\left(\gamma(t)\right) = \det M \det\left(e^{tM^{-1}H}\right) = e^{t\operatorname{tr}M^{-1}H} = e^{t\det(M)\operatorname{tr}{}^t\widetilde{M}H} = e^{tf_M(H)} = 1.$$

donc γ est à valeurs dans $SL_n(\mathbb{R})$. γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\gamma'(t) = M(M^{-1}H)e^{tM^{-1}H} = He^{tM^{-1}H}$$

En particulier $\gamma(0) = M$ et $\gamma'(0) = H$.

11 **a** En considérant la fonction $g \circ \gamma$, γ étant la fonction définie dans la question précédente et qui vérifie

$$\gamma(0) = M, \gamma'(0) = H \text{ et } \forall t \in]-1,1[,\ \|\gamma(t)\| = 1$$

comme dans (4.), on démontre que si M est un extrémum de g alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ q_M(H) = \lambda f_M(H)$$

Il est alors trivial que si $f_M(H) = 0$ alors $q_M(H) = 0$.

b $M \in SL_n(\mathbb{R})$ donc ${}^t\widetilde{M} = M^{-1}$ et donc

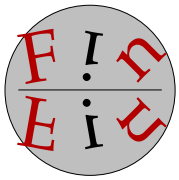
$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_M(H) = \operatorname{tr}M^{-1}H = \langle {}^tM^{-1}, H\rangle \text{ et } q_M(H) = 2\langle M, H\rangle$$

La relation $q_M = \lambda f_M$ donne alors

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle {}^tM^{-1} - 2\lambda M, H\rangle = 0$$

et donc ${}^tM^{-1} = 2\lambda M$. En appliquant le déterminant nous obtenons $(2\lambda)^n = 1$ et donc $2\lambda = \pm 1$.
Ainsi ${}^tMM = \pm I_n$, mais ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive, ses valeurs propres sont donc positives et donc nous ne pouvons avoir ${}^tMM = -I_n$.
Alors ${}^tMM = I_n$ ie que M est ume matrice orthogonale.

Maintenant, M étant orthogonale, ses vecteurs colonnes sont unitaires donc $q(M) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2 = n$.



À la prochaine

.

MAMOUNI MY ISMAIL

Devoir surveillé N°4 bis

Espaces vectoriels euclidiens
Calcul différentiel

MP-CPGE RABAT

Samedi 15 Janvier 2011

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices est interdit

Blague du jour

- Une logicienne (spécialiste en logie) vient d'avoir un enfant. Une de ses amies lui téléphone, et lui demande : C'est une fille ou un garçon ? Oui, répond la logicienne.
- Nous sommes dans le bateau des fonctions. Brusquement, le capitaine Factoriel s'exclame : On dérive, on dérive ! (on risque de se noyer). Les fonctions s'affolent, surtout la constante. Mais l'exponentielle réplique : Bof, moi on ne me dérive jamais.
- La vie est complexe, elle a une face réelle et une autre imaginaire.

Leonhard Euler (1707-1783)

Mathématicien et un physicien suisse. Complétement aveugle pendant les dix-sept dernières années de sa vie, il produit presque la moiti de son travail durant cette période. Euler fut profondément pieux pendant toute sa vie, il répondait souvent cette anecdote : $e^{2i\pi}+1=0$, donc Dieu existe. Certains scientifiques ont appelé cette identité la formule la plus remarquable du monde . Euler écrit *Tentamen novae theoriae musicae* en 1739 qui est une tentative d'accorder les mathématiques et la musique ; une biographie commente que le travail est destinée à des musiciens trop avancés dans leurs mathématiques et à des mathématiciens trop musicaux. Dans les sciences économiques, il prouve que si chaque facteur de production est payé à la valeur de son produit marginal, alors (sous des rendements à l'échelle constants) le revenu total et le rendement seront complétement épuisés.

Mathématicien du jour

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 Problème 1 : CCP 2003, MP, Math 2

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1.1 Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA$ est sa matrice transposée, $rang(A)$ son rang et $Tr(A)$ sa trace.
I_n : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$: le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tMM = I_n$.
Pour p entier naturel, Δ_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et ∇_p est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

1.2 Objectifs

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :
dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,
dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,
dans la partie IV., Δ_p par des notions de densité,
dans la partie V., ∇_p par le théorème de Courant et Fischer.
La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.
Remarque : dans le texte, le mot "positif" signifie "supérieur ou égal à 0".

1.3 Exercice préliminaire

1 1. Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice H et déterminer une matrice P de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

2 2. On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

1.4 Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3 3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = Tr({}^tAB)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$. Dans tout le sujet, si Π est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie Π est le réel $d(A,\Pi) = \inf_{M\in\Pi} \|A - M\|$.

4 4. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

5 5. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A,\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$ et déterminer de même $d(A,\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

6 6. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

1.5 Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

a Théorème de la décomposition polaire

7 7. Montrer qu'une matrice S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

8 8. Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

9 9. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, .. d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$.
On note $A_1, A_2, .., A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_iA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut A_i ?

b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, ..., E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel i entre 1 et n, $A_i = d_iE_i$.

c. En déduire qu'il existe une matrice E de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

10 10. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D à termes positifs et une matrice orthogonale P telles que : $P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBBP = D^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

11 11. Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. (Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice U de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

b Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

12 12. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

13 13. Dans la suite de cette partie, soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$; il existe une matrice diagonale D et une matrice P de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

14 14. On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$

a. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D-\Omega\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2Tr(D\Omega) + n$

b. Montrer que pour toute matrice Ω de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $Tr(D\Omega) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

15 15. Montrer que , $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$.

16 16. Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où Γ est la matrice exemple de la partie I.

2 Problème 2 : CNC 2003, TSI, Math 1

Sur l'équation des cordes vibrantes

Dans ce problème, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$) désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), et c est un réel strictement positif.

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$(I) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

où $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ est une fonction inconnue élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

A- Résolution par la méthode de D'Alembert

1. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$; montrer que $\dfrac{\partial^2 h}{\partial v \partial u} = 0$ si et seulement s'il existe deux fonctions F et G, éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout couple (u,v) de $\mathbb{R}^2$, $h(u,v) = F(u) + G(v)$.
2. Soit $\Psi : (x,t) \mapsto (u,v) = (x - ct, x + ct)$.
   (a) Vérifier que Ψ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
   Dans la suite, Φ désigne l'automorphisme réciproque de Ψ.
   (b) Prouver que l'application $\Theta : f \mapsto f^* = f \circ \Phi$ est un automorphisme de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ une solution de (I).
   (a) Calculer $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}$, puis $\dfrac{\partial^2 f^*}{\partial v \partial u}$.
   (b) En déduire que f est de la forme $f : (x,t) \mapsto F(x-ct) + G(x+ct)$ où F et G sont deux éléments quelconque de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
4. Soit φ un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique élément f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, solution de (I), que l'on exprimera en fonction de φ, satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$(1) \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = \varphi(x) & \text{(position initiale au temps } t=0) \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{(corde au repos au temps } t=0) \end{cases}$$

.

B- Solutions stationnaires vérifiant des conditions aux limites

Une solution f de (I) est dite stationnaire s'il existe deux fonctions g et h de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\,(x,t)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,t)=g(x)h(t).$$

1. Soit λ une constante réelle. On suppose que g et h sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant le système

$$(S_\lambda)\ \begin{cases} g''=\lambda g \\ h''=\lambda c^2 h \end{cases}$$

Établir que la fonction $f:\ (x,t)\mapsto g(x)h(t)$ est solution de (I).

2. Réciproquement, on suppose que g et h sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tels que la fonction $(x,t)\mapsto g(x)h(t)$ soit une solution de (I) non identiquement nulle.
Prouver l'existence d'un réel λ tel que g et h soient solution du système (S_λ).

3. Soit a un réel strictement positif.
   (a) Résoudre l'équation différentielle $y''=\mu y$ selon les valeur du réel μ.
   On distinguera les trois cas $\mu=0,\ \mu>0$ et $\mu<0$.
   (b) Déterminer tous les réels μ de sorte que l'équation différentielle $y''=\mu y$ admette une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition aux limites $y(0)=y(a)=0$.
   Expliciter l'ensemble des solutions correspondant à chacune de ces valeurs de μ.
   (c) Déterminer alors l'ensemble des solutions stationnaires f de (I) vérifiant la condition aux limites

$$(2)\quad \forall\,t\in\mathbb{R},\ f(0,t)=f(a,t)=0.$$

3 Exercice : e3a 2007, MP, Math 2

.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f.

   1a). Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

   1b). Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0).

   1c). Démontrer que les points (x_0, y_0) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ sont exactement les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

   1d). Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $(h,k) \rightarrowtail f(1+h,k)$ au voisinage de $(0,0)$. Le point $(1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ?

   1e). De même, le point $(-1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ? Justifier votre réponse.

   1f). Quels sont les extrema locaux de f ? On énoncera avec soin le théorème utilisé.

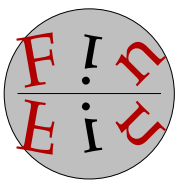
2. Désormais, soit g la fonction définie sur le disque unité D par $g(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

   2a). Justifier que g admet un maximum A et un minimum a sur D.

   2b). Démontrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C.

   2c). Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les points de C sur lesquels f atteint cette valeur.

   2d). Déterminer la valeur de a et les points de C sur lesquels g atteint cette valeur.



Bonne Chance

.

MAMOUNI MY ISMAIL

Corrigé Devoir surveillé N°4 bis

Espaces vectoriels euclidiens Calcul différentiel

MP-CPGE RABAT

Blague du jour

Exercice : démontrer que tous les nombres impairs sont premier.
- Le chimiste commence : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier... bah, c'est vrai !
- L'architecte essait aussi : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier, 11 est premier... mais oui, c'est vrai !
- Le mathématicien réplique : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 n'est PAS premier... ça marche pas vôtre truc !
- L'informaticien : 3 est premier, 5 est premier, 7 est premier, 9 est premier.. 9 est premier.. 9 est premier...

André-Louis Cholesky (1875-1918)

Mathématicien du jour

Polytechnicien et officier français, ingénieur topographe et géodésien. Il est célèbre pour sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires, toujours intensément utilisée de nos jours.
Durant la Première Guerre mondiale, il participe à l'amélioration d'une cartographie nécessaire à la préparation des tirs. De septembre 1916 à février 1918, il est directeur technique du service géographique de l'armée en Roumanie, où il est Lieutenant-Colonel.
Affecté en juin 1918 dans l'armée, il décède le 31 août 1918 des suites de blessures reçues sur le champ de bataille.

1 Corrigé CCP 2003, MP, Math 2, Pr Legros

Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. On obtient directement :

$$H = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = I_3 + 5J \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

J est clairement de rang 1, donc 0 est valeur propre double de J, la troisième valeur propre étant égale à 3 puisque $\mathrm{Tr}(J) = 3$. Comme $(1,1,1)$ est un vecteur propre évident associé à la valeur propre 3, posons

$$e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le noyau de J est alors l'orthogonal de e_1. Nous posons donc $e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3 = e_1 \wedge e_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$, pour obtenir $P^{-1}HP = I_3 + 5\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = D^2$ avec $P = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&-\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. Comme S est inversible (les valeurs propres de S sont égales à celles de D), on peut poser $U = \Gamma S^{-1}$. Nous avons ensuite ${}^tUU = {}^tS^{-1}{}^t\Gamma\Gamma S^{-1} = S^{-1}HS^{-1} = PD^{-1}P^{-1}PD^2P^{-1}PDP^{-1} = I_3$ et U est bien orthogonale. Il reste à calculer U :

$$U = \Gamma PD^{-1}{}^tP = \begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

3. On a, pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$(A\,|\quad \textbf{b} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

L'application $(\ |\ )$ est donc le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour lequel la base canonique est une base orthonormale.

4. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $M = \frac{M+{}^tM}{2} + \frac{M-{}^tM}{2}$ avec $\frac{M+{}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{M-{}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{0\}$, les deux espaces sont supplémentaires. Ils sont également orthogonaux car, pour $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$(A\,|\,S) = \mathrm{Tr}\left({}^tAS\right) = -\mathrm{Tr}\,(AS) = -\mathrm{Tr}\,(SA) = -\mathrm{Tr}\left({}^tSA\right) = -(S\,|\quad \textbf{a},$$

et donc $(A\,|\,S) = 0$.

5. Si A est une matrice quelconque, la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est égale à la distance de A au projeté orthogonal de A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, soit encore à la norme du projeté orthogonal de A sur $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ce qui est exactement le résultat demandé. Par symétrie, on a $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \left\|\frac{1}{2}(A + {}^t\quad \textbf{a}\right\|$.

6. On a facilement $\frac{\Gamma+{}^t\Gamma}{2} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&-1&-2\end{pmatrix}$ puis $d(\Gamma, \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = 2\sqrt{2}$.

7. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Le théorème de réduction des matrices symétriques permet d'affirmer qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $D = PS{}^tP$ soit diagonale. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons donc :

$${}^tXSX = {}^t(PX)D(PX) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$$

en notant λ_i les termes diagonaux de D (i.e. les valeurs propres de S) et y_i les coefficients de la matrice colonne PX. Ainsi, il faut et il suffit que les λ_i soit tous positif pour que S soit positive puisque PX décrit $\mathbb{R}^n$ quand X décrit $\mathbb{R}^n$.

8. La matrice ${}^tAA$ est clairement symérique et ${}^tX({}^tA\quad \textbf{a}\,X = {}^t(AX)(AX) = \|AX\|^2 \geqslant 0$ pour tout X (en notant $\|\ \|$ la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$). Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA$ est donc symétrique et positive.

9. **a** ${}^tA_iA_j$ est le coefficient d'indice (i,j) de la matrice ${}^tAA$: il est donc nul si $i \neq j$ et égal à d_i^2 si $i = j$. En particulier, si $d_i = 0$, $\|A_i\|^2 = {}^tA_iA_i = d_i^2 = 0$ et la colonne A_i est nulle.

b Notons I l'ensemble des i tels que $e_i \neq 0$ et, pour chaque $i \in I$, posons $E_i = \frac{A_i}{\|A_i\|} = \frac{A_i}{d_i}$. La famille $(E_i)_{i\in I}$ est alors une famille orthonormale, que nous pouvons complétée en une base orthonormale $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Comme $d_i = 0$ et $A_i = 0$ pour $i \notin I$, l'égalité $A_i = d_iE_i$ est vraie pour tout i.

c Soit E la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Cette base étant orthonormale, E est une matrice orthogonale et $A_i = d_i E_i$ pour tout i se traduit par $A = ED$.

10.

a ${}^tAA$ est symétrique réelle, donc il existe P orthogonale telle que $P^{-1}{}^tAAP$ soit diagonale. D'autre part, ${}^tAA$ est positive donc ses valeurs propres sont positives (questions **7** et **8**). On en déduit que $D = P^{-1}{}^tAAP = P^{-1}{}^tBBP$ est une matrice diagonale à termes positifs.

b On déduit de la question **9c** qu'il existe deux matrices orthogonales E et F telles que $A = ED$ et $B = FD$, ce qui donne $A = UB$ avec $U = EF^{-1}$, qui est bien orthogonale.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme ${}^tAA$ est symétrique positive, il existe $P \in \mathcal{O}n$ et D diagonale positive telle que ${}^tAA = {}^tPD^2P$, que l'on peut écrire ${}^tAA = {}^tSS$ où $S = {}^tPDP$ est symétrique positive. On déduit de la question précédente qu'il existe U orthogonale telle que $A = US$, ce qui est le résultat demandé.

12. Nous avons :

$$||\Omega M||^2 = \mathrm{Tr}\left({}^tM\Omega{}^t\Omega M\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tMM\right) = ||M||^2$$

et en utilisant la propriété classique $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$:

$$||M\Omega||^2 = \mathrm{Tr}\left({}^t\Omega{}^tMM\Omega\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tMM\Omega{}^t\Omega\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tMM\right) = ||M||^2,$$

ce qui donne bien $||\Omega M|| = ||M\Omega|| = ||M||$.

13.

a On a $||A - \Omega|| = ||US - \Omega|| = ||U(S - U^{-1}\Omega)|| = ||S - U^{-1}\Omega||$ d'après la question **12**.

Quand Ω décrit $\mathcal{O}n$, $U^{-1}\Omega$ décrit également $\mathcal{O}n$, donc $d(A, \mathcal{O}n) = d(S, \mathcal{O}n)$.

b Pour tout $\Omega \in \mathcal{O}n$, nous avons $||S - \Omega|| = ||PDP^{-1} - \Omega|| = ||P(D - P^{-1}\Omega P)P^{-1}|| = ||D - P^{-1}\Omega P||$ car $P, P^{-1} \in \mathcal{O}n$. Une nouvelle fois, $P^{-1}\Omega P$ décrit $\mathcal{O}n$ quand Ω décrit $\mathcal{O}n$ donc

$$d(A, \mathcal{O}n) = d(S, \mathcal{O}n) = d(D, \mathcal{O}n).$$

14.

a $||D - \Omega||^2 = \mathrm{Tr}\left({}^t(D - \Omega)(D - \Omega)\right) = \mathrm{Tr}\left(D^2 - {}^t\Omega D - D{}^t\Omega + I_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\mathrm{Tr}(D\Omega) + n.$

b En notant $d_{i,j}$ et $\omega_{i,j}$ les termes génériques de D et de Ω, nous obtenons :

$$\mathrm{Tr}(D\Omega) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\omega_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\omega_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

car Ω étant orthogonale, les $\omega_{i,j}$ sont éléments de $[-1, 1]$

c On en déduit que pour tout $\Omega \in \mathcal{O}n$:

$$||D - \Omega||^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i + n = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - 1)^2 = ||D - I_n||^2.$$

Comme $I_n \in \mathcal{O}n$, ceci prouve que la distance de D à $\Omega \in \mathcal{O}n$ est minimale pour $\Omega = I_n$.

15. Nous venons de démontrer que $d(A, \mathcal{O}n) = d(D, \mathcal{O}n) = d(D, I_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - 1)^2}$, où les λ_i sont les racines carrées des valeurs propres de ${}^tAA$, appelées *valeurs singulières* de A.

16. Nous avons ici $n = 3$, $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, donc $d(\Gamma, \mathcal{O}n) = 3$.

2 Corrigé e3a 2007, MP, Math 2, Pr Deyris

1a) La fonction f est un polynôme en x et y, donc est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

1b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 3{x_0}^2 - 3(1+{y_0}^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = -6x_0y_0$.

1c) C'est immédiat.

1d) On a, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$: $f(1+h,k) = (1+3h+3h^2+h^3) - 3(1+h)(1+k^2) = -2+3h^2-3k^2+h^3-3hk^2$.
Prenons pour norme sur $\mathbb{R}^2$ la norme définie par $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$ (les normes sur $\mathbb{R}^2$ étant toutes équivalentes, le choix de la norme n'influe pas sur le résultat). On a alors, pour tout $(h,k)\in\mathbb{R}^2$, $|h|\leqslant\|(h,k)\|$ et donc $|h^3|\leqslant\|(h,k)\|^3 = o(\|(h,k)\|^2)$ au voisinage de $(0,0)$; de même, $hk^2 = o(\|(h,k)\|^2)$ au voisinage de $(0,0)$. Par suite, toujours au voisinage de $(0,0)$:

$$f(1+h,k) = -2+3(h^2-k^2)+o(\|(h,k)\|^2)$$

La forme quadratique $q : (h,k)\longmapsto 3(h^2-k^2)$ n'a pas un signe constant (par exemple $q(1,0)>0$ et $q(0,1)<0$) ; on sait qu'alors f ne présente pas d'extremum en $(1,0)$.

1e) De même, on a $f(-1+h,k) = 2-3(h^2-k^2)+o(\|(h,k)\|^2)$ au voisinage de $(0,0)$. Pour les mêmes raisons qu'en **1d)**, f ne présente pas d'extremum en $(-1,0)$.

1f) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. On sait qu'alors, si elle présente un extremum local en un point, ce point est un point critique de f. Or on a vu que ses seuls points critiques sont $(1,0)$ et $(-1,0)$, et que f n'y a pas d'extremum ; par suite f n'a pas d'extremum local.

2a) La fonction g, restriction de f à D, est continue sur D. De plus, D est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (image réciproque du fermé $[0,1]$ par l'application continue $(x,y)\longmapsto x^2+y^2$), et est clairement borné ; c'est donc un compact de $\mathbb{R}^2$.
On sait que toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes ; donc g a un maximum A en un point de D, et un minimum a en un point de D.

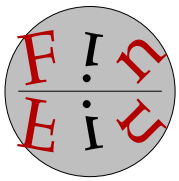
2b) Supposons que A soit atteint en un point (x_0,y_0) de $D' = D\setminus C$. Alors la restriction de g à D' présenterait un maximum en (x_0,y_0). De plus, D' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (c'est le disque unité ouvert) et g est C^1 sur D' ; donc (x_0,y_0) serait un point critique de g, donc de f.
Or on a vu que les seuls points critiques de f sont $(1,0)$ et $(-1,0)$, qui n'appartiennent pas à D' ; les extremums de g ne peuvent donc pas être atteints en un point de D', ils le sont donc forcément sur C.

2c) Pour tout $t\in\mathbb{R}$: $g(\cos t,\sin t) = \cos^3 t - 3\cos t(2-\cos^2 t) = 2\cos t(2\cos^2 t-3)$.
Quand t décrit $\mathbb{R}$, $\cos t$ décrit $[-1,1]$. Étudions donc les variations de $\varphi : u\longmapsto 2u(2u^2-3)$ sur $[-1,1]$. On a, pour tout $u\in[-1,1]$, $\varphi'(u) = 6(2u^2-1)$ d'où le tableau de variations :

u	-1		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		1
$\varphi(u)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

Puisque $(\cos t,\sin t)$ décrit C quand t décrit $\mathbb{R}$, et que $g(\cos t,\sin t) = \varphi(\cos t)$ pour tout t, le maximum de g sur C est atteint en chaque point $(\cos t,\sin t)$ pour lequel $\varphi(\cos t)$ est maximal, c'est à dire pour lequel $\cos t = -1/\sqrt{2}$. Par suite $A = 2\sqrt{2}$, et est atteint en $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2},-1\sqrt{2})$.

2d) De même, $a = -2\sqrt{2}$ et est atteint en $(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ et $(1/\sqrt{2},-1\sqrt{2})$.



À la prochaine

E99H

BANQUE PT PHYSIQUE & TECHNOLOGIE ouni My Ismail

Devoir Libre n 14

Coniques-Quadriques

MP-CPGE Rabat

Durée 4 h

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?
- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon

Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.

Son nom est lié à la suite de matrices $(\mathbf{H}_{2^k})$ définie de la façon suivante : $\mathbf{H}_1 = (1), \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{H}_{2^k} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{2^{k-1}} & \mathbf{H}_{2^{k-1}} \\ \mathbf{H}_{2^{k-1}} & -\mathbf{H}_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$. Elles sont utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Mathématicien du jour

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultat non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Partie I

On se place dans le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On note $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le produit scalaire usuel entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Soit (C) la conique d'équation cartésienne

$$y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + (4 - 3\sqrt{3})y + 6 - 6\sqrt{3} = 0.$$

1. On considère le point O' de coordonnées $(-3,-2)$. Donner une équation cartésienne de (C) dans le repère $(O';\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les valeurs propres de A. Trouver deux vecteurs propres $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^2$.

(b) Quelle isométrie du plan transforme le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ en le repère $(O';\vec{u},\vec{v})$?

(c) Donner une équation cartésienne (C) dans le repère $(O';\vec{u},\vec{v})$.

(d) Quelle est la nature de la conique (C) ?

3. Déterminer les sommets de (C) dans le repère $(O';\vec{u},\vec{v})$ puis dans le repère $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
4. Déterminer les asymptotes de (C) dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
5. Dessiner la conique (C). On prendra $\sqrt{3}\simeq 1,732$.

Partie II

On considère dans le plan $\mathcal{P}$ la courbe d'équation polaire

$$\rho(\theta)=\sqrt{\sin(2\theta)}.$$

1. Déterminer l'ensemble des réels θ pour lesquels $\rho(\theta)$ est bien défini.
2. Vérifier qu'il suffit d'étudier la fonction ρ pour $\theta\in[0,\pi/4]$. Par quelle(s) transformation(s) du plan obtient-on l'ensemble de la courbe à partir de cette étude ?
3. Etudier les variations de ρ.
4. Déterminer l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses. On admettra que la courbe admet une tangente horizontale en ce(s) point(s).
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point de paramètre $\theta\in]0,\pi/4]$ dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
6. Dessiner la courbe.

Partie III

Soit Ω un point du plan et soit R un réel strictement positif.

1. Etant donné un point M du plan, combien existe-il de points M' vérifiant :
   - Les point M, M' et Ω sont alignés,
   - $\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega M'}=R^2$?
2. On considère l'application ϕ, de $\mathcal{P}\setminus\{\Omega\}$ dans lui même, qui, à tout point M distinct de Ω associe le point M' tel que
   - Les point M, M' et Ω sont alignés,
   - $\overrightarrow{\Omega M}\cdot\overrightarrow{\Omega M'}=R^2$.

   Montrer que l'application ϕ est une bijection, et déterminer sa bijection réciproque.
3. Quelle est l'image par ϕ du cercle de centre Ω et de rayon R ?
4. Quelle est l'image par ϕ d'un cercle de centre Ω et de rayon $r\neq R$?
5. Quelle est l'image par ϕ d'une droite passant par Ω ?
6. Soit M un point du plan d'affixe complexe z. On note z_Ω l'affixe de Ω et z' l'affixe de M', image de M par ϕ.

   (a) Déterminer, en fonction de R, Ω et M, le réel λ tel que : $\overrightarrow{\Omega M'}=\lambda\overrightarrow{\Omega M}$

   (b) Vérifier que

$$z'=z_\Omega+\frac{R^2}{\overline{z-z_\Omega}}.$$

7. On suppose dans cette question que $z_\Omega = 1$ et $R = 1$.
   (a) Déterminer le module et l'argument du point $M(\theta)$ d'affixe
   $$z = \frac{1}{2}\left(1 + e^{i\theta}\right)$$
   avec $\theta \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer l'ensemble A des réels θ pour lesquels $M(\theta) \neq \Omega$.
   (c) Pour $\theta \in A$, déterminer l'image par ϕ du point $M(\theta)$ (on précisera le module et l'argument de son affixe).
   (d) Déterminer l'image par ϕ du cercle de diamètre $[O, \Omega]$, privé de Ω.
   (e) Déterminer l'image par ϕ de l'axe des ordonnées.
8. Soit (E) l'ellipse d'équation
   $$3x^2 + 4y^2 = 12.$$
   (a) Déterminer l'excentricité et les foyers de cette ellipse.
   (b) On note F le foyer d'abscisse positive. Vérifier qu'une représentation polaire de (E) dans le repère $(F; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est
   $$\rho(\theta) = \frac{3}{2 + \cos\theta}.$$
   (c) Dans cette question uniquement, on suppose que les points F et Ω sont confondus, et que $R = 1$. Déterminer une équation polaire dans le repère $(F; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de l'image de (E) par ϕ.
9. Dans cette question uniquement, on suppose que les points O et Ω sont confondus, et que $R = \sqrt{2}$. (H) étant l'hyperbole d'équation $xy = 1$, déterminer l'image de (H) par ϕ (on pourra commencer par déterminer une représentation polaire de (H)). Comment obtient-on cette courbe à partir de la courbe étudiée dans la partie II ?

Partie IV

On se place maintenant dans l'espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soit l'ellipse $(\mathcal{E})$ d'équation

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{C})$ un cône de sommet S s'appuyant sur $(\mathcal{E})$. Nous cherchons une condition sur S pour que $(\mathcal{C})$ soit de révolution.

Pour des raisons de symétrie, si le cône $(\mathcal{C})$ est de révolution, le sommet S appartient au plan $(O; \vec{\imath}, \vec{k})$. On supposera donc dans toute cette partie que S a pour coordonnées $(x_0, 0, z_0)$ avec $z_0 \neq 0$.

1. Soit M le point de coordonnées (x_M, y_M, z_M). Donner une équation paramétrique de la droite passant par S et M.
2. En déduire qu'une équation cartésienne de $(\mathcal{C})$ dans le repère $(S; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est
   $$\frac{(x_0 Z - z_0 X)^2}{4} + z_0^2 Y^2 - Z^2 = 0.$$

.

3. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{z_0^2}{4} & 0 & -\frac{x_0 z_0}{4} \\ 0 & z_0^2 & 0 \\ -\frac{x_0 z_0}{4} & 0 & \frac{x_0^2}{4} - 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

   (b) Montrer que la matrice A est diagonalisable.

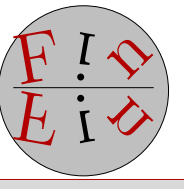
   (c) Montrer que le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{x_0^2 + z_0^2 - 4}{4}\right)\lambda - \frac{z_0^2}{4}$$

   ne peut pas admettre de racine double.

   (d) En déduire que la matrice A admet une valeur propre double si et seulement si z_0^2 est racine du polynôme P.

4. Déterminer l'ensemble des sommets S pour lesquels le cône $(\mathcal{C})$ est de révolution.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°14 (Pr Chéno)

Coniques-Quadriques

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

3 amis sont au restaurant. Après leur repas, l'addition s'élève a 30 dhs. Ils donnent chacun 10 dhs. Le serveur s'aperçoit qu'il s 'est trompé dans les comptes et qu'en fait ils ne doivent payer que 25 dhs.
Comme 5 dhs n'est pas divisible en 3, il décide de garder 2 dhs de pourboire et de leur rendre le reste. Ainsi les amis se partagent les 3 dhs et ils ont donc payé le repas 3 fois 9dhs = 27 dhs plus les 2 dhs du serveur, cela donne 29 dhs !
Où est passé le dernier dh ?

George Boole (1815-1864)

Logicien, mathématicien et philosophe britannique. Il est le créateur de la logique moderne, que l'on appelle algèbre de Boole en son honneur.
Autodidacte, il publia ses premiers travaux tout en exerçant son métier d'instituteur et de directeur d'école primaire. En effet, issu d'une famille pauvre, George Boole n'a pas les moyens financiers d'aller l'université, il fût obligé de travailler pour soutenir sa famille, il devient enseignant à 16 ans. Quatre ans plus tard, il fonde et dirige sa propre école. Ses travaux lui valurent la Royal Medal de la Royal Society.
Il épouse Mary Everest, nièce de Sir George Everest, le responsable de la mission cartographique qui baptisa le mont Everest.

Mathématicien du jour

Partie I

Question I.1
Notons (x', y') les nouvelles coordonnées. On a $x = x' - 3$ e t$y = y' - 2$ de sorte que l'équation de (C) devient

$$(y'-2)^2 - \sqrt{3}(x'-3)(y'-2) - 2\sqrt{3}(x'-3) + (4-3\sqrt{3})(y'-2) + 6 - 6\sqrt{3} = 0 \iff y'^2 - \sqrt{3}x'y' + 2 = 0.$$

Autrement dit, O' est le centre de la conique (C).

Question I.2
A est bien sûr la matrice de la forme quadratique associée à la conique.
I.2.a On trouve $\chi_A(X) = X^2 - X - \dfrac{3}{4}$ et les valeurs propres de A sont donc $\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$. On peut choisir comme base orthonormée directe de diagonalisation la base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ et $\vec{v}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$, c'est-à-dire la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qu'on a fait tourner de $-\dfrac{\pi}{3}$. L'isométrie qui transforme le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en $(O'; \vec{u}, \vec{v})$ est la composée de cette rotation de centre O et de la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
Dans le nouveau repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$, en notant (X, Y) les coordonnées, l'équation de (C) se transforme en

$$\frac{1}{2}(3X^2 - Y^2) + 2 = 0 \iff \frac{Y^2}{4} - \frac{X^2}{4/3} = 1.$$

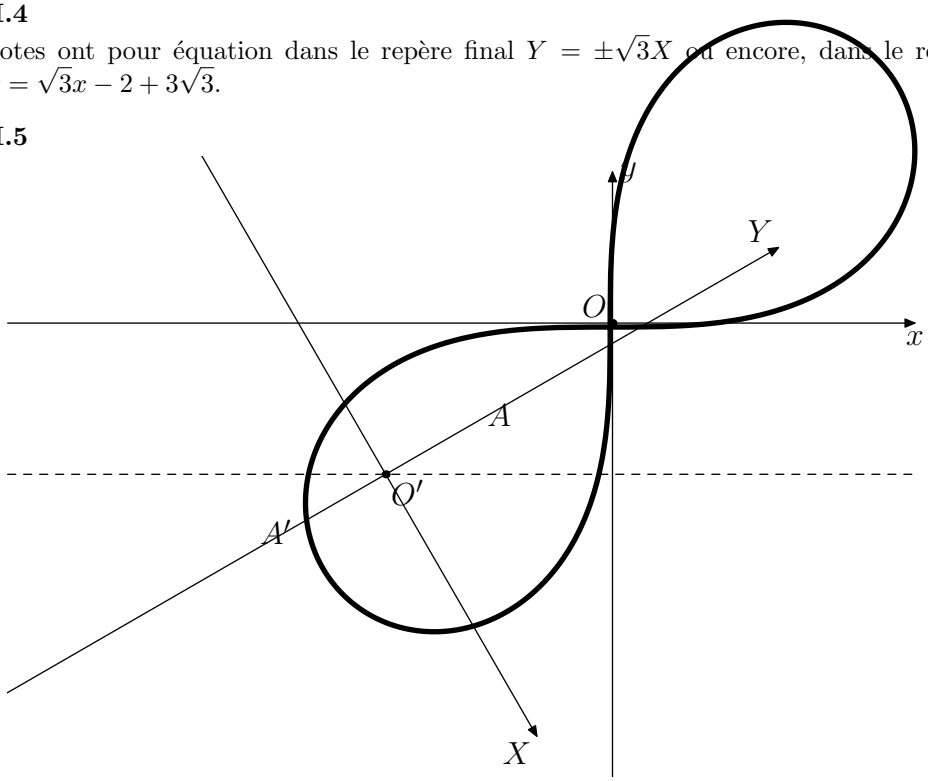
Le changement de coordonnées s'écrit $\begin{cases} x = \dfrac{X + Y\sqrt{3}}{2} - 3 \\ y = \dfrac{-X\sqrt{3} + Y}{2} - 2 \end{cases}$

(C) est donc une hyperbole équilatère d'axe focal $(O', \vec{v})$.

Question I.3
Les sommets A et A' ont pour coordonnées $X = 0$ et $Y = \pm 2$ ou encore, dans le repère de départ, $A(-3+\sqrt{3}, -1)$ et $A'(-3-\sqrt{3}, -3)$.

Question I.4
Les asymptotes ont pour équation dans le repère final $Y = \pm\sqrt{3}X$ ou encore, dans le repère initial, $y = -2$ et $y = \sqrt{3}x - 2 + 3\sqrt{3}$.

Question I.5



Partie II

Question II.1
$\rho(\theta)$ est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et tous les $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ pour k entier.

Question II.2
Les points $M(\theta)$ et $M(\theta+\pi)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine. En outre $M(\theta)$ et $M(\frac{\pi}{2} - \theta)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes. On restreint l'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Question II.3
Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ la fonction ρ croît de 0 à 1.

Question II.4
La courbe coupe $(x'x)$ uniquement au point O puisque $\rho(0) = \rho(\pi) = 0$. La tangente à la courbe est alors dirigée par le vecteur unitaire d'angle polaire θ : elle est bien horizontale.

Question II.5
Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$, la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{M}'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u} + \rho(\theta)\vec{v}$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ est la base tournante habituelle.
On trouve que $\vec{M}' = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\vec{u} + \sqrt{\sin 2\theta}\vec{v}$, colinéaire à $\vec{T} = \cos 2\theta\vec{u} + \sin 2\theta\vec{v}$, donc $\widehat{\vec{u}, \vec{T}} = 2\theta$ et $\widehat{\vec{\imath}, \vec{T}} = 3\theta$.
Ainsi $\vec{T}(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ dans le repère initial.
La tangente a donc pour équation $\sin 3\theta(x - \sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta) = \cos 3\theta(y - \sqrt{\sin 2\theta}\sin\theta)$ ou encore

$$x\sin 3\theta - y\cos 3\theta = (\sin 2\theta)^{3/2}.$$

Question II.6 Voir figure ci dessus

Partie III

Question III.1
Si $M=\Omega$, il n'y a aucun point M' répondant à la question, puisque $R>0$.
Si $M\neq\Omega$, l'alignement impose de chercher M' sous la forme $\overrightarrow{\Omega M'}=k\overrightarrow{\Omega M}$ et on trouve alors une seule solution $k=\dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$ ou encore $M'=\Omega+\dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$.

Question III.2
Par définition de ϕ, il s'agit d'une involution : $M'=\phi(M)\iff M=\phi(M')$. Autrement dit : $\phi^{-1}=\phi$.

Question III.3
L'image du cercle de centre Ω et de rayon R est égale à ce cercle lui-même, puisqu'il est défini par $\overrightarrow{\Omega M}^2=R^2$.

Question III.4
L'image du cercle de centre Ω et de rayon $0<r\neq R$ est le cercle de centre O et de rayon R^2/r.

Question III.5
Soit D une droite passant par Ω, il faut retirer le point Ω qui n'a pas d'image par ϕ et étudier l'image de $D'=D\setminus\{\Omega\}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigeant D.

Un point $M\in D'$ vérifie $\Omega M=k\vec{u}$, où $k\neq 0$. Son image est alors le point M' défini par $\Omega M'=\dfrac{R^2}{k}\vec{u}$.

Or, quand k décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{R^2}{k}$ décrit également $\mathbb{R}^*$. Cela signifie que $\phi(D')=D'$.

Question III.6
On a déjà dit que $\lambda=\dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$.
Alors, en complexes : $z'-z_\Omega=\lambda(z-z_\Omega)$ donc

$$z'=z_\Omega+\frac{R^2}{|z-z_\Omega|^2}(z-z_\omega)=z_\Omega+\frac{R^2}{(z-z_\Omega)\overline{(z-z_\Omega)}}(z-z_\Omega)=z_\Omega+\frac{R^2}{\overline{z-z_\Omega}}.$$

Question III.7
Ici on a donc $z'=1+\dfrac{1}{\bar{z}-1}$.
$z=\dfrac{1}{2}(1+e^{i\theta})=\dfrac{e^{i\theta/2}}{2}(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})=\cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$ est de module $\cos\dfrac{\theta}{2}$ et d'argument $\dfrac{\theta}{2}$ si on choisit $-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi$, ce qui est toujours possible.

$M(\theta)\neq\Omega\iff e^{i\theta}\neq 1\iff\theta\neq 0$ (modulo 2π).

Quand $z=\dfrac{1}{2}(1+e^{i\theta})\neq 1$ on obtient donc

$$z'=1+\frac{2}{e^{-i\theta}-1}=\frac{e^{-i\theta}+1}{e^{-i\theta}-1}=-\frac{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2}-e^{i\theta/2}}=i\text{cotan}\frac{\theta}{2},$$

il s'agit bien sûr d'un imaginaire pur.

Quand θ décrit $[-\pi,0[\cup]0,\pi]$, $M(\theta)$ décrit exactement le cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω. Le point $M'(\theta)=\phi(M(\theta))$ décrit alors, d'après ce qu'on vient de voir, l'axe des ordonnées.

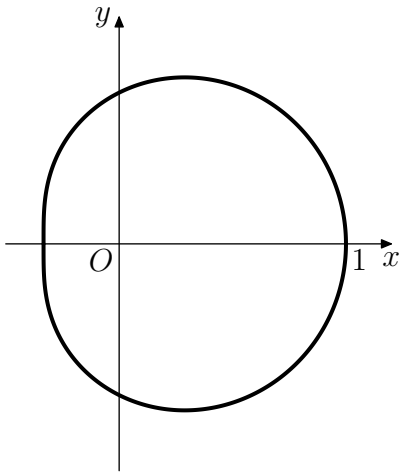
Comme ϕ est involutive, l'image de l'axe des ordonnées est égale au cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω.

Question III.8
Avec les notations traditionnelles, l'équation réduite de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ donc $a=2$ et $b=\sqrt{3}$.
Alors $c=\sqrt{4-3}=1$ et les foyers sont $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$. L'excentricité vaut $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

La représentation polaire dans un repère centré au foyer est une question de cours !

.

Si $(\vec{u},\vec{v})$ est la base tournante habituelle, le point générique de l'ellipse est $M(\theta) = F + \rho(\theta)\vec{u}$, donc $M'(\theta) = \phi(M(\theta)) = F + \dfrac{R^2}{\rho(\theta)}\vec{u}$. Autrement dit, l'image de l'ellipse est la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{2+\cos\theta}{3}$.
Le tracé n'en est pas demandé, on le trouvera néanmoins ci-dessous.



Question III.9
Pour $\theta \in]-\pi,-\frac{\pi}{2}[\cup]0,\frac{\pi}{2}[$, le point de (H) d'angle polaire θ a pour coordonnées $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)$ et vérifie $xy = \rho^2\cos\theta\sin\theta = 1$ donc $\rho^2 = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$ et $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}$, ce qui est une équation polaire de (H).
Alors le même raisonnement qu'en III.8 montre que la courbe $\phi(H)$ est d'équation polaire

$$\rho = \frac{R^2}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}} = \frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{\sqrt{2}}.$$

On reconnaît la courbe étudiée au II, privée de l'origine, et transformée par l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie IV

Question IV.1
Le point courant P de la droite (SM) est de coordonnées $x = x_0 + t(x_M - x_0)$, $y = ty_M$ et $z = z_0 + t(z_M - z_0)$.

Question IV.2
Notons (X,Y,Z) les coordonnées de M dans le repère d'origine S : $X = x_M - x_0$, $Y = y_M$ et $Z = z_M - z_0$.
Alors P est de coordonnées (tX,tY,tZ).
L'intersection de la droite (SM) avec le plan $z = 0$ ou $Z = -z_0$ doit être sur l'ellipse. Or il s'agit du point P de paramètre $t = -\dfrac{z_0}{z_M - z_0} = -\dfrac{z_0}{Z}$ donc de coordonnées $(\dfrac{x_0Z - Xz_0}{Z}, -\dfrac{Yz_0}{Z}, 0)$. M est sur le cône si et seulement si P est sur l'ellipse. On obtient ainsi une équation du cône :
$\dfrac{(\frac{x_0Z-Xz_0}{Z})^2}{4} + (\dfrac{Yz_0}{Z})^2 = 1$ ou encore, en simplifiant, $\dfrac{(x_0Z - z_0X)^2}{4} + z_0^2Y^2 - Z^2 = 0$.

Question IV.3
En développant l'équation du cône trouvée précédemment, on vérifie que A est la matrice de la forme quadratique associée.

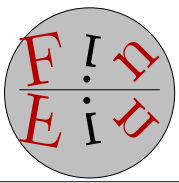
IV.3.a Son polynôme caractéristique est $\chi_A = (z_0^2 - X)\left(X^2 - \dfrac{x_0^2+z_0^2-4}{4}X - \dfrac{z_0^2}{4}\right)$.

IV.3.b A est symétrique donc diagonalise dans une base orthonormée.

IV.3.c Le discriminant de P vaut $\Delta = 4z_0^2 + \dfrac{(x_0^2+z_0^2-4)^2}{16} \geqslant 4z_0^2 > 0$ car on a supposé $z_0 \neq 0$.

IV.3.d $\chi_A(X) = (z_0^2 - X)P(X)$. Comme P n'a pas de racine double, pour que χ_A admette une racine double, il est nécessaire que ce soit z_0^2, et donc que z_0^2 soit racine de P.

Question IV.4
Comme $P(z_0^2) = \dfrac{z_0^2}{4}(3 - x_0^2 + 3z_0^2)$, et qu'on a supposé $z_0 \neq 0$, le cône est de révolution si et seulement si $x_0^2 - 3z_0^2 = 3$, c'est-à-dire si et seulement si S se trouve sur l'hyperbole du plan (xOz) d'équation $\dfrac{x^2}{3} - z^2 = 1$.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°16

Intégration

MP-CPGE Rabat

Source : CNC, 2006, Math 1, MP

Blague du jour

- Un prof à ses élèves : Qu'attendez-vous le plus du cours de math ?
Réponse unanime : LA FIN !
- Ah bon, alors taisez-vous sinon je commence le cours !

John Wallis (1616-1703

Mathématicien du jour

Mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Étudiant d'abord la théologie, il est ordonné en 1640. Il se réoriente ensuite vers les mathématiques et montre un grand talent pour la cryptographie durant la guerre civile, en décryptant les messages des royalistes. Il occupe ensuite la chaire savilienne de géométrie à l'université d'Oxford, succédant à Peter Turner, renvoyé car royaliste. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society.

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications **continues** de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et E_2 le sous ensemble de E formé des applications **de carrés intégrables sur** $\mathbb{R}^+$.

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et } \forall\, x > 0,\ \psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Si Φ est un endomorphisme de E, on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de Φ s'il existe $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$; dans ce cas, on dit que f est un vecteur propre de Φ associé à λ et $\mathrm{Ker}\,(\Phi - \lambda id_E)$ s'appelle alors le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ.

Première partie

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite, on pose $\quad I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,dt.$

1-2. Montrer que $I(a,b) = -I(b,a)$ et que $I(a,b) = I(1, b/a)$.

.

1-3. On note φ l'application définie, pour tout $x \geqslant 1$, par $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-} - e^{-}}{t}\, dt$.

1-3-1. Montrer que φ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

1-3-2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \geqslant 1$.

1-3-3. Que vaut alors $\varphi(x)$ pour $x \geqslant 1$?

1-4. En déduire soigneusement la valeur de l'intégrale $I(a, b)$ en fonction de a et b.

2. 2-1. Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

2-2. Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

2-3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

2-4. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt = \frac{\pi^2}{12}$.

Deuxième partie

1. Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt\ .$$

1-1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E.

1-2. On suppose que la fonction f tend vers une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$; montrer qu'il en est de même de la fonction $\psi(f)$. Étudier la réciproque.

1-3. Que peut-on dire dans le cas où cette limite est égale à $+\infty$?

1-4. On pose $h(x) = xf(x), \quad x \geqslant 0$.

1-4-1. Montrer que $g - \psi(g) = \psi(h)$.

1-4-2. En déduire que si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\psi(h)$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Étudier la réciproque.

1-5. Montrer que si f est positive alors, $0 \leqslant \psi(\sqrt{f}) \leqslant \sqrt{\psi(f)}$; dans quel cas y'a t-il égalité ?

2. 2-1. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

2-2. Montrer que ψ est injectif.

2-3. L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?

3. Soit λ un réel non nul.

3-1. Déterminer les applications f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall\, x > 0, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0.$$

3-2. Pour quelles valeurs du réel λ ces fonctions sont-elles prolongeables à droite en 0 ?

4. 4-1. Est-ce que 0 est valeur propre de ψ ?

4-2. Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre μ alors f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

4-3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ψ et préciser pour chacune d'elles le sous-espace propre associé.

.

Troisième partie

1. 1-1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2, leur produit fg est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

   1-2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

   1-3. Montrer que l'application $(f,g) \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt$ est un produit scalaire sur E_2.

   Dans la suite, ce produit scalaire se notera $(.|.)$ et $\|.\|$ désignera la norme associée.

2. Soit f un élément de E_2 ; on note toujours g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall\, x \geqslant 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

   2-1. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t}$.

   2-2. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \longmapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\,dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}\,dt = -b\psi(f)^2(b) + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)\,dt. \qquad (1)$$

   2-3. En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t)\,dt \leqslant 2\left(\int_0^b f^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^b \psi(f)^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

   2-4. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leqslant 2\|f\|$.

   2-5. On note ψ_2 l'endomorphisme induit par ψ sur E_2. Que peut-on alors dire de ψ_2 en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel normé $(E_2, \|.\|)$?

3. Soit f un élément de E_2.

   3-1. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \longmapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

   3-2. Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

4. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$ et montrer que f est la fonction nulle.

Quatrième partie

1. On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = e^{-ax},\ x \geqslant 0$.

   1-1. Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

   1-2. Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\dfrac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \geqslant 0$.

   2-1. Calculer $\psi(f)(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.

   2-2. Vérifier que $f \in E_2$ et montrer que $(f|\psi(f)) = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right)dt$.

   2-3. Trouver une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$ puis calculer $\dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$.

3. Montrer plus généralement que si $f \in E_2$ est positive, décroissante et non nulle, alors

$$\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} > \sqrt{2}.$$

4. 4-1. Montrer que l'application $f \longmapsto \dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue sur $E_2 \setminus \{0\}$.

   4-2. En déduire que $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \ ; \ f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5. Dans cette question, on va montrer ces deux ensembles coïncident.

   5-1. Pour tout $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$ on note f_s la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_s(0) = 0, \ f_s(t) = t^s \quad \text{si } t \geqslant 1 \ , \text{ et } f_s \text{ affine sur } [0, 1].$$

   5-1-1. Vérifier que $f_s \in E_2$ et calculer $\|f_s\|^2$ en fonction de s puis en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-2. Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ en fonction de s et en donner un un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

   5-1-3. En déduire que la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \ ; \ f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ vaut 2.

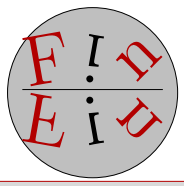
   5-2. Soit $\alpha > 0$; on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = t^\alpha \quad \text{si } t \in [0, 1], \ \text{ et } f(t) = t^{-\alpha-1} \quad \text{si } t \in [1, +\infty[.$$

   5-2-1. Vérifier que $f \in E_2$ et calculer $\|f\|^2$ en fonction de α.

   5-2-2. Calculer $\|\psi(f)\|^2$ en fonction de α et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

   5-2-3. En déduire que la borne inférieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \ ; \ f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est nulle.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

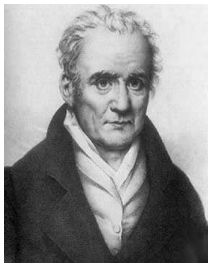
Corrigé Devoir Libre n°16 (Pr Mamouni)

Intégration

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un élève jette un avion en papier qui tombe a coté du prof. Celui-ci le ramasse et se retourne
Tu es nul en maths et tu ne sais même pas faire un avion en papier ! Donne-moi une feuille, je vais t'apprendre au moins une chose dans l'année...



Gaspard Monge (1746-1818)

Mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, tant du point de vue politique que du point de vue de l'instauration d'un nouveau système éducatif : il participe à la création de l'École normale, de l'École polytechnique de l'École d'arts et métiers.

Mathématicien du jour

Première partie

1 **a** Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1 + t + o(t)$, donc $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = b - a + o(1) \sim b - a$ intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\dfrac{1}{t}\right)$, donc $\dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

b $I(a,b) = -I(b,a)$, trés évident.

Posons : $u = ta$, donc :

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du = I\left(1, \frac{b}{a}\right).$$

c

i L'application : $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[\times \mathbb{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions continue, qui ne s'annule pas. En $(x,0)$ on a : $f(x,t) \sim x - 1$ continue, donc f est continue sur $[1,+\infty[\times \mathbb{R}$.

D'autre part : pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a :

$\left|\dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\right| = \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \leqslant \dfrac{e^{-t} - e^{-bt}}{t}$ qui est continue, intégrable sur $]0,+\infty[$, donc φ est continue sur $[1,+\infty[$.

ii Pour $x \in [a,b] \subset [1,+\infty[$ on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-at}$ continue, intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, avec $\varphi'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

iii D'aés le raisonnement fait dans la question précédente, on a : $\varphi'(x) = \dfrac{1}{x}$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K = 0$ et donc $\varphi(x) = \ln x$.

d Si $b \geqslant a$, alors $x = \frac{b}{a} \geqslant 1$, donc $I(a,b) = I(1,\frac{b}{a}) = \varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Si $b \leqslant a$, alors $x = \frac{a}{b} \geqslant 1$, donc :

$I(a,b) = -I(b,a) = -I(1,\frac{a}{b}) = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Conclusion : $I(a,b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

2 a Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t) = t + o(t)$, d'où $\frac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1]$.

b Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est égal à 1, dont la somme est $\frac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c Pour $x \in [0,1]$ fixé, on vérifie facilement que la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en particulier la majoration du reste par son 1ér terme, donc $\left|\sum_{k\geqslant n}\frac{(-1)^k}{k+1}x^k\right| \leqslant \left|\frac{(-1)^n}{n+1}x^n\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément vers 0, et par suite la convergence de la série sur $[0,1]$ est uniforme.

d
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt \quad \text{D'aprés 2.2}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1}t^n dt\\
&\quad \text{Car la convergence est uniforme sur [0,1]}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}\\
&\quad \text{On divise la somme en deux } n = 2p, n = 2p+1\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}\\
&\quad \text{Car } \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+2)^2}\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\
&\quad \text{Car } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\\
&= \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

1 a g est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive de f qui est continue.

On a $\psi(f)(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissement finie, donc $g(x) - g(0) = xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x, d'où $\psi(f)(x) = f(c) \longrightarrow f(0) = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, autrement dit $\psi(f) \in E$.

b $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lambda \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0$ tel que $|f(t) - \lambda| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \geqslant A$, donc pour $x \geqslant A$ on a :

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \lambda| &= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \lambda x\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x \lambda\,dt\right| \\
&= \frac{1}{x}\left|\int_0^x (f(t) - \lambda)\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x |f(t) - \lambda|\,dt \\
&= \frac{1}{x}\int_0^A |f(t) - \lambda|\,dt + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t) - \lambda|\,dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A |f(t) - \lambda|\,dt \\
&\leqslant \frac{K}{x} + \frac{1}{x}\int_x^A \frac{\varepsilon}{2}\,dt \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x}\frac{\varepsilon}{2} \\
&\leqslant \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{x - A}{x} \leqslant 1 \\
&\leqslant \varepsilon \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} = 0
\end{aligned}$$

La réciproque est fausse, prenons pour contre-exemple la fonction $f(t) = \cos t$, on a : $\psi(f)(x) = \dfrac{\sin x}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$, alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas.

c $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty \Longrightarrow \forall B > 0,\ \exists A > 0$ tel que $f(t) \geqslant \dfrac{B}{2} \quad \forall t \geqslant A$, donc

$$\begin{aligned}
\varphi(f)(x) &= \frac{1}{x}\left(\int_0^A f(t)\,dt + \int_A^x f(t)\,dt\right) \\
&\geqslant \frac{1}{x}\left(K + \frac{B}{2}(x - A)\right) \\
&= \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x}\frac{B}{2} \\
&\geqslant B \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x}\frac{B}{2} = \frac{B}{2}
\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(f)(x) = +\infty$.

d

i Dans $\psi(h)$ on va utiliser une intégration par partie, en posant $u = x, v' = f$, donc $u' = 1, v = g$, d'où :

$$\begin{aligned}
\psi(h)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x tf(t)\,dt &&= \frac{1}{x}\left([tg(t)]_0^x - \int_0^x g(t)\,dt\right) \\
&= g(x) - \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,dt &&= g(x) - \psi(g)(x)
\end{aligned}$$

ii f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'aprés la question 1.2) $\psi(h)$ admet aussi la même limite en $+\infty$, or $\psi(h) = g - \psi(g)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(h)(x) = 0$.

La réciproque n'est pas toujours vraie, prenons pour contre-exemple $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$, non intégrable au voisinage de 0, car $\dfrac{e^{-x}}{x} \sim \dfrac{1}{x}$, alors que $\psi(h)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t}dt = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \longrightarrow 0$, quand $x \longrightarrow +\infty$.

e $\sqrt{f} \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \geqslant 0$.

D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura :

$$\frac{1}{x}\int_0^x \sqrt{f(t)}dt \leqslant \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x dt}\sqrt{\int_0^x f(t)dt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt} = \sqrt{\psi(f)}$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

2 a Il est clair que $\psi(f+\lambda g) = \psi(f) + \lambda\psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
D'autre part d'aprés 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E.

b $f \in \text{Ker}(\psi) \Longrightarrow \psi(f)(x) = 0,\ \forall x > 0$

$\Longrightarrow g(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,\ \forall x > 0$

$\Longrightarrow g'(x) = f(x) = 0,\ \forall x \geqslant 0$

Donc ψ est injective.

c D'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x-1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, car non dérivable en 1.

3 a Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1ér ordre à coéfficients non constant, dont la solution est :

$f(x) = Ke^{-\int_0^x \frac{\lambda-1}{\lambda}tdt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda}\ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

b f est prolongeable en 0^+si et seulement si $\lim_{x\to} f(x)$ est finie si et seulement si $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geqslant 0$si et seulement si $0 < \lambda \leqslant 1$.

4 a 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injective.

b Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \frac{1}{\mu}\psi(f)$ car $\mu \neq 0$ d'aprés 4.1). De plus d'aprés 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc f aussi.

c Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$, d'où $\int_0^x f(t)dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité on obtient : $\lambda x f'(x) + (\lambda-1)f(x) = 0$, dont les solutions sont :
$f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0,+\infty[$ pour tout $\lambda \in]0,1]$.

Troisième partie

1 a Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^+$, on a d'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_a^b g^2(t)dt}$$

$$\leqslant M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)dt}$$

Donc fg est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

b Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2, d'autre part, soit $(f,g) \in E_2, \lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$(f+\lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f+\lambda g \in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E.

c

– Symétrie : $(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g,f)$.

– Bilinéarité : $(f+\lambda g, h) = (f,h) + \lambda(g,h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.

– Positive : $(f,f) = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geqslant 0$.

– Définie : $(f,f) = 0 \Longrightarrow \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \Longrightarrow f^2 = 0$, car f^2 continue positive, donc $f = 0$.

2 a $\dfrac{g^2(t)}{t} = g(t)\psi(f)(t) \longrightarrow g(0)\psi(f)(0) = 0$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbb{R}^+$ et $g(0) = 0$.

b $\dfrac{g^2(t)}{t^2} = (\psi(f)(t))^2 \longrightarrow (\psi(f)(0))^2$, quand $t \longrightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc $t \mapsto \dfrac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0,b]$ car prolongeable par continuité en 0^+.

D'autre part : $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \dfrac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u = g^2(t), v' = \dfrac{1}{t^2}$, donc $u' = 2g'(t)g(t)$ et $v = -\dfrac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t}\right]_0^b + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &\quad \text{car : } \lim_{t\to 0^+} \frac{g^2(t)}{t} = 0 \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\ &\quad \text{car : } g'(t) = f(t), \frac{g(t)}{t} = \psi(f)(t)\end{aligned}$$

c $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt \leqslant 2\int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt$ D'aprés (1) ,

$\leqslant 2\sqrt{\int_0^b f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt}$

D'aprés l'inégalité de Cauchy-Shwarz.

Si $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

d Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.

e D'aprés 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipschitzienne, donc continue.

3 a

b Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

4
$$\begin{aligned}||\psi(f) - 2f||^2 &= (\psi(f) - 2f, \psi(f) - 2f) \\ &= (\psi(f), \psi(f)) - 4(\psi(f), f) + 4(f,f) \\ &= ||\psi(f)||^2 - 4(\psi(f), f) + 4||f||^2 \\ &= -4(\psi(f), f) + 8||f||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)|| = 2||f|| \\ &= -4(\psi(f), f) + 2||\psi(f)||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)|| = 2||f|| \\ &= 0 \quad \text{D'aprés 3-2)}\end{aligned}$$

Donc $\psi(f) - 2f = 0$, ainsi si $f \neq 0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ, impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda \in]0,1]$.

1 a $f_a^2(x) = e^{-2ax}$ est évidement intégrable sur $\mathbb{R}^+$, avec :

$$\|f_a\|^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2ax}dx = \frac{1}{2a}.$$

b Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-at}dt = \frac{1-e^{-ax}}{ax}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f_a)(0) = f_a(0) = 1$.

$$\begin{aligned}(f_a, \psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty} f_a(x)\psi(f_a)(x)dx\\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-2ax}}{x}dx\\ &= \frac{1}{a}I(a,2a)\\ &= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'aprés 1-4 de la 1ère partie}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}\right)^2 &= 2a(\psi(f_a), \psi(f_a) \quad \text{D'aprés 1-1}\\ &= 4a(f_a, \psi(f_a)) \quad \text{D'aprés 3-2, 3ème partie}\\ &= 4\ln a\end{aligned}$$

D'où : $\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|} = 2\sqrt{\ln a}$.

2 a Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b Au voisinage de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \frac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned}(f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t)\psi(f)(t)dt\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt\\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt\\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)}dt + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u}du \qquad \text{Avec : } u = \frac{1}{t}\\ &= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t}\right)dt \quad \text{On remplace u par t}\\ &= \int_0^1 \frac{(1+t)\ln(1+t) - t\ln t}{t(1+t)}dt\\ &= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t}\right)dt\end{aligned}$$

c $(\ln t \ln(1+t))' = \dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t \ln(1+t)$ est une primitive de $\dfrac{\ln(1+t)}{t} + \dfrac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$, en effet :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}dt = [\ln t \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Intégration par parties avec :

$u = \ln(1+t)$ $\quad v' = \dfrac{1}{t}$

$u' = \dfrac{1}{1+t}$ $\quad v = \ln t$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt$$

Car au voisinage de 0^+ : $\ln t \ln(1+t) \sim t \ln t \longrightarrow 0$

3

4

a les application $f \mapsto \|f\|$ et $f \mapsto \psi(f)$ sont continue, or $f \neq 0$, donc l'application $f \mapsto \dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue en tant que composée et rapport d'applications continues.

b $\left\{\dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \text{ tel que } f \in E_2 - 0\right\}$ est un connexe dans $\mathbb{R}$ en tant qu'image d'un connexe par une application continue, d'autre part : $0 < \dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} < 2$, puisque $\psi(f)$ est injective et d'aprés la question 2-4) 3ème partie, donc c'est un intervalle contenu dans $]0,2[$.

5

a

i L'application f est définie ainsi :

$f(t) = t^s$ si : $0 \leqslant t \leqslant a$

$= -a^s(t-a-1)$ si : $a \leqslant t \leqslant a+1$

$= 0$ si : $t \geqslant a+1$

f^2 est intégrable car son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ est égale à celui sur $[0, a+1]$, avec :

$$\|f\|^2 = \int_0^a t^{2s}dt - a^{2s}\int_a^{a+1}(t-a-1)^2dt = \frac{a^{2s+1}}{2s+1} - \frac{a^{2s}}{3} \sim \frac{a^{2s+1}}{2s+1}$$

ii D'abord pour $0 \leqslant x \leqslant a$, on a :

$\psi(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^s dt = \frac{x^s}{s+1}$, car :

$2s+1 > 0 \Longrightarrow s > -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow s+1 > 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^{s+1} = 0$.

D'autre part :

$$\|\psi(f)\|^2 = \int_0^{+\infty}\psi(f)^2(x)dx \geqslant \int_0^a \psi(f)^2(x)dx = \int_0^a \frac{x^{2s}}{(s+1)^2}dx = \frac{a^{2s+1}}{(s+1)^2(2s+1)} = \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)}\cdot\frac{1}{2(s+1)} \geqslant \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)}$$

car $2(s+1) = 2s+2 > 1$.

iii D'aprés les deux questions précèdentes, en faisant tendre a vers $+\infty$, on aura : $\sup\left(\dfrac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2}\right) \geqslant \dfrac{2}{s+1}$ $\forall s \in \mathbb{R}$ tel que $2s+1 > 0$, donc pour $s \geqslant -\dfrac{1}{2}$, en faisant tendre s vers $-\dfrac{1}{2}$, on obtient : $\sup\left(\dfrac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2}\right) \geqslant 4$, d'où : $\sup\left(\dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\right) \geqslant 2$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\sup\left(\dfrac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\right) \leqslant 2$, d'où l'égalité.

6 a Au voisinage de $+\infty$ on a : $f^2(t)=\frac{1}{t^{2\alpha+2}}$ est bien intégrable car $2\alpha+2>1$, avec :

$$\begin{aligned}\|f\|^2 &= \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = \int_0^1 t^{2\alpha}dt + \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2\alpha+2}}dt\\ &= \frac{1}{2\alpha+1}+\frac{1}{2\alpha+1}=\frac{2}{2\alpha+1}\end{aligned}$$

b Déterminons d'abord $\psi(f)(x)$ pour $x\geqslant 0$.

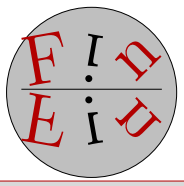
1ér cas : $0\leqslant x\leqslant 1$, alors :

$$\psi(f)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^x t^\alpha dt=\frac{x^\alpha}{\alpha+1}.$$

2ème cas : $x\geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned}\psi(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{x}\left(\int_0^1 f(t)dt+\int_1^x f(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(\int_0^1 t^\alpha dt+\int_1^x\frac{1}{t^{\alpha+1}}dt\right)\\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{x^\alpha}-1\right)\right)\\ &= \frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)}-\frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}\\ \|\psi(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty}\psi(f)^2(x)dx\\ &= \int_0^1\frac{x^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2}dx+\int_1^{+\infty}\left(\frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)}-\frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}}\right)^2dx\\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2}+\frac{(2\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2}-\frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2}\\ &\quad+\frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)}\\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2}+\frac{4\alpha^2-1}{\alpha^2(\alpha+1)^2}+\frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)}\\ &\sim_{+\infty}\frac{4}{\alpha^2}\end{aligned}$$

c D'aprés les deux questions précèdentes, on aura : $\inf\left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2}\right)\leqslant\frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2}$ pour $\alpha>0$ assez grand, quand $\alpha\longrightarrow+\infty$, on obtient $\inf\left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2}\right)\leqslant 0$, or d'aprés la question 4.2) on a : $\inf\left(\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}\right)\geqslant 0$, d'où l'égalité.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°17 (e3a PSI - 2009)

Règle de Raabe-Duhamel

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
- L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augment dernièrement.

Joseph Ludwig Raabe (1801-1859

Mathématicien suisse, ses parents étant assez pauvres, Raabe a dû gagner sa vie très tôt en donnant des cours particuliers. Il est principalement connu pour la règle de Raabe-Duhamel, une extension de la règle de d'Alembert permettant de déterminer la nature d'une série.

Mathématicien du jour

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels et n et n_0 sont des entiers naturels.
Cet exercice comporte deux parties. Dans la première partie, on établit un résultat général appelé : Règle de Raabe-Duhamel. Dans la deuxième partie on applique, sans omettre les justifications nécessaires, ce résultat à l'étude de plusieurs séries particulières. Soit (α_n) une suite réelle. On rappelle que la relation $\alpha = o\left(\frac{1}{n}\right)$ signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 0$.

1 Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe un réel λ vérifiant :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

1. Prouver que si $\lambda < 0$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

2. Soit β un réel quelconque et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ où μ est un réel, indépendant de n, à déterminer.

3. On suppose que $\lambda > 1$. On se propose de démontrer que la série $\sum u_n$ converge. On choisit β tel que $\lambda > \beta > 1$.
   a. Justifier l'existence d'un entier naturel N tel que, pour $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$.
   b. Déterminer un réel positif K, indépendant de n, tel que pour $n \geq N$, on ait $u_n \leq Kv_n$.
   c. Prouver que lé série $\sum u_n$ converge.

4 On suppose que $0 \leq \lambda < 1$. Démontrer par un raisonnement analogue à celui fait à la question précédente que la série $\sum u_n$ diverge (on choisira β de manière à ce que la série $\sum v_n$ diverge et que ceci implique la divergence de la série $\sum u_n$).

5 Pour $n \geq 2$, on pose $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $y_n = \dfrac{1}{\ln(n)^2}$. Déterminer la nature des séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ et en déduire que le cas $\lambda = 1$ est un cas douteux de la règle de Raabe-Duhamel.

2 Partie B : Applications

Les trois questions qui suivent sont indépendantes les unes des autres et sont des applications directes ou partielles de la règle de Raabe-Duhamel.

1 Pour $n \geq 2$, on pose $w_n = \sqrt{(n-1)!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$. Déterminer la nature de la série $\sum w_n$.

2 Pour $n \geq 1$, on considère l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^4+1)^n}$.

a Montrer que cette intégrale généralisée converge. On note I_n sa valeur.

b Etablir que $I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$.

c En déduire la nature de la série $\sum I_n$.

3 Soit α un réel donné n'appartenant pas à l'ensemble des entiers naturels. On pose

$$a_0 = 1 \ ; \ \forall n \geq 1, \ a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} \ ; \ S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

a Etudier la convergence de la série $\sum a_n x^n$, puis donner la valeur de sa somme $S(x)$.

b Utiliser la règle de Raabe-Duhamel pour montrer que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

c Montrer que si $\alpha > 0$, S est continue sur $[-R, R]$ et établir que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 2^\alpha \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = 0$$

d Montrer que si $\alpha < -1$, la série $\sum a_n$ diverge.

e On suppose que $-1 < \alpha < 0$.

i Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$.

ii Montrer que la série $\sum a_n$ converge.

iii Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°17 (Pr Devulder)

Règle de Raabe-Duhamel

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :
- L'utilisation de drogue et d'Internet Explorer ont dramatiquement augment dernièrement.
- Les deux vous explosent le système de temps en temps.
- Billy, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.

Jean-Marie Constant Duhamel (1797-1872

Mathématicien et physicien français, il est l'auteur de travaux sur les équations aux dérivées partielles, sur l'acoustique et la propagation de la chaleur. Le principe de Duhamel dans les équations aux dérivées partielles est né de ses travaux sur la distribution de la chaleur dans un solide avec une température variable.
Reçu une première fois à l'École polytechnique, préfère se présenter de nouveau pour être mieux classé. Il fût reçu une seconde fois, mais licencié à cause de ses opinions libérales. Il devient alors répétiteur puis directeur des études au collège et enfin professeur au lycée Louis-le-Grand puis professeur à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences de Paris et membre de l'Académie des sciences

Mathématicien du jour

1 Partie A : règle de Raabe-Duhamel.

1 Si $\lambda < 0$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1^+$ et la règle de D'Alembert s'applique à la série positive $\sum(u_n)$ pour donner sa divergence (à partir d'un certain rang, $u_{n+1}/u_n \geq 1$ et il existe donc un rang n_0 tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq u_{n_0} > 0$ et on a même divergence grossière de la série).

2 On a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} = 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et ainsi

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta-\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

3 a) Comme $\beta - \lambda < 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ tend vers 0^- et est asymptotiquement négatif. Ainsi

$$\exists N/\ \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

b Ce qui précède s'écrite $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n}$ et une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq N,\ u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

c Comme $\sum v$ converge (car $\beta > 1$), il en est de même de $\sum (K v_n)$. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la convergence de $\sum (u_n)$.

4 Si $\lambda \in [0,1[$, on peut choisir $\beta \in]\lambda, 1[$. On a alors

$$\exists N / \forall n \geq N,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

et une récurrence immédiate donne

$$\forall n \geq N,\ u_n \geq \frac{u_N}{v_N} v_n = K v_n$$

Comme $K \neq 0$ et $\sum v$ diverge (car $\beta < 1$), $\sum (K v_n)$ diverge. Par théorème de comparaison sur les séries positives, on a donc aussi la divergence de $\sum (u_n)$.

5 $\sum (x_n)$ est une série de Riemann divergente et $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Une comparaison série intégrale donne (grâce à la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t)^2}$ sur $]1, +\infty[$)

$$\forall n \geq 3,\ \sum_{k=3}^{n} y_k \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^n \leq \frac{1}{\ln(2)}$$

$\sum (y_n)$ est ainsi convergente (les sommes partielles forment une suite croissante et, on vient de le voir, majorée ; la suite des sommes partielles converge donc). De plus $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + o(1/n)$ donne

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-2} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On peut ainsi être dans le cas $\lambda = 1$ avec convergence ou divergence de la série (on a bien un contre-exemple puisque les séries proposées sont à termes > 0).

2 Partie B : Applications

1 On a

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Comme (w_n) est à terme strictement positifs, on est dans le cas précédent avec $\lambda = \frac{1}{6} < 1$ et $\sum (w_n)$ diverge.

2 a $t \mapsto \frac{1}{(t^4+1)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $1/t^{4n}$ au voisinage de $+\infty$ et donc intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison aux fonctions de Riemann ($4n \geq 4 > 1$). La fonction est donc intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale I_n sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

b Une intégration par paties donne

$$\begin{aligned}\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} &= \left[\frac{t}{(1+t^4)^n}\right]_0^b + 4n\int_0^b \frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\,dt \\ &= \frac{b}{(1+b^4)^n} + 4n\left(\int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^n} - \int_0^b \frac{dt}{(1+t^4)^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

Les différents termes admettent une limite quand $b \to +\infty$ et ce passage à la limite donne

$$I_n = 4n(I_n - I_{n+1})$$

c On a ainsi $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{4n}$. Comme $\sum(I_n)$ est une séries à termes > 0, on est dans le cas de la partie **A** avec $\lambda = 1/4 < 1$ et $\sum(I_n)$ diverge.

3 a On reconnaît les coefficients du développement de $S(x) = (1+x)^\alpha$. Le rayon de convergence de la série vaut 1 (on pourrait, par exemple, utiliser la règle de D'Alembert pour le voir).

b α n'étant pas un entier naturel, les a_k sont tous non nuls. On a

$$\forall n \geq \alpha,\ \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n-\alpha}{n+1} = \left(1-\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1} = 1 - \frac{\alpha+1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On est dans le cadre de la partie **A** (suite à termes > 0) avec $\lambda = \alpha + 1$. Ici, α n'est pas entier naturel et donc $\alpha + 1 \neq 1$. Comme il y a convergence de $\sum(a_n)$ pour $\alpha + 1 < 1$ et divergence si $\alpha + 1 > 1$, il y a donc convergence si et seulement si $\alpha > 0$.

c On a

$$\forall x \in [-1,1],\ |a_n x^n| \leq |a_n|$$

On est dans le cas ($\alpha > 0$) où le majorant est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum(a_n x^n)$ converge normalement sur $[-1,1]$. Comme c'est une série de fonctions continues, la somme S est continue sur $[-1,1]$. On a ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x\to (-1)^+} S(x) = \lim_{x\to (-1)^+} (1+x)^\alpha = 0$$

d On suppose $\alpha < -1$. On est dans le cadre de **A.1** pour $\sum(|a_n|)$. On y a vu qu'il y a avit divergence grossière. $(|a_n|)$ n'étant pas de limite nulle, il en est de même de (a_n) et $\sum(a_n)$ diverge grossièrement elle aussi.

e On a

$$\ln(|a_n|) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{|\alpha - k|}{k+1}\right)$$

Or, on remarque que (pour $k \geq 1$)

$$\ln\left(\frac{k-\alpha}{k+1}\right) = \ln\ln\left(1 - \frac{\alpha+1}{k+1}\right) \sim -\frac{\alpha+1}{k+1}$$

C'est le terme général d'une série divergente négative dont les sommes partielles tendent donc vers $-\infty$. Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(|a_n|) = -\infty$$

Ceci montre que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

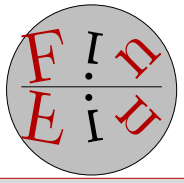
Mais d'après **3.b**, $(|a_n|)$ décroît à partir d'un certian rang (le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ tendant vers 1^-) et la suite (a_n) est alternée (on passe de a_n à a_{n+1} en multipliant par un nombre négatif). La règle spéciale s'applique et indique que $\sum(a_n)$ converge.

Si $x \in [0,1]$, on peut de même appliquer la règle spéciale pour prouver la convergence de $\sum(a_n x^n)$ et obtenir

$$\forall x \in [0,1],\ \left|\sum_{k\geq n} a_k x^k\right| \leq |a_n x^n| \leq |a_n|$$

Le majorant est indépendant de x et de limite nulle quand $n \to +\infty$. $\sum(a_n x^n)$ est donc uniformément convergente sur $[0,1]$ et S est donc continue sur $[0,1]$. Comme en question **c**, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} S(x) = \lim_{x\to 1^-} (1+x)^\alpha = 2^\alpha$$



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°18 (Concours Centrale, PSI, 2009)

Réorganisation des termes d'une série

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Docteur ! Mon mari vous doit la vie !
Et mes honoraires aussi, madame !
- Docteur j'ai parfois des pertes de mémoire ;
Ca peut se soigner, mais n'oublier pas de payer en sortant.
- Un client revient chez le pharmacien : Votre dentifrice a un goût infect.
Et alors ? De toute façon, vous le recrachez !

Niels Henrik Abel (1802-1829)

Mathématicien norvégien décédé à l'age de à 26 ans. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; en algèbre, sur la résolution des équations. Abel est à l'origine de la notion de nombre algébrique. Un prix de mathématique, de valeur égale à celle du prix Nobel qui n'existe pas en mathématiques, est dédié à son mémoire.

Mathématicien du jour

On rappelle le résultat suivant : toute partie X **non vide** de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément noté $\min X$.
On rappelle les points suivants de Maple :
- La liste contenant l'unique élément a est notée $[a]$.
- Le couple (a,b) sera représenté par la liste $[a,b]$.
- Pour ajouter l'élément x (qui peut être un couple) en queue de la liste L on invoque : `L :=[op(L),x]`

Et pour Mathematica :
- La liste contenant l'unique élément a est notée $\{a\}$.
- Le couple (a,b) sera représenté par la liste $\{a,b\}$.
- Pour ajouter l'élément x (qui peut être un couple) en queue de la liste L on invoque : `L=Append[L,x]`

On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, la série $\sum a_n u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n u_n$.
L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).
Les parties I et II sont indépendantes.
Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

.

Partie I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

.

On se donne un réel x. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$.

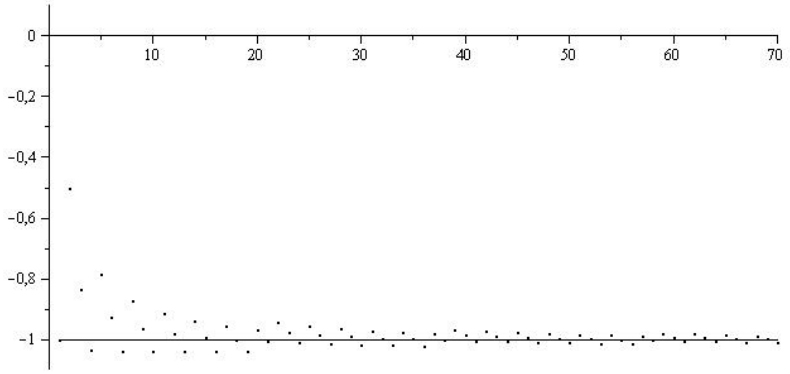
I.A - On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geq 0}$, $(q_n)_{n\geq 0}$, $(s_n)_{n\geq 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geq 0}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$, $S_0 = 0$
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $S_n > x$ alors : $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$
  sinon : $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$
  Dans les deux cas : $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1) Écrire une fonction `suite` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie l'affichage de la liste (ou tableau si l'on préfère) $[s_1, s_2 \ldots, s_n]$.

I.A.2) En modifiant la fonction précédente de façon à ce quelle retourne le dessin simultané de la liste des points de coordonnées $(n, S_n)_{n\leq 70}$ et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour $x = -1$, $n = 70$ le dessin suivant :



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n\geq 0}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I.B - On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s(n) = s_n$. Prouver, pour $n \geq 1$, les propriétés suivantes :

$$\{s(1), s(2), ..., s(n)\} = \{2, 4, ..., 2p_n\} \cup \{[1, 3, ..., 2q_n - 1\}$$
$$p_n + q_n = n$$
$$S_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)}$$

En déduire que s est injective.

I.C -

I.C.1) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser le I.C.1) pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $S_n > x_0$ et $S_n = S_{n_0} - \displaystyle\sum_{k=n}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}$.

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

I.C.3) Justifier rapidement que (q_n) tend vers $+\infty$.

I:C.4) Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur lui-même.

I.D -

I.D.1) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$$

.

I.D.2) En déduire que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que $|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|$

I.D.4) Soit $n \geq n_0$. On note $v_n = \max\left(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|\right)$.
Démontrer que $(v_n)_{n\geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

I.E -

I.E.1) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \to +\infty$.

I.E.2) Donner un développement analogue pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

I.E.3)

a) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, l'égalité : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}$.

b) En déduire que : $\displaystyle S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln 2 + o(1)$.

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

d) Déterminer la limite de : $\dfrac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \cdots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|}$ quand $n \to +\infty$.

Partie II - Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A - Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).

II.B - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.B.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une limite.

II.B.2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge.
On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1})\, U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie (P_2).

II.C - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant (P_1).

II.D - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n\varepsilon_n$ diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$.
- Pour $n \geq 1$: $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} \quad \text{si} \quad A_{n-1} \geq p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} \text{ sinon} \end{cases}$
  Dans tous les cas : $A_n = A_{n-1} + a_n\varepsilon_n$.

II.D.1) Dans cette question seulement on suppose que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{9}{4(n+1)}$.

Déterminer les 6 premiers termes des suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
Écrire une procédure `exemple` qui prend en argument l'entier n et retourne la liste :

- en Maple : $[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], [1, p_1, \varepsilon_1, A_1], \ldots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]]$
- en Mathematica : $\{\{0, p_0, \varepsilon_0, A_0\}, \{1, p_1, \varepsilon_1, A_1\}, \ldots, \{n, p_n, \varepsilon_n, A_n\}\}$

.

II.D.2)

a) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que : $p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde). En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbf{N} \ / \ n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geq 0 \end{cases}$$

b) Dans le cas général, calculer p_{n_k}, ε_{n_k}.

Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ diverge.

c) Déterminer n_1, n_2 et n_3 pour l'exemple de la question III.B.1).

II.D.3) Dans cette question seulement on suppose que : $\forall n \in \mathbf{N},\ a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

a) Écrire une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne :

- en Maple, la liste $[[0, n_0], [1, n_1], \ldots, [q, n_q]]$
- en Mathematica, la liste $\{\{0, n_0\}, \{1, n_1\}, \ldots, \{q, n_q\}\}$

où q est le plus grand des entiers k tel que $n_k \leq n$. Par exemple l'appel de `indexer(10000)` retourne :

$$[[0,0],[1,1],[2,2],[3,51]] \quad (resp.\ \{\{0,0\},\{1,1\},\{2,2\},\{3,51\}\})$$

b) Soit $k \geq 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité : $k - 1 \leq A_{n_k-1} \leq k - 1 + \dfrac{1}{2^{k-1} n_k}$

En déduire que $n_{k+1} - 2 > n_k$.

c) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de k, n_k et n_{k+1}. En déduire, pour $k \geq 3$, l inégalité :

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leq A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leq \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geq 3$, l'inégalité :

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leq \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leq 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$; puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que : $n_k \underset{k\to\infty}{\sim} C \exp\left(2^k\right)$.

en déduire que : $A_{n_k} \underset{k\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$

puis que : $A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln 2}$.

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.

a) Prouver que la série $\sum \varepsilon_n |a_n|$ converge.

b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

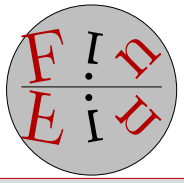
II.F - Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n x_n$.

II.F.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

II.F.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n (a_{n+1} - a_n)$.

II.F.3) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4) Caractériser les suites vérifiant (P_2).



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°18 (Pr Devulder)

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Un élève se lève et va baisser le store, Le prof : T'arrivais pas à dormir ?
- Un prof M. à ses élèves : L'an prochain, quand on vous demandera le nom de votre prof de maths de l'an dernier, ne dites surtout pas que c'était moi.
- Un élève : Pardon monsieur, je ne vois pas bien ce qui est écrit sur le tableau ! Le prof : Désolé, ça fait longtemps que j'essaye de perdre du poids, j'ai toujours pas réussi !

Jean le Rond D'Alembert(1717-1783)

Mathématicien et philosophe français. Il fût abandonné par sa mère, le deuxième jour de sa naissance, devant la porte de la chapelle Saint-Jean-le-Rond.
Il obtint le baccalauréat en arts, puis suivit les cours de l'école de Droit. Refusant de s'inscrire au barreau, il entreprit des études de médecine. Il commence ses premiers travaux scientifiques en astronomie. Ami de Voltaire, il était un habitué des salons parisiens. D'Alembert est considéré comme un théoricien de la musique. Ses études de la vibration des cordes font de lui l'un des fondateurs de la physique mathématiques.
Il est célèbre pour avoir dirigé l'Encyclopédie avec Denis Diderot jusqu'à 1757 et pour ses recherches en mathématiques sur les équations différentielles et les dérivés partielles.

Mathématicien du jour

1 Réorganisation des termes d'une série semi-convergente.

A.1. On suit la définition de l'énoncé.

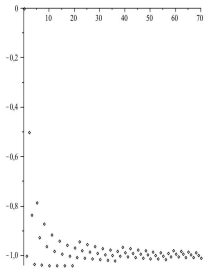
```
suite :=proc(x,n)
local k,p,q,s,S,list ;
p :=0 ;q :=0 ;S :=0 ;list :=[] ;
for k from 1 to n do
   if S>x then q :=q+1 ;s :=2*q-1
   else p :=p+1 ;s :=2*p fi ;
   S :=S+(-1)^s/s  ; print(evalf(S)) ;
   list :=[op(list),s]
   od  ;
list
end  :
```

A.2. Voici, à titre indicatif, une fonction permettant l'affichage des points $(\mathbf{n}, \mathbf{S_n})$.

```
suite2 :=proc(x,n)
local k,p,q,s,S,list ;
p :=0 ;q :=0 ;S :=0 ;list :=[[0,0]] ;
for k from 1 to n do
   if S>x then q :=q+1 ;s :=2*q-1
   else p :=p+1 ;s :=2*p fi ;
```

```
    S :=S+(-1)^s/s  ;
    list :=[op(list),[k,S]]
    od  :
plot(list,style=point) ;
end  :
```

Pour $x = -1$ et $n = 70$, on obtient le dessin suivant :



Ce n'est pas le schéma de l'énoncé ! Celui-ci a été tracé avec une fonction `suite` où le test sur S_n est $S_n \geqslant x$ (et non $S_n > x$). cela ne change rien au principe de l'algorithme. On s'arrange pour choisir les s_n de façon que les S_n "oscillent" autour de x et que $S_n \to x$. Pour ce faire, on choisit le premier indice pair non utilisé si l'on est en-dessous de x (on ajoute alors un terme positif et le premier indice impair sinon (on ajoute alors un terme négatif). Les suites (p_n) et (q_n) permettent de savoir quel est le dernier indice pair ou impair utilisé ($2p_n$ ou $2q_n - 1$).

B. On procède par récurrence sur n.

- Initialement, on a $q_1 = s_1 = 1$, $S_1 = -1$ et $p_1 = 0$ (cas $x < 0$) ou $p_1 = 1$, $s_1 = 2$, $S_1 = 1/2$ et $q_1 = 0$ (cas $x \geqslant 0$). Dans les deux cas, on a la propriété voulue.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n \geqslant 1$. On doit encore distingur deux cas.
  - Si $S_n > x$ alors $q_{n+1} = 1 + q_n$, $p_{n+1} = p_n$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.
  - Si $S_n \leqslant x$ alors $q_{n+1} = q_n$, $p_{n+1} = 1 + p_n$, $s_{n+1} = 2p_{n+1}$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$ et on a les relations voulues.

On en déduit que

$$\operatorname{card}\{s(1), \dots, s(n)\} = p_n + q_n = n$$

ce qui indique que les $s(k)$ sont deux à deux distincts et que s est injective (si $s(a) = s(b)$ avec $a < b$ alors l'ensemble $\{s(1), \dots, s(b)\}$ contient au plus $b - 1$ éléments).

C.1. Soit (m_n) une suite d'entiers qui converge vers une limite ℓ. Par définition des limites (avec $\varepsilon = 1/3 > 0$)

$$\exists\, n_0 / \ \forall n \geqslant n_0,\ |m_n - \ell| \leqslant 1/3$$

Par inégalité triangulaire, on a $|m_n - m_r| \leqslant 2/3$ pour $n, r \geqslant n_0$ et comme on a des termes entiers, $m_r = m_n$ pour $n, r \geqslant n_0$. La suite est donc constante à partir du rang n_0.

C.2.

a. La suite (p_n) est croissante (puisque p_{n+1} est égal à p_n ou à $1 + p_n$). Si elle est majorée, elle converge. Etant composée d'entiers, elle stationne à partir d'un certain rang n_0. Par définition, on a donc pour tout $n \geqslant n_0$, $S_n > x$ et $q_{n+1} = 1 + q_n$ ce qui donne (par récurrence) $q_n = n - n_0 + q_{n_0}$. De plus, pour $n \geqslant n_0$, $s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1 = 2n - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1$. Ainsi,

$$\forall n \geqslant n_0,\ S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_{s_k} = S_{n_0} - \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} - 1}$$

Le changement d'indice $j = k - 1$ donne la formule voulue. La série associée à $\left(\dfrac{1}{2k - 2n_0 + 2q_{n_0} + 1}\right)_{k \geqslant n_0}$ est divergente positive et ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. L'égalité ci-dessus donne alors $S_n \to -\infty$ ce qui contredit $s_n > x$ pour tout $n \geqslant n_0$.

b. La suite (p_n) étant croissante et non majorée, le théorème de limite monotone indique que $p_n \to +\infty$.

C.3. Le raisonnement est identique pour montrer que (q_n) est de limite infinie : c'est une suite croissante ; si elle est majorée alors elle converge et stationne à partir d'un rang n_0 ; pour $n \geqslant n_0$, on a $S_n \leqslant x$ et $S_n \to +\infty$ ce qui est incompatible.

C.4. Comme $0 \leqslant p_{n+1} - p_n \leqslant 1$ et $p_n \to +\infty$, les p_n décrivent tout $\mathbb{N}$. Il en est de même des q_n. Avec l'identité ensembliste de **I.B**, on en déduit que tout entier non nul est atteint par s (et pour un entier non nul car $s(0) = 0$). s est donc surjective de $\mathbb{N}^*$ dans lui même. On a aussi vu l'injectivité et on a donc la bijectivité.

D.1. On distingue deux cas.

- Si $S_n > x$ alors $u_{s_{n+1}} < 0$ car s_{n+1} est impair et

$$u_{s_{n+1}} \leqslant S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leqslant S_n - x$$

- Si $S_n \leqslant x$ alors $u_{s_{n+1}} \geqslant 0$ car s_{n+1} est pair et

$$S_n - x \leqslant S_{n+1} - x = S_n + u_{s_{n+1}} - x \leqslant u_{s_{n+1}}$$

$a \leqslant b \leqslant c$ entraînant $|b| \leqslant \max(|a|, |c|)$, on a donc dans tous les cas

$$|S_{n+1} - x| \leqslant \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|)$$

ce qui correspond à l'alternative demandée.

D.2. Soit N un entier naturel. On ne peut avoir $\forall n > N,\ S_n > x$ (sinon, comme en **C.2.a** on obtient une contradiction) et on ne peut avoir non plus $\forall n > N,\ S_n \leqslant x$ (cette fois comme en **C.2.b**). On peut, par exemple, trouver $n > N$ tel que $S_{n+1} \leqslant x < S_n$ (ou l'inverse). On a alors s_{n+1} impair et $u_{s_{n+1}} < 0$ et $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}} \leqslant x < S_n$. En particulier, $|S_n - x| = S_n - x \leqslant S_n - S_{n+1} = |u_{s_{n+1}}|$.

Remarque : il ne s'agit pas vraiment d'une "déduction" comme demandé.

D.3. Comme (p_n) est de limite infinie, p_n finit par être plus grand que 1 (pour $n \geqslant n_1$). De même, q_n finit par être plus grand que 1 et

$$\forall n \geqslant \max(n_1, n_2),\ p_n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad q_n \geqslant 1$$

D.4. Comme s_{n+1} vaut soit $2p_{n+1}$ soit $2q_{n+1} - 1$, la question **D.1** montre que

$$|S_{n+1} - x| \leqslant \max(|S_n - x|, |u_{s_{n+1}}|) \leqslant \max(|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|) = v_n$$

De plus, la croissance de p_n et q_n ainsi que la décroissance de $|u_n|$ donnent

$$|u_{2p_{n+2}}| \leqslant |u_{2p_{n+1}}| \leqslant v_n \quad \text{et} \quad |u_{2q_{n+2}-1}| \leqslant |u_{2q_{n+1}-1}| \leqslant v_n$$

On en déduit finalement que

$$v_{n+1} = \max(|S_{n+1} - x|, |u_{2p_{n+2}}|, |u_{2q_{n+2}-1}|) \leqslant v_n$$

La suite (v_n) est décroissante et minorée (par 0) et donc converge. Avec **D.2**,

$$\forall N,\ \exists n_N > N / \ 0 \leqslant v_{n_N} \leqslant u_{s(n_N+1)}$$

Quand $N \to +\infty$, $n_N \to +\infty$ et on peut passer à la limite ci-dessus (les termes admettent une limite) et on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$$

D.5. En particulier $0 \leqslant |S_n - x| \leqslant v_n \to 0$ et $S_n \to x$, ce que l'on voulait prouver (on a exhibé une bijection s telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$).

E.1. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim -\frac{1}{2(n+1)^2}$$

$\sum (u_{n+1} - u_n)$ est ainsi absolument convergente et donc aussi convergente. Comme

$$\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1$$

on en déduit que (u_n) converge. En notant γ sa limite, on a alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

E.2. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\ln(2n)-\frac{1}{2}\ln(n)+\frac{\gamma}{2}+o(1)=\frac{1}{2}\ln(n)+\ln(2)+\frac{\gamma}{2}+o(1)$$

E.3.

a. On procède par récurrence sur n.
- Comme en **B**, le résultat est initialement vrai que $x>0$ ou $x\leqslant 0$.
- Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $n\geqslant 1$. Si $S_n>x$ alors on ajoute $u_{2q_{n+1}-1}=-\dfrac{1}{2q_{n+1}-1}$ et $p_{n+1}=p_n$. Sinon, on ajoute $u_{2p_{n+1}}=\dfrac{1}{2p_{n+1}}$ et $q_{n+1}=q_n$. La formule reste donc toujours vraie au rang $n+1$.

b. Comme p_n et q_n tendent vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}(\ln(p_n)+\gamma+o(1))-\left(\frac{1}{2}\ln(q_n)+\ln(2)+\frac{\gamma}{2}+o(1)\right)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{q_n}\right)-\ln(2)+o(1)\\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n-p_n}\right)-\ln(2)+o(1)\end{aligned}$$

c. Comme $S_n\to x$, on a (continuité de exp) $\dfrac{p_n}{n-p_n}\to 4e^{2x}$ c'est à dire $\dfrac{n}{p_n}\to\dfrac{e^{-2x}}{4}+1$ ou encore

$$p_n\sim\frac{4n}{e^{-2x}+4}$$

et de la même façon (en remplaçant p_n par $n-q_n$ dans la formule de la question précédente)

$$q_n\sim\frac{n}{1+4e^{2x}}$$

d. On prouve comme en **a**. que

$$\sum_{k=1}^{n}|u_{s_n}|=\sum_{k=1}^{p_n}\frac{1}{2k}+\sum_{k=1}^{q_n}\frac{1}{2k-1}$$

et, comme en **b**, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n}|u_{s_n}|=\frac{1}{2}\ln(p_nq_n)+\gamma+\ln(2)+o(1)\sim\frac{1}{2}\ln(p_nq_n)$$

Quand $x_n\to+\infty$ et $x_n\sim y_n$ alors $\ln(y_n)=\ln(x_n(1+o(1)))=\ln(x_n)+o(1)\sim\ln(x_n)$. On a donc ici

$$\ln(p_nq_n)\sim\ln\left(\frac{4n^2}{(4+e^{-2x})(1+4e^{2x})}\right)\sim 2\ln(n)$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{s_1}|+\cdots+|u_{s_n}|}{|u_1|+\cdots+|u_n|}=1$$

(numérateur et dénominateur sont tous deux équivalents à $\ln(n)$).

2 Suites vérifiant (P_1) et (P_2).

A. Soit (u_n) une suite bornée et M un majorant des $|u_n|$. On a

$$\forall n,\ |a_nu_n|\leqslant|a_n|$$

La convergence absolue de $\sum(a_n)$ entraîne celle de $\sum(a_nu_n)$ et (P_1) est vérifiée.

B.1. Comme $\mathbb{C}$ est complet, la convergence de $\sum |a_{n+1}-a_n|$ entraîne celle de $\sum (a_{n+1}-a_n)$ ce qui, en revenant aux sommes partielles et grâce à un telescopage, équivaut à la convergence de la suite (a_n).

B.2. En posant $U_{-1}=0$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N} a_n(U_n-U_{n-1}) = \sum_{n=0}^{N} a_n U_n - \sum_{n=0}^{N} a_n U_{n-1}$$

On opère le changement d'indice $k=n-1$ dans la seconde somme et on regroupe les termes de même indice pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k-a_{k+1})U_k + a_0 U_{-1} = a_N U_N + \sum_{k=0}^{N-1} (a_k-a_{k+1})U_k$$

Supposons que $\sum (u_n)$ converge. La suite (U_n) converge donc. Comme elle est bornée et que $\sum (a_n-a_{n+1})$ converge absolument, la question **A** indique que $\sum ((a_n-a_{n+1})U_n)$ converge. De plus, (a_nU_n) est une suite convergente (produit de telles suites). L'égalité prouvée indique alors que $\sum (a_n u_n)$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite). On a prouvé la propriété (P_2) pour la suite (a_n).

C. Posons $u_n = \dfrac{\overline{a_n}}{|a_n|}$ si $a_n \neq 0$ et $u_n = 1$ sinon. On a alors, $a_n u_n = |a_n|$ (on le vérifie quand $|a_n| \neq 0$ et dans l'autre cas). Ainsi, $\sum (a_n u_n)$ diverge et on a (u_n) qui est bornée puisque formée d'éléments de module 1. La suite (a_n) ne vérifie donc pas (P_1).

Finalement, les suites vérifiant (P_1) sont exactement celle dont la série associée converge absolument.

D.1. On applique les définitions de l'énoncé.

```
exemple :=proc(n)
local k,p,e,A,list  ;
p :=0 ;e :=1 ;A :=9/4 ;list :=[[0,p,e,A]] ;
for k from 1 to n do
  if A>=p then p :=1+p ;e :=e/2 fi ;
  A :=A+e*9/(4*(k+1)) ;
  list :=[op(list),[k,p,e,A]]
  od  :
list
end :
```

Les six premiers termes trouvés sont

$$[0,0,1,\frac{9}{4}],\ [1,1,\frac{1}{2},\frac{45}{16}],\ [2,2,\frac{1}{4},3],\ [3,3,\frac{1}{8},\frac{393}{128}],\ [4,4,\frac{1}{16},\frac{1983}{640}],\ [5,4,\frac{1}{16},\frac{999}{320}]$$

D.2.

a. Supposons que la suite (p_n) stationne à partir d'un certain rang N. On a alors (ε_n) qui stationne à partir de ce même rang (quand p n'évolue pas, ε n'évolue pas) et donc

$$\forall n \geqslant N,\ A_n = A_N + \varepsilon_N \sum_{k=N+1}^{n} a_k$$

Comme (a_n) est une suite de réels positifs de série divergente, les sommes partielles de cette série tendent vers $+\infty$. Comme $\varepsilon_N > 0$ (tous les ε_k sont >0 par récurrence), l'identité ci-dessus indique que $A_n \to +\infty$. Il existe donc $k \geqslant N$ tel que $A_k \geqslant p_k = p_N$ et alors $p_{k+1} = 1+p_k \neq p_N$ ce qui est une contradiction.

Ainsi, la suite (p_n) ne stationne pas à partir du rang N et il existe $n > N$ tel que $p_n \neq p_{n-1}$ et donc tel que $p_n = 1+p_{n-1}$.

On peut alors montrer par récurrence que la suite (n_k) de l'énoncé est bien définie puisque si n_k est connu alors $\{n \in \mathbb{N} / \ n > n_k \ \text{ et } \ p_n = 1+p_{n-1}\}$ est un ensemble non vide d'entiers et qu'il contient donc un minimum.

b. Pour $k \geqslant 1$, on a $n_k = \{n \in \mathbb{N} / \ n > n_{k-1} \ \text{ et } \ p_n = 1+p_{n-1}\}$ et donc

$$p_{n_{k-1}} = p_{n_{k-1}} = \cdots = p_{n_k-1} \ \text{ et } \ p_{n_k} = 1+p_{n_{k-1}}$$

d'où l'on déduit que

$$\varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2}\varepsilon_{n_{k-1}}$$

Comme $p_{n_0} = p_0 = 0$ et $\varepsilon_{n_0} = \varepsilon_0 = 1$, on en déduit par récurrence que

$$\forall k,\ p_{n_k} = k \ \text{ et } \ \varepsilon_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

(ε_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. De plus, $(\varepsilon_{n_k})_k$ est une extraite de $(\varepsilon_n)_n$ (la suite des n_k croît strictement) et est de limite nulle. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

De façon similaire, la suite (A_n) des sommes partielles de $\sum(a_n\varepsilon_n)$ est croissante et on a une extraite qui tend vers $+\infty$ ($A_{n_k-1} \geqslant p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k-1 \to +\infty$). On a donc $A_n \to +\infty$ et $\sum(a_n\varepsilon_n)$ qui diverge.

c. Au vu des termes calculés en **II.D.1**, pour la suite envisagée ici, on a

$$n_1 = 1,\ n_2 = 2,\ n_3 = 3$$

puisque $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ et $p_3 = 3$ (on gagne une unité à chacune de ces étapes).

D.3.

a. On gère un indice m tel que le dernier élément ajouté à la liste est $[m, u_{n_m}]$. Par rapport à la fonction `exemple`, on doit gérer l'évolution de m (et la liste construite n'est pas la même).

```
indexer :=proc(n)
local k,p,e,A,list,m ;
p :=0 ;e :=1 ;A :=1 ;list :=[[0,0]] ;m :=0 ;
for k from 1 to n do
  if A>=p then p :=1+p ;e :=e/2 ;m :=m+1 ;list :=[op(list),[m,k]] fi ;
  A :=A+e/(k+1)
  od  :
list
end :
```

b. On a vu plus haut que

$$A_{n_k-1} \geqslant p_{n_k-1} = p_{n_{k-1}} = k-1$$

On a $k-1 = p_{n_{k-1}} = \cdots = p_{n_k-1}$ et $\dfrac{1}{2^{k-1}} = \varepsilon_{n_{k-1}} = \cdots = \varepsilon_{n_k-1}$. Si on suppose que $n_k - 2 > n_{k-1}$ alors $p_{n_k-1} = p_{n_k-2}$, $\varepsilon_{n_k-1} = \varepsilon_{n_k-2}$. Ainsi $A_{n_k-2} \leqslant p_{n_k-1}$ (sinon l'indice p aurait augmenté) et

$$A_{n_k-1} = A_{n_k-2} + a_{n_k-1}\varepsilon_{n_k-1} = A_{n_k-2} + \frac{1}{n_k}\frac{1}{2^{k-1}} \leqslant (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

On en déduit que

$$A_{n_k} = A_{n_k-1} + a_{n_k}\varepsilon_{n_k} \leqslant (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}} + \frac{1}{(1+n_k)2^k}$$

Comme $n_k \geqslant k$ et $k \geqslant 3$, on en déduit que

$$A_{n_k} \leqslant k-1 + \frac{1}{k2^{k-1}} + \frac{1}{(1+k)2^k} \leqslant k-1+\frac{1}{6}+\frac{1}{32} < k = p_{n_k}$$

et on a donc $p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $\varepsilon_{1+n_k} = \varepsilon_{n_k}$ puis

$$A_{1+n_k} = A_{n_k} + a_{1+n_k}\varepsilon_{1+n_k} = A_{n_k} + \frac{1}{(2+n_k)2^{n_k}} \leqslant k-1+\frac{1}{6}+\frac{1}{32}+\frac{1}{40} < k = p_{1+n_k}$$

ce qui donne $p_{2+n_k} = p_{1+n_k} = p_{n_k}$ et $n_{k+1} > 2+n_k$.

c. Par définition,

$$A_{n_{k+1}-1} = A_{n_k-1} + \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} a_j \varepsilon_j$$

Par définition de n_k et n_{k+1}, les ε_j ci-dessus valent tous $\varepsilon_{n_k} = 1/2^k$ et donc

$$A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j}$$

Une comparaison série-intégrale (avec la fonction décroissante $x \mapsto 1/x$) donne

$$\ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) = \int_{1+n_k}^{1+n_{k+1}} \frac{dt}{t} \leqslant \sum_{j=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{1}{1+j} \leqslant \int_{n_k}^{n_{k+1}} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

et on a donc

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) \leqslant A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leqslant \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right)$$

d. Comme $n_3 - 2 = 49 > 2 = n_2$, on montre avec **D.3.b** et une récurrence que

$$\forall k \geqslant 3,\ n_k - 2 > n_{k-1}$$

et on a ainsi

$$\forall k \geqslant 3,\ k-1 \leqslant A_{n_k-1} \leqslant (k-1) + \frac{1}{n_k 2^{k-1}}$$

De l'inégalité de droite, et comme $A_{n_{k+1}-1} \geqslant k$, on déduit que

$$A_{n_k-1} \leqslant \frac{1}{2^{k-1} n_k} + A_{n_{k+1}-1} - 1$$

ce que l'on peut écrire

$$A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \geqslant 1 - \frac{1}{2^{k-1} n_k}$$

Avec la question précédente, on a alors

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \geqslant 2^k (A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) \geqslant 2^k - \frac{2}{n_k}$$

On peut écrire par ailleurs que

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) = \ln\left(\frac{1+n_{k+1}}{1+n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

ce qui nous donne, avec la question précédente,

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leqslant 2^k (A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$$

On utilise alors la question **b** et $k - 1 \leqslant A_{n_k-1}$ pour obtenir

$$A_{n_{k+1}-1} \leqslant k + \frac{1}{2^k n_{k+1}} \leqslant A_{n_{k-1}} + 1 + \frac{1}{2^k n_{k+1}}$$

et on combine les deux dernière ingéalités pour en déduire

$$\ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leqslant 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

e. La nature de la suite de terme général $w_k = \ln(n_k) - 2^k$ est la même que celle de la série de terme général

$$w_{k+1} - w_k = \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) - 2^k$$

La question précédente donne

$$-\frac{2}{n_k} \leqslant w_{k+1} - w_k \leqslant \frac{1}{n_{k+1}} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

ce qui entraîne

$$|w_{k+1} - w_k| \leqslant \frac{2}{n_k} + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$$

$\ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right)$ est le terme général d'une série convergente car la suite de terme général $\ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)$ converge (elle est de limite nulle puisque $n_k \to +\infty$). Ainsi, pour prouver que $\sum(w_{k+1} - w_k)$ converge absolument, il suffit de montrer que $\sum(1/n_k)$ converge. Or, on a évidemment

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \varepsilon_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$$

et donc, pour k suffisamment grand, $k - 1 \leqslant A_{n_k - 1} \leqslant \frac{1}{2}\ln(n_k)$ ou encore

$$\frac{1}{n_k} \leqslant e^{-2(k-1)}$$

ce qui montre que $\sum(1/n_k)$ est une série positive convergente. Finalement, (w_k) est une suite convergente. En notant ℓ la limite de la suite (w_k), la continuité de l'exponentielle donne $e^{w_k} = n_k e^{-2^k} \to e^\ell$ et donc (comme $e^\ell \neq 0$)

$$n_k \sim C e^{2^k} \quad \text{avec} \quad C = e^\ell$$

On a vu plus haut que si $x_n \sim y_n \to +\infty$ alors $\ln(x_n) \sim \ln(y_n)$, on en déduit ici (en utilisant deux fois ce résultat) que

$$\ln(n_k) \sim 2^k \quad \text{et} \quad \ln(\ln(n_k)) \sim k\ln(2)$$

La question **b** donne alors (on a vu que l'inégalité de cette question est valable pour tout $k \geqslant 3$)

$$A_{n_k - 1} \sim k - 1 \sim k \sim \frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$$

Soit n un entier. Il existe un entier k tel que $n_k - 1 \leqslant n \leqslant n_{k+1} - 1$. On remarque que n_k est de limite infinie quand $n \to +\infty$ (k dépend de n et est de limite infinie quand $n \to +\infty$ lui aussi). $\ln(\ln(n_k - 1)) \leqslant \ln(\ln(n)) \leqslant \ln(\ln(n_{k+1}))$ et majorant et minorant équivalent tous deux à $\ln(\ln(n_k))$ (et aussi à $k\ln(2)$). Ainsi $\ln(\ln(n_k)) \sim \ln(\ln(n))$. De plus on a l'encadrement $A_{n_k - 1} \leqslant A_n \leqslant A_{n_{k+1} - 1}$. Majorant et minorant sont tous deux équivalents à k c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n_k))}{\ln(2)}$ c'est à dire à $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(2)}$. On a prouvé que

$$A_n \sim \frac{\ln(\ln(n))}{2}$$

Etant donnée la croissance de la suite (n_k), la fonction `indexer` risque fort de ne pas nous donner beaucoup d'éléments de cette suite !

E.

a. Soit (ε_n) une suite de limite nulle. On pose $\varepsilon'_n = \text{signe}(a_n)\varepsilon_n$. (ε'_n) est une suite de limite nulle et donc $\sum(a_n\varepsilon'_n) = \sum(\varepsilon_n|a_n|)$ converge.

b. Si $\sum|a_n|$ divergeait (par l'absurde), la question **II.D** donnerait une suite (ε_n) de limite nulle telle que $\sum|a_n|\varepsilon_n$ diverge et on obtiendrait une contradiction. Ainsi, $\sum|a_n|$ converge.

F.1. Supposons, par l'absurde, que (a_n) n'est pas bornée. Pour tout M et tout N, il existe un entier $n \geqslant N$ tel que $|a_n| \geqslant M$ (sinon, la suite $(a_n)_{n\geqslant N}$ est bornée et (a_n) l'est donc aussi). On peut ainsi construire par récurrence une suite n_k telle que $|a_{n_0}| \geqslant 1$ et

$$\forall k \geqslant 0,\ n_{k+1} = \min\{n > n_k / \ |a_n| \geqslant 2^{k+1}\}$$

Soit alors (x_n) telle que

$$\forall k,\ x_{n_k} = \frac{1}{2^k}$$

les autre x_n étant nuls. $\sum (x_n)$ converge (la suite des sommes partielles est croissante et majorée par $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$) et

$$\forall k,\ |x_{n_k} a_{n_k}| \geqslant 1$$

ce qui montre que $(x_n a_n)$ n'est pas de limite nulle et entraîne la divergence de $\sum (x_n a_n)$ en donnant une contradiction.

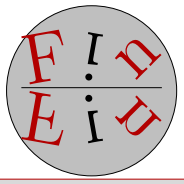
F.2. Par le même calcul qu'en **II.B.2** on a

$$(*)\ :\ \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k + \varepsilon_n a_{n+1} - \varepsilon_0 a_0$$

$\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k$ est le terme général d'une série convergente (puisque (ε_k) converge) et donc $\sum (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k) a_k$ converge. De plus $\varepsilon_n a_{n+1} \to 0$ (produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle). $(*)$ montre alors que $\sum (\varepsilon_n (a_{n+1} - a_n))$ converge (la suite des sommes partielles admet une limite).

F.3. La question **II.E** montre alors que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

F.4. On a prouvé que les suites vérifiant (P_2) sont exactement les suites (a_n) telles que $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°19

Théorèmes de Stone-Weierstrass

MP-CPGE Rabat

Théorème de Stone-Weierstrass 1

Démonstration par les polynômes de Bernstein

Soit E un evn de dimension finie . $C^0([0,1],E)$ est muni de la norme de la convergence uniforme

$$N_\infty(f)=\sup(\|f(t)\|,t\in[0,1])$$

On pose pour tout entiers $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ tels que $0\leq k\leq n$

$$E_{n,k}=X^k(1-X)^{n-k}$$

(Polynômes de BERNSTEIN : ils ont étés introduits par le mathématicien Bernstein au début du 20^{ieme}siècle , par des arguments probablistes : en effet dans la loi binomiale $B(n,p)$ qui compte le nombre de succes dans une suite de n épreuves indépendantes ,où p est la probabilité d'un succes sur une épreuve, la probabilité d'obtenir k succes est : $\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k}$)

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)E_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)E_{n,k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)E_{n,k}$

2. En déduire la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)(k-nx)^2E_{n,k}=nX(1-X)$

   Soit $f\in C^0([0,1],E)$ et $\varepsilon>0$. On se propose de déterminer une fonction polynôme P à coefficients dans E

   $$\overrightarrow{P(x)}=\sum_{k=0}^{\deg(P)}x^k\overrightarrow{a_k},\text{ et }\overrightarrow{a_k}\in E$$

   telle que $N_\infty(f-P)<\varepsilon$

3. Soit $\alpha>0$ et $t\in[0,1]$. On note

   $$A_n=\left\{k\in<0,n>,\left|\frac{k}{n}-t\right|\geq\alpha\right\}$$

   Montrer à l'aide de 2°que $\displaystyle\sum_{k\in A_n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)t^k(1-t)^{n-k}\leq\frac{1}{4\alpha^2n}$

4. Démontrer qu'il existe $\alpha>0$ tel que

   $$\forall(x,y)\in[0,1],|x-y|\leq\alpha\Rightarrow\left\|\overrightarrow{f(x)}-\overrightarrow{f(y)}\right\|\leq\varepsilon$$

5. On pose $\overrightarrow{P_n(t)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)t^k(1-t)^{n-k}\overrightarrow{f(\frac{k}{n})}$. Montrer que $\forall t\in[0,1]$

   $$\left\|\overrightarrow{P_n(t)}-\overrightarrow{f(t)}\right\|\leq\frac{N_\infty(f)}{2\alpha^2n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

   on appelle polynôme d'interpolation de Bernstein de f le polynôme $\overrightarrow{P_n}(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)t^k(1-t)^{n-k}\overrightarrow{f(\frac{k}{n})}$.

   Calculer $\lim_{n\to\infty}N_\infty(\overrightarrow{P_n}-\overrightarrow{f})$

.

THEOREME DE STONE WEIERSTRASS TRIGONOMETRIQUE 2

(démonstration par les sommes Fejer CCP 2004)

On sait que pour toute fonction continue sur un intervalle compact $[a,b]$ et tout $\varepsilon>0$ il existe une fonction polynômiale P telle que $\sup\{|f(x)-P(x)|, x\in[a,b]\}=N_\infty(f-P)<\varepsilon$. Ceci revient à dire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales P_n telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(P_n-f)=0$, ou encore : f est la limite uniforme (ie:pour la norme N_∞) d'une suite de fonctions polynomiales. Soit $n\in\mathbb{Z}$. On note e_n : $\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{C}\\ x&\to&e^{inx}\end{array}$ qui est donc une application 2π périodique. On appelle polynôme trigonomètrique toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $P=\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k e_k$. Le nom de polynôme vient du fait que $\forall t\in\mathbb{R}, P(t)=\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k e^{ikt}=\sum_{k=-N}^{N}\alpha_k X^k$ ou l'on a posé $X=e^{it}$
Le théorème de Stone Wierstass pour les fonctions périodiques s'énonce ainsi:
Pour toute fonction continue 2π périodique f à valeurs dans $\mathbb{C}$ et tout $\varepsilon>0$ il existe une fonction polynômiale trigonomètrique P telle que $\sup\{|f(x)-P(x)|, x\in[a,b]\}=N_\infty(f-P)<\varepsilon$.
Dans ce qui suit $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$,est une fonction 2π périodique.

1. Justifier les formules $\boxed{\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)=\dfrac{\cos(\frac{nt}{2})\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(kt)=\dfrac{\sin(\frac{nt}{2})\sin(\frac{(n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}}$

2. Justifier l'existence de $M=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. De même soit $\varepsilon>0$, justifier l'existence de $\delta_\varepsilon>0$ tel que pour tout couple de réels (x,y) tels que $|x-y|<\delta_\varepsilon$, $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$

3. pour tout $n\in\mathbb{Z}$, .on pose $c_n(f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}dx$
   - préciser $c_n(f)$ lorsque f est la fonction constante égale à 1
   - Montrer que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)e_n(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t-x)\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}dx}$

   On pose $S_N(f)=\displaystyle\sum_{n=-N}^{N}c_n(f)e_n$, et, pour $m\in\mathbb{N}, \sigma_m(f)=\dfrac{1}{m+1}\sum_{N=0}^{m}S_N(f)$

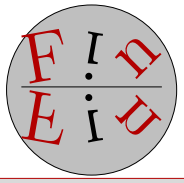
   Montrer que pour $t\in\mathbb{R}$ $\boxed{\sigma_m(f)(t)=\dfrac{1}{2\pi(m+1)}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t-x)\frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}dx}$

4. En déduire , si $\varepsilon>0$ et $t\in\mathbb{R}$,$m\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}|\sigma_m(f)(t)-f(t)| &= \frac{1}{2\pi(m+1)}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(t-x)-f(t))\frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}dx\right|\\ &\leq \varepsilon/2+\frac{1}{2\pi(m+1)}\int_{\delta_\varepsilon\leq|x|\leq\pi}2M\frac{\sin^2((\frac{m+1}{2})x)}{\sin^2(\frac{x}{2})}dx\\ &\leq \varepsilon/2+\frac{2M}{(m+1)\sin^2(\frac{\delta_\varepsilon}{2})}\end{aligned}$$

   penser à vérifier que $\sigma_m(1)=1$

5. Conclure .



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°20

Fonctions dzêta de Riemann

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Combien faut-il de mathématiciens pour changer une ampoule ?
- Aucun. C'est laissé au lecteur en exercice (problème ouvert).
- Aucun. Un mathématicien ne peut pas changer une ampoule, mais il peut prouver que cela est faisable. - Un. Il la donne à un physicien et ramène ainsi le problème à un problème précédemment résolu.
- Un seul, une fois que vous avez réussi à lui présenter le problème dans des termes qu'il peut comprendre.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

German mathematician who made lasting contributions to analysis and differential geometry, some of them enabling the later development of general relativity. His father was a poor Lutheran pastor who fought in the Napoleonic Wars. His mother, died before he had reached adulthood. Riemann exhibited exceptional mathematical skills, such as fantastic calculation abilities, from an early age but suffered from timidity and a fear of speaking in public.

Mathématicien du jour

1 Déterminer le domaine de définition de $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2 Soit $s > 1$. Exprimer après avoir justifié son existence, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ en fonction de $\zeta(s)$.

3 Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine, en déduire ses dérivées successives.

4 Prouver que $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$. Indication : majorer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ par comparaison une intégrale.

5 Prouver que $\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$

6 Montrer que la fonction ζ est décroissante et convexe sur $]1,+\infty[$. Tracer la courbe de ζ.

7 Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + o(2^{-x})$.

8 Constante d'Euler : Soit γ définie par : $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$

Montrer que γ existe et que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k}$.

9

a) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \dfrac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.

b) En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{e^{-2x}-1} = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2x}{x^2 + k^2\pi^2}$.

c) En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

10

Fonction êta de Riemann : Pour $x > 0$: $\eta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

a) Montrer que η est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

b) Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ pour $x \longrightarrow 1^+$.

c) Montrer que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + \varnothing(1)$. On remarquera que $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^x}$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

d) Donner un développement asymptotique à deux termes de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

e) Montrer que $\forall s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$, où $2 = p_1 < p_2 < .. < p_n < ..$ les nombres premiers.

f) Pour $s > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} p_n^{-s}$ est-elle convergente ? La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} p_n^{-1}$ est-elle convergente ?

11

Pour tout entier naturel n on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels plus petits que n et premiers avec n, dite fonction indicatrice d'Euler. Montrer que $\displaystyle\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ puis que pour tout réel $x > 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}.$$

12

Soit u définie par $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^q}$ pour tout $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.

a) Montrer que la suite u est sommable et calculer sa somme.

b) Prouver l'identité suivante : $\displaystyle\sum_{q=2}^{+\infty} (\zeta(q) - 1) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} - 1 \right) = 1$.

13

Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leurs existences :

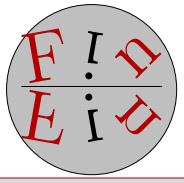
a) $\displaystyle\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2}$ Réponse : $A = \zeta(2)^2$

b) $\displaystyle\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p|q} \frac{1}{p^2 q^2}$ Réponse : $B = \zeta(2)\zeta(4)$.

c) $\displaystyle\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = 1} \frac{1}{p^2 q^2}$ Réponse : $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

d) $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$. Réponse : $-\dfrac{7}{8}\zeta(3)$.

Soit $s > 1$. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{sE(x)}{x^{s+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt = \zeta(s)$



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé n°5

Coniques-quadriques
Séries numériques-intégration
Suites et séries de fonctions

MP-CPGE Rabat

Samedi 26 février 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Cinq ingénieurs et cinq commerciaux se déplacent pour aller à un salon. Chacun des 5 commerciaux va acheter un billet de train. Les ingénieurs n'achètent qu'UN seul billet. Les 5 ingénieurs vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. En passant, le contrôleur voit que les toilettes sont occupées. Il frappe à la porte et demande : "Votre billet, s'il vous plaît !".
Les ingénieurs glissent LE billet sous la porte. Le contrôleur est satisfait et s'en va. Les commerciaux sont bien sûr extrêmement vexés que les ingénieurs leur ont encore une fois fait la leçon. Pour le retour ... (voir la suite dans le corrigé)

Mathématicien du jour

Marshall Harvey Stone (1903-1989)

An American mathematician who contributed to real analysis, functional analysis, and the study of Boolean algebras. he published a classic monograph 662 pages long titled Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, a presentation about self-adjoint operators. Much of its content is now deemed to be part of functional analysis. In 1982, he was awarded the National Medal of Science.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisée pour cette preuve.

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 Problème 1 : CCP 2009, PSI

1.1 Notations.

Pour tout nombre réel x tel que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} e^{-xt}\,dt$ converge, on note $\varphi(x)$ la valeur de cette intégrale.

Pour tout entier naturel non nul m tel que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t}\,dt$ converge, on désigne par J_m sa valeur.

1.2 Objectifs.

L'objet de ce problème est d'étudier l'existence et un procédé de calcul éventuel de J_1.

1.3 Etude de la fonction φ.

On désigne par d (respectivement δ) la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $d(t) = t - 1 + \cos(t)$ (repectivement $\delta(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos(t)$).

I.1. Etude des fonctions d et δ.

I.1.1 Etudier la fonction d ; en déduire qu'il existe un nombre réel α tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t} \leq \alpha$.

I.1.2 Etudier la fonction δ ; en déduire qu'il existe un nombre réel β tel que, pour tout nombre réel t strictement positif, on ait l'inégalité : $0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \beta$.

I.2. Existence de la fonction φ sur $[0,+\infty[$.

Etablir la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$. En déduire que $\varphi(x)$ existe pour tout x appartenant à $[0,+\infty[$.

I.3. Limite de la fonction φ en $+\infty$.

I.3.1 Préciser le signe de $\varphi(x_1) - \varphi(x_2)$, pour $0 \leq x_1 \leq x_2$. En déduire que la fonction φ admet une limite finie λ en $+\infty$.

I.3.2 Déterminer la valeur de λ (on pourra utiliser **I.1.2**).

I.4. Caractère $\mathcal{C}^k$ de la fonction φ.

I.4.1 Montrer que la fonction φ est continue sur $[0,+\infty[$.

I.4.2 Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ (on pourra utiliser **I.1.1**).

I.4.3 Montrer que la fonction φ' admet une limite finie (que l'on précisera) en $+\infty$.

I.4.4 Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

I.4.5 Expliciter $\varphi''(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$.

I.4.6 Expliciter $\varphi'(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$. La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

I.5. Expression explicite de la fonction $\varphi(x)$.

I.5.1 déterminer la limite de $x \ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

I.5.2 Expliciter une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

I.5.3 Expliciter $\varphi(x)$ pour x appartenant à $]0,+\infty[$.

I.5.4 Déterminer $\varphi(0)$.

1.4 Etude de l'existence de J_m.

II.1. Etude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,dt$.

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t}\,dt$ pour tout entier naturel non nul m.

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t}\,dt$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

II.2. Etude de J_1.

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1-\cos)' = \sin$).

En déduire la valeur de J_1.

2 Problème 2 : CNC 99, MP

Préliminaire : Dans ce problème on étudie quelques propriétés de la fonction ζ, somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$. On rappelle que la fonction Gamma est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt.$$

Enfin on signale que l'utilisation de la comparaison séries-intégrales et de l'interversion du signe somme dans une suite double sommable sera très profitable dans ce problème.

2.1 Première partie

I-1 Montrer que la fonction ζ a pour domaine de définition $I=]1,+\infty[$.

I-2-a Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ vers ζ sur $[a,+\infty[$, pour tout $a>1$.

I-2-b Cette série de fonctions converge-t-elle uniformément sur I ?

I-3-a Montrer que ζ est continue sur I.

I-3-b Déterminer avec soin ses limites aux bornes de I.

I-3-c Par comparaison avec une intégrale montrer l'équivalent $\zeta(s)\sim\frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1.

I-4-a Montrer que ζ est de classe C^1 sur I et donner une expression de sa dérivée.

I-4-b Montrer que ζ est de classe C^∞ sur I et donner une expression de ses dérivées successives.

I-5-a Montrer l'équivalent $\zeta(s)-1\sim 2^{-s}$ au voisinage de $+\infty$ et en déduire la convergence de la série

$$\sum_{k\geq 2}(\zeta(k)-1).$$

I-5-b En introduisant une suite double sommable bien choisie, calculer la somme de la série précédente.

I-6 On considère pour $n\geq 1$ la fonction P_n à valeurs complexes définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$P_n(x)=\frac{1}{2i}\left((\sqrt{x}+i)^{2n+1}-(\sqrt{x}-i)^{2n+1}\right).$$

I-6-a Montrer que P_n est polynomiale.

I-6-b Déterminer ses racines dans $]0,+\infty[$.

I-6-c En déduire les relations pour $n\geq 1$:

$$\sum_{1\leq k\leq n}\operatorname{cotan}^2\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3};\qquad \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{\sin^2\frac{k\pi}{2n+1}}=\frac{2n(n+1)}{3}.$$

I-6-d Démontrer, pour $t\in]0,\frac{\pi}{2}[$, les inégalités : $\operatorname{cotan} t\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sin t}$.

I-6-e En déduire que $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$.

2.2 Troisième partie

III-1 Montrer que la suite $u_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ est décroissante et converge vers un rel strictement positif γ (constante d'Euler).

III-2-a Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})\right)$.

III-2-b Établir la relation

$$\gamma = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\ln(1-\frac{1}{n})\right).$$

III-2-c En déduire la convergence de la série $\sum_{k\geq 2}\frac{\zeta(k)-1}{k}$ et l'identité

$$\gamma = 1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\zeta(k)-1}{k}.$$

III-3-a Étudier pour α rel l'intégrabilité de la fonction $t\mapsto\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}$ sur l'intervalle$]0,+\infty[$. On posera

$$I_\alpha=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{e^t-1}dt.$$

III-3-b En intégrant terme terme une série de fonctions bien choisie, établir la relation :

$$\forall\alpha>1,\ \zeta(\alpha)\Gamma(\alpha)=I_\alpha.$$

III-4-a Démontrer que pour tout $s\geq 1$, la fonction $t\mapsto\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que son intégrale sur cet intervalle est gale $\ln s$.

(Indication : On pourra, par exemple, montrer que pour $\varepsilon>0$ on a : $\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-st}}{t}dt=\int_\varepsilon^{s\varepsilon}\frac{e^{-t}}{t}dt$.)

III-4-b Montrer alors que

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}+e^{-2t}+\cdots+e^{-nt}-\frac{e^{-t}-e^{-nt}}{t}\right)dt=\gamma.$$

III-4-c Montrer que la fonction $t\mapsto\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que son intégrale sur cet intervalle est gale γ.

III-4-d En déduire

$$\Gamma'(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\ dt=-\gamma.$$

III-5-a Démontrer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,n]$: $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}$.

III-5-b Montrer pour $x>0$

$$\lim_{n\mapsto\infty}\int_0^n(1-\frac{t}{n})^nt^{x-1}dt=\Gamma(x).$$

III-5-c En déduire pour $x>0$

$$\Gamma(x)=\lim_{n\mapsto\infty}\frac{n^xn!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

III-6 Montrer pour $x>0$ la convergence de $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{x}{n}-\ln(1+\frac{x}{n})\right)$ et la relation

$$\ln\Gamma(x)=-\gamma x-\ln x+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n}-\ln(1+\frac{x}{n})\right).$$

III-7-a Démontrer avec soin la relation pour $x>0$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\gamma-\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right).$$

III-7-b Retrouver alors la relation $\Gamma'(1) = -\gamma$ puis calculer $\Gamma''(1)$.

III-8 Etablir pour x dans $]0,1[$

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\zeta(n+1)x^n.$$

3 Problème 3 : CCP 2008, MP

AUTOUR DE LA FONCTION zêta ALTERNÉE DE RIEMANN

3.1 Objectifs :

On note F la fonction zêta alternée de Riemann, définie par

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zêta de Riemann, définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.
Mise à part la partie III. qui utilise des résultats de la partie I., les parties sont, dans une très large mesure, indépendantes.

3.2 Généralités

1 Déterminer l'ensemble de définition de F.

2 On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \int_0^1 g(t)\,dt$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3 Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4 Dérivabilité de F

a Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

b Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5 Lien avec ζ

Calculer, pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x) = (1-2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

3.3 Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$.

Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

6 Étude de la convergence

a Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

b Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

7 Cas où $x = 1$

On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.

a Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(n-X)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

b Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.

c En déduire la nature de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

4 Exercice : e3a 2009, MP

On considère trois réels α, β et γ non nuls et la quadrique (Σ) dont une équation est :

$$\alpha^2 (x+y+z)^2 + \beta^2 (-x+y)^2 + \gamma^2 (2y+z)^2 = 1$$

dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace affine de dimension trois.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x+y+z=0$ et $-x+y=0$ sont orthogonaux.

b) On note $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les deux vecteurs unitaires, d'abscisses positives, normaux respectivement aux plans (P) et (Q). Déterminer les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ ainsi que le vecteur $\vec{K}$ tel que le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit orthonormé direct.

c) Déterminer une équation de la quadrique (Σ) dans le repère $\mathcal{R}'$.
On notera X, Y et Z les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

d) Que peut-on dire de la nature de la quadrique (Σ) ?

2) On note $(\mathcal{E})$ la conique obtenue comme intersection de la quadrique (Σ) avec le plan d'équation $Z=0$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

Réduire l'équation de la conique $(\mathcal{E})$. En déduire qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ tel que l'équation dans le repère $\mathcal{R}''$ de la quadrique (Σ) soit de la forme :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < a < b$. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}''$ sont notées X', Y' et Z'.

3) Soit k un réel quelconque ; on appelle (P_k) le plan dont une équation dans le repère $\mathcal{R}''$ est :

$$\frac{X'\sqrt{b^2-a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

a) En considérant l'expression :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$$

montrer que l'intersection (C_k) du plan (P_k) et de la quadrique (Σ) est l'intersection du plan (P_k) avec une sphère (S_k) dont on précisera le centre Ω_k et le rayon R_k.

b) Montrer que l'ensemble (C_k) est un cercle dont on précisera le rayon.

c) Que peut-on dire du rayon du cercle (C_k) ? Pouvait-on le prévoir ?

Bonne Chance

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé n°5

Coniques-quadriques
Séries numériques-intégration
Suites et séries de fonctions

MP-CPGE Rabat

Samedi 26 février 2011

Durée : 4 heures

Blague du jour

Pour le retour, les 5 commerciaux achètent UN seul billet. Quant aux ingénieurs, ils n'achètent AUCUN billet. Les 5 commerciaux vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. Les ingénieurs passent discrètement â côté, frappent à la porte et demandent " Votre billet, s'il vous plaît !" et se réfugient dans les toilettes suivantes..... La morale de l'histoire : les commerciaux essayent toujours d'appliquer les techniques des ingénieurs sans jamais vraiment les comprendre.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien du jour

Matemático alemán que se suele citar como el ≪padre del análisis moderno≫. Además de sus prolíficas investigaciones cabe señalar que fue profesor de cátedra en la Universidad de Berlín en la cual tuvo entre sus discípulos a Georg Cantor, Ferdinand Georg Frobenius, Wilhelm Killing, Leo Königsberger, Carl Runge y Sofia Kovalévskaya.
Weierstrass dio las definiciones actuales de continuidad, límite y derivada de una función, que siguen vigentes hoy en día. Esto le permitió demostrar un conjunto de teoremas que estaban entonces sin demostrar como el teorema del valor medio, el teorema de Bolzano-Weierstrass y el teorema de Heine-Borel. También realizó aportes en convergencia de series, en teoría de funciones periódicas, funciones elípticas, convergencia de productos infinitos, cálculo de variaciones, análisis complejo, etc.

1 Corrigé Problème 1 : CCP 2009, PSI (Pr Devulder)

1.1 Etude de la fonction φ.

1.1. $d \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $\forall t,\ d'(t) = 1 - \sin(t) \geq 0$. d est donc croissante sur $\mathbb{R}$. La croissance est même stricte car d' ne s'annule que sur $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. d réalise ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ dans son image $d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. On remarque que

$$\forall t \geq 0,\ d(t) \geq d(0) \geq 0$$

En particulier (quand on divise par $t > 0$ on ne change pas le sens des inégalités)

$$\forall t > 0,\ \frac{1 - \cos(t)}{t} \leq 1$$

et bien sûr $\dfrac{1-\cos(t)}{t} \geq 0$ provient (pour $t > 0$) de la positivité des numérateur et dénominateur.

1.2. δ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t,\ \delta'(t) = t - \sin(t) \quad \text{et} \quad \delta''(t) = 1 - \cos(t)$$

En particulier δ'' est positive, δ' croît et est positive sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\forall t \geq 0,\ \delta(t) \geq \delta(0) \geq 0$$

On conclut comme plus haut que

$$\forall t > 0,\ 0 \leq \frac{1-\cos(t)}{t^2} \leq \frac{1}{2}$$

2. $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a des problèmes d'intégrabilité aux voisinages de 0 et de $+\infty$. Au voisinage de 0^+, la fonction est bornée (on vient de le voir ; on montrerait aisément que la fonction est prolongeable par continuité par la valeur $1/2$) et donc intégrable. Au voisinage de $+\infty$, elle est $O(1/t^2)$ et donc aussi intégrable. Elle est finalement intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.
Si $x \geq 0$, $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dominée par $t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$ dont on vient de voir l'intégrabilité. Par comparaison, elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi(x)$ existe a fortiori.

3.1. On a

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_2) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\left(e^{-x_1 t} - e^{-x_2 t}\right) dt$$

Si $x_1 \leq x_2$, la fonction intégrée est positive sur $\mathbb{R}^+$ et on a donc $\varphi(x_1) \geq \varphi(x_2)$. φ est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme elle est minorée (par 0) elle admet une limite finie en $+\infty$ (théorème de limite monotone).

3.2. D'après 1.2 on a (en vérifiant que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0,\ 0 \leq \varphi(x) \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{\beta}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$$

4.1. Il s'agit d'utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$
- $\forall x \geq 0,\ \forall t > 0,\ \left|\dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}\right| \leq \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Ainsi, φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

4.2. Il s'agit d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \geq 0,\ t \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
- $\forall t > 0,\ x \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$
- $\forall x > 0,\ t \mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall a > 0,\ \forall x \geq a,\ \left|-\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}\right| \leq \alpha e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a > 0$).

φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}\, dt$$

4.3. D'après 1.1 on a (en vérifiant que les quantités écrites existent)

$$\forall x > 0,\ 0 \leq -\varphi'(x) \leq \alpha \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{\alpha}{x}$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi'(x) = 0$$

4.4. Il s'agit à nouveau d'utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall x>0,\ t\mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (conséquence du théorème utilisé en **4.2**)
- $\forall t>0,\ x\mapsto -\dfrac{1-\cos(t)}{t}e^{-xt}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ de dérivée $x\mapsto (1-\cos(t))e^{-xt}$
- $\forall x>0,\ t\mapsto (1-\cos(t))e^{-xt}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall a>0,\ \forall x\geq a,\ \left|(1-\cos(t))e^{-xt}\right|\leq 2e^{-at}$. Le majorant est indépendant de x et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ (car $a>0$).

φ est ainsi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x>0,\ \varphi''(x)=\int_0^{+\infty}(1-\cos(t))e^{-xt}\,dt$$

4.5. On a $1-\cos(t)=\mathrm{Re}(1-e^{it})$ et donc (par linéarité du passage à l'intégrale)

$$\begin{aligned}\forall a>0,\int_0^a(1-\cos(t))e^{-xt}\,dt &= \mathrm{Re}\left(\int_0^a(e^{-xt}-e^{t(i-x)})\right)\\ &= -\mathrm{Re}\left[\frac{e^{-xt}}{x}+\frac{e^{t(i-x)}}{i-x}\right]_{t=0}^{t=a}\end{aligned}$$

En faisant tendre a vers $+\infty$ pour $x>0$ fixé, on obtient

$$\forall x>0,\ \varphi''(x)=\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{i-x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$$

4.6. Il existe donc une constante c telle que

$$\forall x>0,\ \varphi'(x)=\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c=0$ et donc

$$\forall x>0,\ \varphi'(x)=\ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

On remarque que

$$\lim_{x\to 0^+}\varphi'(x)=-\infty$$

Comme φ est continue sur $\mathbb{R}^+$, un corollaire des accroissements finis indique que φ n'est pas dérivable en 0 mais que sa courbe présente en 0 une demi-tangente verticale.

5.1. On a

$$x\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)=-x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{x}\underset{x\to+\infty}{\to}0$$

5.2. Une intégration par parties donne

$$\int_0^x\ln(1+t^2)\,dt=\left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x-2\int_0^x\frac{t^2}{1+t^2}\,dt=x\ln(1+x^2)-2(x-\arctan(x))$$

et ceci représente une primitive de la fonction continue $t\mapsto\ln(1+t^2)$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par théorème fondamental.

5.3. On en déduit, avec l'expression de φ', l'existennce d'une constante c telle que

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ \varphi(x) &= x\ln(x)-x-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+x-\arctan(x)+c\\ &= \frac{x}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)-\arctan(x)+c\end{aligned}$$

Avec **5.1** et **3.2** et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $c=\pi/2$ et donc

$$\forall x>0,\ \varphi(x)=\frac{\pi}{2}-\arctan(x)$$

5.4. φ étant continue en 0, on obtient

$$\varphi(0)=\lim_{x\to 0^+}\varphi(x)=\frac{\pi}{2}$$

1.2 Etude de l'existence de J_m.

1. $t \mapsto \dfrac{\sin^m(t)}{t}$ est continue sur $]0,\pi/2]$ et équivaut à t^{m-1} au voisinage de 0. Pour $m \geq 1$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 et finalement intégrable sur $[0,\pi/2]$ (et a fortiori, son intégrale existe).
2. Une intégration par parties donne

$$\forall 0 < a < b,\ \int_a^b \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \left[\frac{1-\cos(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt$$

L'intégrale du membre de droite ainsi que le terme tout intégré admettent des limites en 0 et $+\infty$. En opérant les passages à la limite $a \to 0$ et $b \to +\infty$, on a donc

$$J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,dt = \varphi(0) = \frac{\pi}{2}$$

3. $t \mapsto e^{ikt}$ est continue sur $[\pi/2,+\infty[$ et $t \mapsto 1/t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. On peut opérer une intégration par parties pour obtenir

$$\forall k \neq 0,\ \forall a \geq \pi/2,\ \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{t}\,dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt}\right]_{\pi/2}^a + \int_{\pi/2}^a \frac{e^{ikt}}{ikt^2}\,dt$$

Comme $\left|\dfrac{e^{ikt}}{ikt^2}\right| \leq \dfrac{1}{|k|t^2}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, l'intégrale du membre de droite admet une limite quand $a \to \infty$. De même, le terme "tout intégré" est de limite nulle en $+\infty$. On peut donc faire tendre a vers $+\infty$ pour obtenir l'existence de I_k.
Si $k = 0$ alors la fonction à considérer est $t \mapsto 1/t$ et c'est une fonction de Riemann non intégrable au voisinage de 0. Comme elle est positive, son intégrale n'existe pas. Finalement,

$$I_k \text{ existe si et seulement si } k \neq 0$$

4.1. On a

$$\sin^m(t) = \frac{(e^{it}-e^{-it})^m}{(2i)^m} = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k e^{i(m-2k)t}$$

Par linéarité du passage à l'intégrale, on a donc

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^m(t)}{t}\,dt = \frac{1}{(2i)^m}\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}(-1)^k I_{m-2k}(x)$$

4.2. Si $m = 2p+1$, on obtient

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2^{2p+1}i(-1)^p}\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}(-1)^k I_{2(p-k)+1}(x)$$

$2(p-k)+1$ étant impair est non nul et tous les termes de la somme admettent une limite quand $x \to +\infty$. On peut ainsi passer à la limite aussi dans le membre de gauche ce qui donne l'existence de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin^{2p+1}(t)}{t}$.
Avec la question 1, on a finalement l'existence de J_{2p+1}.

4.3. Pour $m = 2p$, on a cette fois

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},+\infty\right[,\ \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\,dt = \frac{1}{2^{2p}(-1)^p}\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k}(-1)^k I_{2(p-k)}(x)$$

Dans le membre de droite, tous les termes admettent une limite quand $x \to +\infty$ sauf celui pour $k = p$ qui tend vers $+\infty$ (en rentrant le facteur dans la somme et puisque $I_0(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$). On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{\pi/2}^x \frac{\sin^{2p}(t)}{t}\,dt = +\infty$$

et J_{2p} n'existe pas.

2 Corrigé Problème 2 : CNC 99, MP (Pr Kanber)

Partie I

I.1 $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est une série de Riemann qui est convergente si et seulement si $s>1$ donc

$$D_\zeta=]1,+\infty[$$

I.2.a Soit $a>1, |\frac{1}{n^s}|\leq\frac{1}{n^a}, \forall s\in[a,+\infty[$ et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^a}$ est convergente ce qui entraine que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est normalement convergente sur $[a,+\infty[$ donc uniformément convergente sur $[a,+\infty[$

I.2.b Supposons au contraire que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ converge uniformément sur $I=]1,+\infty[$. on a alors :

- $1\in\bar{I}$
- $\forall n\geq 1, \lim_{s\mapsto 1}\frac{1}{n^s}$ existe et vaut $\frac{1}{n}$

Donc d'après le théorème d'inversion $\lim$ et $\sum$ la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est convergente ce qui est absurde.

Conclusion : $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ ne converge pas uniformément sur $I=]1,+\infty[$

I.3.a Soit $a>1$

- $\forall n\geq 1$ la fonction $s\longmapsto\frac{1}{n^s}$ est continue sur $[a,+\infty[$.
- $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est uniformément convergente sur $[a,+\infty[$

Donc d'après le théorème de continuité sous le signe $\sum$ ζ est continue sur $[a,+\infty[$ ceci $\forall a>1$, donc continue sur I

I.3.b

- $\lim_{s\mapsto+\infty}(\zeta(s)?$
  - $\star\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}$ est uniformément convergente sur $[2,+\infty[$
  - $\star+\infty\in[2,\bar{+}\infty[$
  - $\star\forall n\geq 1$ la fonction $s\longmapsto\frac{1}{n^s}$ admet une limite en $+\infty$ qui vaut 0 si $n\neq 1$ et 1 sinon.

  Donc d'après le théorème d'inversion $\lim$ et $\sum$,

$$\lim_{s\mapsto+\infty}\zeta(s)=1$$

- $\lim_{s\mapsto 1}(\zeta(s)?$ il est clair que ζ est décroissante ($s<s'\Longrightarrow\frac{1}{n^s}<\frac{1}{n^{s'}}$). Donc ζ admet une limite en 1. Supposons que $\lim_{s\mapsto 1}(\zeta(s)=M<+\infty$

  on a alors $\zeta(x)\leq M, \forall x\in I$, par suite $\forall N\in\mathbb{N}, \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}\leq M$, on fait $x\mapsto+\infty$ dans la dernière inégalité

  on obtient :$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\leq M$ ce qui est impossible car la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

  Conclusion :

$$\lim_{s\mapsto 1}\zeta(s)=+\infty$$

I.3.c Soit $s \in I$ fixé. $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x^s}$ qui est bien évidemment positive, décroissante et tend vers 0 quand $n \mapsto +\infty$. Donc d'après le théorème de comparaison série et intégrale on a :

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx \leq R_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

mais $\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^{-s+1}}{s-1} + \frac{2}{2^s(s-1)} = \frac{2}{2^s(s-1)}$ et $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{s-1}$ donc :

$$\frac{2}{2^s(s-1)} \leq \zeta(s) - 1 \leq \frac{1}{s-1}$$

soit encore

$$\frac{2}{2^s(s-1)} + 1 \leq \zeta(s) \leq \frac{1}{s-1} + 1$$

mais $\frac{1}{2^s(s-1)} + 1 \sim \frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1 et aussi $\frac{1}{s-1} + 1 \sim \frac{1}{s-1}$ au voisinage de 1, on en déduit alors que

$$\zeta(s) \sim_{s\mapsto 1} \frac{1}{s-1}$$

I.4.a Soit $a > 1$ fixé, posons $I_a = [a, +\infty[$ et u_n la fonction définie sur I_a par $u_n(s) = \frac{1}{n^s}$

- $\forall n, u_n$ est de classe C^1 sur I_a et $\forall s \in I_a, u_n'(s) = -\frac{\ln(n)}{n^s}$
- $|u_n'(s)| \leq \frac{\ln(n)}{n^a}, \forall x \in I_a$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^a}$ est convergente (car pour $1 < b < a$, $\frac{\ln(n)}{n^a} = o(\frac{1}{n^b})$ quand $n \mapsto +\infty$).

  La série $\sum_{n\geq 1} u_n'$ est alors uniformément convergente sur I_a (car normalement convergente).

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$.ζ est C^1 sur I est on a :

$$\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^s}, \forall s \in I$$

I.4.b Montrons par récurrence sur p que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \zeta \in C^p(I), \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-)^p \ln^p(n)}{n^s}, \forall s \in I$$

- La propriété est déjà démontrée pour $p = 1$.
- soit $p \geq 1$ supposons la propriété vraie à l'ordre p.

  Soit $a > 1$ fixé, posons $I_a = [a, +\infty[$ et $u_n^{(p)}$ la fonction définie sur I_a par $u_n^{(p)}(s) = \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^s}$

  - i) $\forall n, u_n^{(p)}$ est de classe C^1 sur I_a et $\forall s \in I_a, u_n^{(p)'}(s) = \frac{(-1)^{p+1} \ln^{p+1}(n)}{n^s}$
  - ii) $|u_n^{(p)'}(s)| \leq \frac{\ln^{p+1}(n)}{n^a}, \forall x \in I_a$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln^{p+1}(n)}{n^a}$ est convergente (car pour $1 < b < a$, $\frac{\ln^{p+1}(n)}{n^a} = o(\frac{1}{n^b})$ quand $n \mapsto +\infty$).

    La série $\sum_{n\geq 1} (u_n^{(p)'}$ est donc uniformément convergente sur I_a (car normalement convergente).

  Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, ζ est C^{p+1} sur I et :

$$\zeta^{(p+1)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-)^{p+1} \ln^{p+1}(n)}{n^s}, \forall s \in I$$

Conclusion $\zeta \in \mathbf{C}^{\infty}(\mathbf{I}), \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall s \in \mathbf{I}, \quad \zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-)^p \ln^p(n)}{n^s}$

I.5.a On a

$$\forall s > 1, 2^s(\zeta(s) - 1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^s}{n^s} = 1 + \sum_{n=3}^{+\infty} (\frac{2}{n})^s$$

– $\forall n > 3, \quad \lim_{s \mapsto +\infty} (\frac{2}{n})^s = 0$

– $\forall n > 3, \forall s > 2 \quad (\frac{2}{n})^s \leq \frac{2}{n})^2$ et la série $\sum_{n \geq 3} (\frac{2}{n})^2$ est convergente

D'après le théorème d'interversion limite et $\sum$ on a :

$$\lim_{s \mapsto +\infty} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^s}{n^s} = 0$$

et donc :

$$\zeta(s) - 1 \sim_{s \mapsto +\infty} = 2^{-s}$$

On a montré que $\zeta(k) - 1 \sim_{k \mapsto +\infty} 2^{-k}$, la série $\sum_{n \geq 2} 2^{-k}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc convergente par conséquent la série $\sum_{n \geq 2} (\zeta(k) - 1)$ est convergente.

I.5.b $\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$. Considérons la suite double $(\frac{1}{n^k})_{n,k \geq 2}$. On a

– $\forall n \geq 2, \forall k \geq 2, \frac{1}{n^k} \geq 0$

– $\forall n \geq 2$, la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{n^k}$ est une série géométrique convergente. En outre

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n(n-1)}$$

– La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$ est convergente. En outre

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1$$

Donc d'après un critère de sommabilité, La famille $(\frac{1}{n^k})_{n,k \geq 2}$ est sommable et donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (\zeta(k) - 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} (\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}) = \sum_{n=2}^{+\infty} (\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{n^k}) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

I.6.a Il est clair que $P_n(x) = \mathrm{Im}((\sqrt{x} + i)^{2n+1})$. Mais $(\sqrt{x} + i)^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k i^k (\sqrt{x}^{2n+1-k}$, Donc

$$\mathrm{Im}((\sqrt{x} + i)^{2n+1}) = \sum_{0 \leq 2p+1 \leq 2n+1} C_{2n+1}^{2p+1} (-1)^p (\sqrt{x}^{2n+1-(2p+1)} = \sum_{p=0}^{n} C_{2n+1}^{2p+1} (-1)^p x^{n-p}$$

En conséquence P_n est polynômiale, de degré n, de coefficient dominant $C_{2n+1}^1 = 2n + 1$, de terme constant $(-1)^n$.

I.6.b soit $x \in]0, +\infty[$ tel que $P_n(x) = 0$. donc $(\sqrt{x} + i)^{2n+1} - (\sqrt{x} - i)^{2n+1} = 0$ par suite $(\frac{\sqrt{x} + i)}{(\sqrt{x} - i)})^{2n+1} =$

1, par conséquent $\frac{\sqrt{x}+i)}{(\sqrt{x}-i)} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ avec k entier tel que $0 \leq k \leq 2n$. Donc $\frac{(\sqrt{x}+i)^2}{(x+1)} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$, soit $\frac{x+2i\sqrt{x}-1}{(x+1)} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$ par suite $\frac{x-1}{x+1} = Re(e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}) = \cos(\frac{2k\pi}{2n+1})$ soit encore $(1-\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})x = 1+\cos(\frac{2k\pi}{2n+1})$ c'est à dire $2\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = 2\cos^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ et donc

$$x = \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})$$

Réciproquement :
soient $x_k = \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ avec $1 \leq k \leq n$. On a

$$P_n(x_k) = (\sqrt{x_k}+i)^{2n+1} - (\sqrt{x_k}-i)^{2n+1}) = (\cot(\frac{k\pi}{2n+1})+i)^{2n+1} - (\cot(\frac{k\pi}{2n+1})-i)^{2n+1})$$

soit alors

$$P_n(x_k) = \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1}))^{2n+1}}(\cos(\frac{k\pi}{2n+1})+i\sin(\frac{k\pi}{2n+1}))^{2n+1} - (\cos(\frac{k\pi}{2n+1})-i\sin(\frac{k\pi}{2n+1}))^{2n+1}$$

et enfin

$$P_n(x_k) = \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})^{2n+1}}[e^{\frac{ik\pi}{2n+1}}]^{2n+1} - [e^{\frac{-ik\pi}{2n+1}}]^{2n+1}] = 0$$

Conclusion : Les racines de $P_n, \in]0,+\infty[$ sont les

$$x_k = \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}), 1 \leq k \leq n$$

I.6.c Les racines de P_n sont 0 et les $x_k = \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}), 1 \leq k \leq n$, donc d'après les relations entres coefficients et racines d'un polynôme $\sum_{1\leq k\leq n} \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, En désignant par $a_i, 0 \leq i \leq n$ les coefficients de P_n.
Mais $a_n = 2n+1, a_{n-1} = -C^3_{2n+1} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1}{6}$.
Donc

$$\sum_{1\leq k\leq n} \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) = \frac{n(2n-1)}{3}$$

On a $\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} = \sum_{1\leq k\leq n} 1+\cot^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ (car $\forall x\ 1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$). Donc

$$\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})} = n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$

I.6.d Soit f la fonction définie sur $[0,\pi[$ par $f(t) = t\cos t - \sin t$.
f est C^1 sur $[0,\pi[$ et

$$\forall t \in [0,\pi[, f'(t) = -t\sin t \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[0,\pi[$. Mais $f(0) = 0$ donc $\forall t \in [0,\pi[f(t) \leq 0$ par suite

$$\forall t \in]0,\pi[, \cot t \leq \frac{1}{t}$$

D'autre part la fonction sin est concave sur $]0,\pi[$ donc

$$\forall t \in]0,\pi[\ \sin t \leq t$$

Conclusion :

$$\forall t \in]0,\pi[\ \cot t \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sin t}$$

I.6.e Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\forall k, 1 \leq k \leq n, \frac{k\pi}{2n+1} \in]0, \pi[$

D'après la question précédente

$$\forall k, 1 \leq k \leq n, \cot(\frac{k\pi}{2n+1}) \leq \frac{2n+1}{k\pi} \leq \frac{1}{\sin(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

, et donc

$$\forall k, 1 \leq k \leq n, \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

par sommation on obtient

$$\sum_{1\leq k\leq n} \cot^2(\frac{k\pi}{2n+1}) \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sin^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$$

En remplaçant par les expression trouvées on obtient :

$$\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{3}{n(2n-1)} \leq \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{3}{2n(n+1)}$$

Mais $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{3}{n(2n-1)} = \frac{\pi^2}{6}$ et aussi $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{3}{2n(n+1)} = \frac{\pi^2}{6}$

Conclusion :

$$\zeta(2) = \lim_{n\mapsto+\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3 Corrigé Problème 3 : CCP 2008, MP (Pr Patte)

3.1 I. Généralités

1 Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

2 Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t}$; donc la suite (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1[$.

- La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0, 1[$;
- la fonction g et les fonctions g_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues (par morceaux) ;
- condition de domination : $\forall t \in [0, 1[$, $|g_n(t)| = \left|\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2}{1+t} \overset{\text{def}}{=} \phi(t)$; la fonction ϕ est indépendante de n, continue (même sur $[0, 1]$) et intégrable sur $[0, 1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^1 g_n\right)$ converge vers $\int_0^1 g$.

Or, $\int_0^1 g_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$; donc $F(1) = \int_0^1 g = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln 2$.

3 $\forall n \geq 1, \forall x \geq 2, \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est indépendante de n et convergente, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$.

On en déduit qu'elle converge uniformément sur $[2,+\infty[$. Comme, pour tout $n \geq 2$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que, pour $n=1$, $\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=1$, le théorème de passage à la limite terme à terme permet d'affirmer que $F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}=1$.

4 Dérivabilité de F

a) Soit $x>0$. La fonction $h_x : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $h_x'(t)=\frac{t^{x-1}(1-x\ln t)}{t^{2x}}$. Donc h_x' est négative sur l'intervalle $[e^{1/x},+\infty[$ et positive sur $]0,e^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[e^{1/x},+\infty[$ et croissante sur $]0,e^{1/x}]$.
On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $E\left(e^{1/x}\right)+1$.

b) $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1}e^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x)=(-1)^n\frac{\ln n}{n^x}$.
Soit $a>0$. On pose $N_a = E\left(e^{1/a}\right)+1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum_{n\geq N_a} f_n'(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :
$$|\rho_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$
Donc $\sup_{x\geq a}|\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et
$$\forall x>0,\ F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^x}.$$

5 Lien avec ζ

Pour $x>1$, $F(x)-\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}-1}{n^x}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{-2}{(2k)^x}=-2^{1-x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^x}=-2^{1-x}\zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x)=(1-2^{1-x})\zeta(x)$.
Comme $2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $F(x)\sim\zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

3.2 II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

6 Étude de la convergence

a) Lorsque $x > 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; donc la série produit de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut : $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)^2 = (F(x))^2$.

b) Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \dfrac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes, $\displaystyle|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1)\frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$.

Pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

7 Cas où $x = 1$

a) $\dfrac{1}{X(n-X)} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{n-X}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) \\ &= 2(-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2}\frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

b) Monotonie

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(H_n - \frac{1}{n}\right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante.

c) "Classiquement", $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 2} c_n(1)$ converge.

4 Corrigé Exercice : e3a 2009, MP (Pr Gayout)

1) a) Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}\,(1, 1, 1)$ et un vecteur normal au plan (Q) est $\vec{m}\,(-1, 1, 0)$.
On a : $\vec{n}\,.\vec{m} = 0$. Donc les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

b) On prend $\vec{I}\,(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $\vec{J}\,(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$, soit $\vec{K}\,(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

c) D'après les formules de changement de bases, en notant P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{\sqrt{6}}{6}Z \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{\sqrt{6}}{6}Z \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}X - 2\times\frac{\sqrt{6}}{6}Z \end{cases}$ et on a aussi :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+y+z) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ Z = \frac{\sqrt{6}}{6}(x+y-2z) \end{cases}.$$

Donc $(x + y + z)^2 = 3X^2$, $(-x + y)^2 = 2Y^2$ et $(2y + z)^2 = (\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2$.
Une équation de (Σ) dans le repère $\mathcal{R}'$ est donc : $3\alpha^2X^2 + 2\beta^2Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2 = 1$.

d) On en déduit que (Σ) est un cylindre d'axe dirigé par le vecteur $\vec{K}$.

2) $(\mathcal{E})$ a pour équation : $3\alpha^2X^2 + 2\beta^2Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2 = 1$, soit
$3(\alpha^2 + \gamma^2)X^2 - 2\gamma^2\sqrt{6}XY + 2(\beta^2 + \gamma^2)Y^2 = 1$.
La matrice associée à la forme quadratique $q(X, Y) = 3(\alpha^2 + \gamma^2)X^2 - 2\gamma^2\sqrt{6}XY + 2(\beta^2 + \gamma^2)Y^2$
est : $M = \begin{pmatrix} 3(\alpha^2+\gamma^2) & -\sqrt{6}\gamma^2 \\ -\sqrt{6}\gamma^2 & 2(\beta^2+\gamma^2) \end{pmatrix}$.
Par le théorème spectral, on sait que M admet deux valeurs propres réelles, que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont orthogonaux et que M est diagonalisable dans une base orthonormale $(\vec{I}', \vec{J}')$ constituée de vecteurs propres.

.

Après calculs, on trouve comme valeurs propres : $a' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 + \sqrt{\theta})$

et $b' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 - \sqrt{\theta})$ où $\theta = 9\alpha^4 + 4\beta^4 + 25\,\gamma^4 - 12\,\alpha^2\beta^2 - 4\,\beta^2\gamma^2 + 6\,\alpha^2\gamma^2$.

Un vecteur propre associé à a' est $\vec{U}(\sqrt{6}\,\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - a')$ et un vecteur propre associé à b' est $\vec{V}(\sqrt{6}\,\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - b')$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.

On pose : $\vec{I}' = \frac{1}{\|\vec{U}\|}\vec{U}$ et $\vec{J}' = \frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$. On sait de plus que : $a' + b' = \mathrm{Tr}(M) = 3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\,\gamma^2 > 0$

et que $a'b' = \det(M) = 6(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) > 0$. Donc on a : $0 < b' < a'$.

Dans la repère orthonormal $(O, \vec{I}', \vec{J}')$, $(\mathcal{E})$ a pour équation réduite : $a'\,X'^2 + b'\,Y'^2 = 1$.

$(\mathcal{E})$ est donc une ellipse et (Σ) un cylindre elliptique.

On pose $\vec{K}' = \vec{K}$, $a = \frac{1}{\sqrt{a'}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{b'}}$. On a : $0 < a < b$ et l'équation de (Σ) dans le repère orthonormal $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ est alors : $\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$.

3) a) On a :

$(*)\ \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}X'^2 - \frac{1}{b^2}Z'^2 = \left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right)$.

Soit $M \in (C_k)$; alors ses coordonnées (X', Y', Z') dans le repère $\mathcal{R}''$ vérifient :

$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$ et $\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k$.

Donc, en remplaçant dans (*), on obtient (**) : $1 - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = k\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right)$, soit

$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{a}X' + kb\,Z' = b^2$, soit $\left(X' + \frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{2a}\right)^2 + Y'^2 + \left(Z' + \frac{kb}{2}\right)^2 = \frac{b^2(k^2b^2 + 4a^2)}{4a^2}$.

Donc M appartient aussi à la sphère (S_k) de centre Ω_k de coordonnées $\left(-\frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{2a}, 0, -\frac{kb}{2}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}''$ et de rayon $R_k = \frac{b\sqrt{k^2b^2 + 4a^2}}{2a}$.

Réciproquement, si $M \in (S_k) \cap (P_k)$, on a la relation (**) et $\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k$, d'où :

$1 - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right) = \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$, donc

$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$. Donc $M \in (\Sigma)$. D'où l'égalité : $(C_k) = (P_k) \cap (\Sigma) = (P_k) \cap (S_k)$.

b) En tant qu'intersection d'un plan et d'une sphère, (C_k) est soit vide, soit un point, soit un cercle.

C'est un cercle ssi la distance d de Ω_k au plan (P_k) est strictement inférieure à R_k.

Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore, le rayon de (C_k), noté r_k,est égal à : $\sqrt{R_k^2 - d^2}$.

.

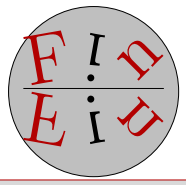
On a : $R_k = \dfrac{b\sqrt{k^2b^2+4a^2}}{2a}$ et $d = d(\Omega_k, (P_k)) = \dfrac{\left|-\dfrac{k(b^2-a^2)}{2a^2}+\dfrac{k}{2}-k\right|}{\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{a^2b^2}+\dfrac{1}{b^2}}} = \dfrac{kb^2}{2a}$.

D'où $R_k - d = \dfrac{b}{2a}\left(\sqrt{k^2b^2+4a^2}-kb\right) > 0$ car $a > 0$. Donc (C_k) est un cercle de rayon $r_k = b$.

c) Le rayon du cercle (C_k) est égal à la demi-longueur du grand axe de l'ellipse $(\mathcal{E})$.

On pouvait le prévoir puisque l'ellipse $(\mathcal{E})$ est l'image du cercle (C_k) par la projection orthogonale sur le plan d'équation $Z' = 0$.

Or, (C_k) est inclus dans le plan (P_k) dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{J}'$ aussi vecteur directeur du plan $Z' = 0$. Donc un diamètre de (C_k) dirigé selon $\vec{J}'$ a sa longueur inchangée par la projection orthogonale considérée.



Bonne Chance

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°21

Courbes
Une cardioïde et sa développée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Bonjour, vous avez rejoint la messagerie vocale d'aide psychiatrique.
Si vous êtes un obsessif-compulsif, appuyez sur le 1 sans arrêt.
Si vous êtes dépendant affectif, demandez à quelqu'un d'appuyer sur le 2 pour vous.
Si vous souffrez d'un désordre de personnalité multiple, appuyez sur les 3, 4, 5 et 6.
Si vous êtes paranoïaque, restez en ligne, nos agents tracent votre appel.
Si vous êtes schizophrène, écoutez attentivement et une voix vous dira sur quel numéro appuyer.

René Descartes (1596-1650)

Mathématicien, physicien et philosophe français. Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne, du mécanisme, de la géométrie analytique. Toutefois, certaines de ses théories ont par la suite été contestées (théorie de l'animal-machine) ou abandonnées (théorie des tourbillons ou des esprits-animaux). Sa méthode philosophique et scientifique affirme un dualisme substantiel entre l'âme et le corps. Il radicalise sa position en refusant d'accorder la pensée à l'animal, le concevant comme une « machine », c'est-à-dire un corps entièrement dépourvu d'âme. Cette théorie sera critiquée à l'époque des Lumières, notamment par Voltaire, Diderot et Rousseau.

Mathématicien du jour

Source : cnc 2007, PSI

Dans ce problème, $\mathbf{E}$ désigne un plan affine euclidien orient de direction $\overrightarrow{\mathbf{E}}$, et $(\mathbf{O},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$ un repère orthonormé direct de $\mathbf{E}$; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ se notera $(\vec{e_1}|\vec{e_2})$.
Un point $\mathbf{M}$ de $\mathbf{E}$ peut être repéré par ses coordonnes cartésiennes $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans le repère $(\mathbf{O},\vec{\mathbf{i}},\vec{\mathbf{j}})$, ou par ses coordonnes polaires $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\theta}$ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans $\mathbf{E}$ un arc $\boldsymbol{\gamma}$ birgulier et un point $\mathbf{M}$ de $\boldsymbol{\gamma}$, on note :
- $\mathbf{s}$ l'abscisse curviligne de $\mathbf{M}$ sur $\boldsymbol{\gamma}$,
- $\overrightarrow{\mathbf{T}}$ le vecteur unitaire tangent $\boldsymbol{\gamma}$ en $\mathbf{M}$ et $\overrightarrow{\mathbf{N}}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{\mathbf{T}},\overrightarrow{\mathbf{N}}}) = \dfrac{\pi}{2}$,
- $\mathbf{R}$ le rayon de courbure algébrique de $\boldsymbol{\gamma}$ en $\mathbf{M}$ et $\mathbf{I}$ le centre de courbure de $\boldsymbol{\gamma}$ en $\mathbf{M}$,
- $\vec{\mathbf{u}}(\theta)$ et $\vec{\mathbf{v}}(\theta)$ les vecteurs de $\overrightarrow{\mathbf{E}}$ défini par : $\vec{\mathbf{u}}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{v}}(\theta) = \vec{\mathbf{u}}(\theta + \dfrac{\pi}{2})$,
- $\mathbf{V}$ l'angle $(\widehat{\vec{\mathbf{u}}(\theta),\overrightarrow{\mathbf{T}}})$ et $\boldsymbol{\alpha}$ l'angle $(\widehat{\vec{\mathbf{i}},\overrightarrow{\mathbf{T}}})$.

1 Première partie

On considère l'arc γ_1 de $\mathbb{E}$ d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{E}$ définie par

$$\theta \longmapsto O + (1 + \cos\theta)\vec{u}(\theta).$$

1 a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.

b) Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie préciser.

c) Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0,\pi],\psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0,\pi]$.

2 préciser la nature du pôle O, point du support de γ_1 de paramètre π.

3 Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birgulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.

4 Étudier la fonction $\rho : \theta \longmapsto 1 + \cos\theta$ sur le segment $[0,\pi]$ et dresser son tableau de variations.

5 Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnes (unité : 3cm).

6 Calculer la longueur de l'arc γ_2.

7 Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1.

2 Deuxième partie

2.1 A- Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de $\mathbb{E}$ d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orient dans le sens des θ croissants.
On rappelle que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \dfrac{f}{f'}$.

1 Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ, distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et les angles θ, V et α.

2 Rappeler la définition de s et exprimer $\dfrac{ds}{d\theta}$ l'aide de f et f'.

3 Calculer $\dfrac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R.

4 Exprimer les coordonnes de I, centre de courbure de γ en M, dans le repère $(M,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$.

2.2 B- Retour l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 oriente dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1, distinct du pôle O, on associe le centre de courbure not $I(\theta)$.

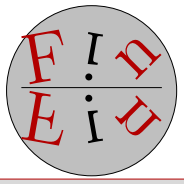
1 Préciser les coordonne de $\mathbf{I}(\theta)$ d'abord dans le repère $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{u}}(\theta), \vec{\mathbf{v}}(\theta))$ puis dans le repère $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$.

2 Montrer que le point $\mathbf{I}(\theta)$ est l'image du point $\mathbf{M}(\theta + \pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .

3 On note $\mathbf{H}(\theta)$ le projet orthogonal du point $\mathbf{I}(\theta)$ sur la droite $\big(\mathbf{OM}(\theta)\big)$ joignant les points $\mathbf{O}$ et $\mathbf{M}(\theta)$. Montrer que le point $\mathbf{H}(\theta)$ est l'image du point $\mathbf{M}(\theta)$ par une homothétie de centre $\mathbf{O}$ dont on précisera le rapport μ.

4 On note γ_I et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $\mathbf{I}(\theta)$ et son projet orthogonal $\mathbf{H}(\theta)$. Tracer les supports de γ_1, γ_I et γ_H sur le même graphique, et placer un point $\mathbf{M}(\theta)$ de γ_1 et les points $\mathbf{I}(\theta)$ et $\mathbf{H}(\theta)$ correspondant.

5 Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $\mathbf{H}(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimitée.



À la prochaine

Mamouni My Ismail

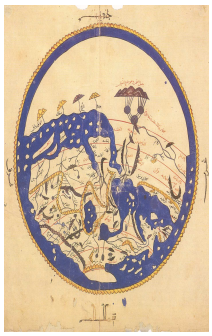
Corrigé Devoir Libre n°21 (Pr. Chabchi)

Courbes
Une cardioïde et sa développée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Bonjour, vous avez rejoint la messagerie vocale d'aide psychiatrique.
- Si vous êtes dépressif, le numéro sur lequel vous appuierez est sans importance, personne ne répondra.
- Si vous êtes un compulsif à la répétition, raccrochez et recomposez.
- Si vous êtes un agressif-passif, mettez-nous en attente.
- Si vous êtes antisocial, arrachez le téléphone du mur.
- Si vous avez des difficultés d'attention, ne vous occupez pas des instructions.



Charif Al Idrissi (1100-1165)

géographe et botaniste almoravides, né à Ceuta, de son nom complet Abu Abdallah Muhammad Ibn Muhammad Ibn Abdallah Ibn Idriss al-Qurtubi al-Hassani. Il doit sa renommée à la rédaction d'un ouvrage de géographie descriptive intitulé Kitâb Nuzhat al Mushtâq ou Kitâb Rudjâr. Le roi normand Roger II de Sicile l'aurait appelé à sa cour pour y réaliser un grand planisphère en argent (voir image). En matière de plantes médicinales, son Kitab al-Jami-li-Sifat Ashtat al-Nabatat (Livre rassemblant les descriptions fragmentaires des plantes) témoigne de ses connaissances approfondies en botanique.

Mathématicien du jour

PARTIE I

1. .

   (a) Le domaine de définition de ρ est $\mathbb{R}$ et ρ est $2\pi-$périodique.

   (b) Par parité de la fonction cosinus, ρ est aussi paire, donc l'arc γ_1 est symétrique par rapport à l'axe $\left(O\,\vec{\mathbf{i}}\right)$.

   (c) Le support de γ_1 est obtenu en prenant le support de γ_2 union son symétrique par rapport à l'axe $\left(O\,\vec{\mathbf{i}}\right)$.

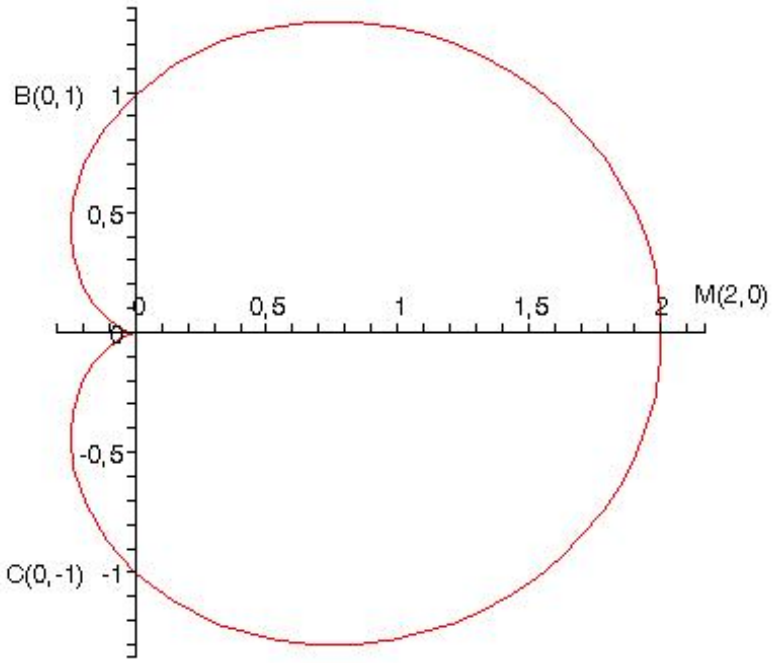
2. Le pôle O est paramétré par $\theta=\pi$, de plus $\rho(\pi)=\rho'(\pi)=0$ et $\rho''(\pi)=-\cos(\pi)=1\neq 0$. Puisque 2 est pair alors le pôle O est un point de rebroussement du premier espèce et la tangente est porté par $\vec{u}(\pi)$, càd horizontale.

3. Soit $M_0=\phi(\theta_0)$ un point de γ_1 autre que le pôle O, donc $\theta_0\in[0,2\pi]$ avec $\theta_0\neq\pi$. On a alors

   $\rho^2(\theta_0)+2\left(\rho'(\theta_0)\right)^2-\rho(\theta_0)\rho''(\theta_0)=3(1+\cos(\theta_0))>0$. Ainsi la concavité de γ_1 en M_0 est tournée vers le pôle O (ou contient le pôle O) .

4. On a la fonction ρ est dérivable sur $[0,\pi]$ et $\rho'(\theta)=-\sin(\theta)\leq 0$. Donc est décroissante sur $[0,\pi]$: elle décroit de la valeur $\rho(0)$ =2 à la valeur $\rho(\pi)$ =0.

5. Le tracé est ci-contre :



- La tangente à l'origine est horizontale
- Le point $M(2,0)$ est paramétré par $\theta = 0$, puisque $\rho(0) = 2 \neq 0$ et $\rho'(0) = 0$, la tangente est alors portée par $v(0) = \vec{j}$ càd verticale.
- Le point $B(0,1)$ est parmétré par $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, puisque $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\rho'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. Si $V\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\vec{u}\left(\dfrac{\pi}{2}\right), \vec{T}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ désigne l'angle que le vecteur $\vec{u}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ avec le vecteur tangent, alors ici $\tan\left(V\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$, donc $V\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. Dans $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ cette tangente a pour équation : $y = x + 1$
- Par symètrie, la tangente en $C(0,-1)$ dans $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ a pour équation : $y = -x - 1$.

6. L'arc γ_1 étant de classe C^1, donc sa longueur $l(\gamma_1)$ est donnée par : $l(\gamma_1) = \displaystyle\int_0^{2\pi} ||\phi'(\theta)||d\theta = 2\int_0^{\pi} ||\phi'(\theta)||d\theta$ par symétrie, donc

$$l(\gamma_1) = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2(\theta) + (1+\cos(\theta))^2}d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos(\theta))}d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 8$$

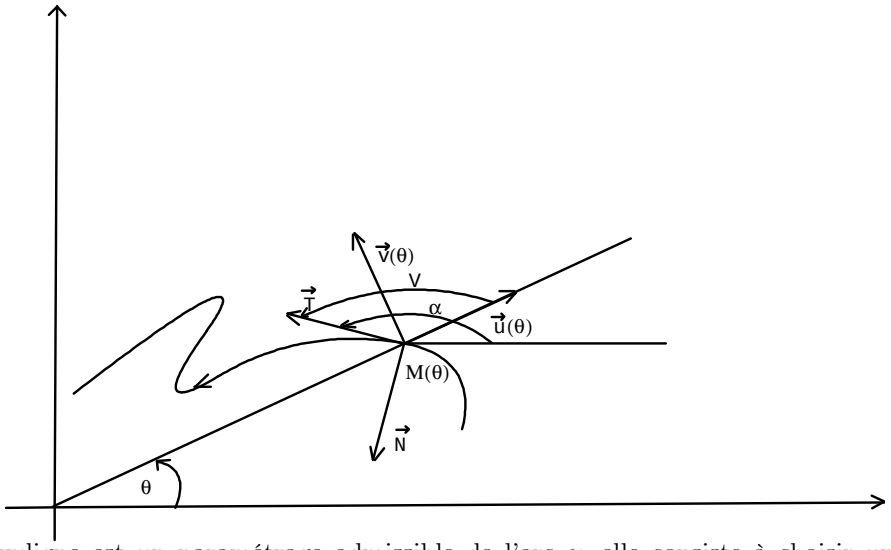
7. L'aire cherché est donnée par la formule de Green-Reimman en polaire: $\text{Aire}(\gamma_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\overleftarrow{\partial\gamma_1}} \rho^2 d\theta$: il s'agit ic d'intégrale curviligne, où $\overleftarrow{\partial\gamma_1}$ désigne la fronière de γ_1 orienté dans le sens direct.

Donc $\text{Aire}(\gamma_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} (1+\cos(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos(\theta) + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$.

PARTIE II

A- Questions de cours

1. Voir figure ci-contre : (permettez mes outils de dessin vectoriel modestes!)



2. L'abscisse curvuligne est un paramétrage admissible de l'arc γ, elle consiste à choisir une origine et de paramétrer chaque point par la longueur (algébrique) de l'arc joignant ce point à l'origine. dans ce cas la courbe est parcourue à vitesse uniforme valant 1.

   On choisit pour origine $\theta = 0$, et on oriente γ dans le sens des θ croissant. Alors $s(\theta) = \int_0^\theta ||(f(t)\vec{u}(t))'||dt = \int_0^\theta \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}dt$ et $\frac{ds}{d\theta}(\theta) = \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}$.

3. D'abord la fonction angulaire V est dérivable selon le théorème de relévement, et en dérivant la relation : $\tan(V(\theta)) = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$, on obtient :

   $V'(\theta)\left(1 + \tan^2(V(\theta))\right) = \frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)}$. D'où $V'(\theta) = \frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)} \times \frac{1}{1 + \frac{f^2(\theta)}{f'^2(\theta)}} = \frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)}$.

   Par ailleurs (à la physicienne, que l'on justifie mathématiquement à l'aide de dérivée de composée), on a $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta}\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \times \left(\frac{d\alpha}{d\theta}\right)^{-1}$, or $\alpha = V + \theta$, donc $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = 1 + \left(\frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)}\right)$, ainsi

   $\frac{d\alpha}{d\theta}(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{(f^2(\theta) + f'^2(\theta))}$ et par suite : $R(\theta) = \frac{\left(f^2(\theta) + f'^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}$.

4. On a $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, donc les coordonnées de M dans le repère mobile $(M, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ sont $\left(\cos\left(V + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(V + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ $(-\sin V, \cos V)$ où V désigne l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{T}}\right)$.

B - Retour à l'arc γ_1

1. L'arc γ_1 privé de son pôle O est décrit lorsque θ parcourt l'intervalle $]-\pi, \pi[$, il est un arc birégulier. Commençons par déterminer l'abscisse curviligne orienté d'origine $\theta = 0$, puis la normale et le rayon de courbure :

   - $s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}dt = \int_0^\theta \sqrt{4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $s'(\theta) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$
   - Vecteur tangent et normal : On a $\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))} = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))}$,

     Ainsi $V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = V + \theta = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -\sin V \\ \cos V \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))} = \begin{pmatrix} -\cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))}$

.

- Rayon de courbure : $R=\dfrac{ds}{d\alpha}=\dfrac{ds}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{d\alpha}=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
- Enfin $\overrightarrow{MI}=R\overrightarrow{N}$, donc $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+R\overrightarrow{N}=\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\0\end{pmatrix}_{\left(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta)\right)}+\dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix}-\cos\dfrac{\theta}{2}\\-\sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}_{\left(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta)\right)}$,

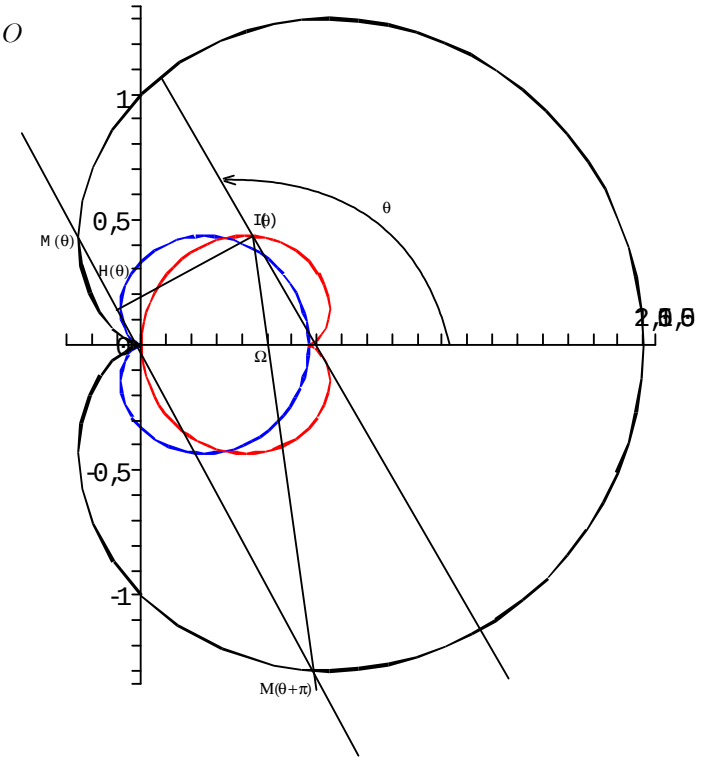
  d'où
  $\overrightarrow{OI}(\theta)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\-2\sin\theta\end{pmatrix}_{\left(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta)\right)}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2+\cos\theta\,(1-\cos\theta)\\\sin\theta\,(1-\cos\theta)\end{pmatrix}_{\left(\vec{i},\vec{j}\right)}$

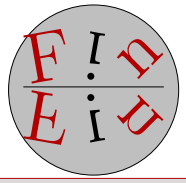
2. On a $\overrightarrow{OM}(\theta+\pi)=\begin{pmatrix}-\cos\theta\,(1-\cos\theta)\\-\sin\theta\,(1-\cos\theta)\end{pmatrix}_{\left(\vec{i},\vec{j}\right)}$, alors le rapport de cette homothétie est $\lambda=-\dfrac{1}{3}$. Si $\Omega=(a,b)$ désigne les coordonées de son centre dans le repère fixe $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, alors on aura $\overrightarrow{\Omega I}(\theta)=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}(\theta+\pi)$, donc $\overrightarrow{\Omega O}+\overrightarrow{OI}(\theta)=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega O}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}(\theta+\pi)$, en identifiant les coordonnées, en obtient $a=\dfrac{1}{2}$ et $b=0$. Ainsi le centre de cette homothétie est : $\Omega=\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

3. On a $\overrightarrow{OI}(\theta)=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\cos\theta\\-2\sin\theta\end{pmatrix}_{\left(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta)\right)}$, donc $\overrightarrow{OH}(\theta)=\dfrac{1}{3}(1+\cos\theta)\,\vec{u}(\theta)$. Ainsi $H(\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

4. Voir figure ci-dessous (Merci Maple) : En noir la cardioïde γ_1, en rouge sa développée γ_I et en bleu la courbe γ_H. (Attention Daltoniens ...)

5. Puisque γ_H se déduit de γ_1 par homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$, alors selon I-(6) et I-(7), on a :
   $l(\gamma_H)=\dfrac{1}{3}l(\gamma_1)=\dfrac{8}{3}$ et $\text{Aire}(\gamma_H)=\dfrac{1}{3}\text{Aire}(\gamma_1)=\dfrac{\pi}{2}$





À la prochaine

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°22

Courbes & Surfaces

MP-CPGE Rabat

MATHEMATIQUES 1

Blague du jour

- Qu'est ce qu'un taureau avec un sac à main ?
- Un vache folle
- Qu'ce qu'est un oiseau migrateur ?
- C'est un oiseau qui se gratte que d'un côté.
- Qu'est-ce qu'on obtient si on croise un pitbull et un yorkshire ?
- Un yorkshire mort...

Joseph Liouville (1809-1882)

Mathématicien du jour

Mathématicien français. Diplômé de l'École Polytechnique et de l'École des ponts et chaussées, il préfère suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Liouville publia dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie. Il fut le premier à reconnaitre les travaux inédits d'Évariste Galois

* * *

Source : CCP 2009, TSI

Exercice

On désigne par r un nombre réel strictement compris entre 0 et 1.

1. (a) Justifier la convergence de la série de terme général $u_n(r) = r^n \cos(n\theta)$.

   (b) Calculer la somme de la série : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \cos(n\theta)$.

2. On pose $f(r,\theta) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2}$.

   (a) Justifier l'existence de $f(r,\theta)$ pour $r \in]0;1[$ et tout θ réel.

   (b) Déduire de la question précédente l'égalité :

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta)+r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta) \ .$$

Problème

Première partie

1. Résoudre, sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle : $\sin(2t)f'(t) - \cos(2t)f(t) = 0$.

.

2. En utilisant la méthode de variation de la constante, déterminer, sur l'intervalle $I =]0; \frac{\pi}{2}[$, la solution générale de l'équation différentielle : $\sin(2t)f'(t) - \cos(2t)f(t) = (\sin(2t))^{3/2}$.

Deuxième partie

a désigne un nombre réel strictement positif, k un nombre réel.
Si M et N sont deux points du plan, on note $d(M,N)$ la distance euclidienne des points M et N.
$\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ et on désigne par A et B les points de coordonnées $(-a,0)$ et $(a,0)$.

1. (a) Déterminer une équation cartésienne de la courbe (C), formée de l'ensemble des points M de coordonnées (x,y), tels que : $d(A,M)d(B,M) = k^2$.
   (b) Écrire cette équation en coordonnées polaires : $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$.
2. (a) En posant $R = r^2$, déterminer l'équation vérifiée par R.
   (b) Discuter l'existence et le signe des solutions réelles de cette équation en R. Préciser en particulier une condition portant sur a, k et θ pour que cette équation admette deux racines positives.
   Indication : il n'est pas utile de calculer explicitement les racines, on connaît leur somme et leur produit.
   (c) Montrer que, dans le cas où cette relation est satisfaite, la courbe (C) est la réunion de 4 courbes admettant une équation polaire de la forme $\theta \to r_i(\theta)$, r_i étant une fonction. Déterminer les fonctions r_i.
   (d) Déterminer les diverses symétries de la courbe (C) et en déduire un intervalle d'étude qui permet d'obtenir toute la courbe par des opérations géométriques que l'on précisera.
   Le tracé n'est pas demandé.
3. (a) Vérifier que dans le cas particulier où $k = \pm a$, une équation polaire de la courbe (C) est : $r(\theta) = \pm a\sqrt{2\cos(2\theta)}$.
   Étudier les diverses symétries de la courbe.
   (b) Donner une allure de la courbe (C) dans le cas particulier où $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Troisième partie

$\mathbb{R}^3$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
θ appartenant à $[0;2\pi[$, on désigne par $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$, ou simplement $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{u}(\theta) &= \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\\ \vec{v}(\theta) &= -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}\end{aligned}$$

Soit un point M de $\mathbb{R}^3$, on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ et par (r,θ) les coordonnées polaires du point m.
On appelle coordonnées cylindriques du point M le triplet (r,θ,z) et repère cylindrique le repère $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{k})$.

1. (a) Exprimer les coordonnées (x,y,z) d'un point M en fonction de ses coordonnées cylindriques (r,θ,z).
   (b) On suppose que $\overrightarrow{OM} = X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Exprimer X, Y, Z en fonction de x, y, z et θ.
   (c) Exprimer les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ puis les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\theta}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

(d) Que peut-on dire du repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$?

On désigne par (Σ) la surface d'équation cartésienne : $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

2. (a) Déterminer une équation de la surface (Σ) en coordonnées cylindriques. En déduire une nappe paramétrée, $(r, \theta) \to M(r, \theta)$, dont l'image est la surface (Σ).

Pour toute la suite du problème, on identifie la nappe paramétrée et la surface.

(b) Montrer que la surface est contenue dans la partie de $\mathbb{R}^3$ comprise entre deux plans parallèles dont on donnera une équation.

(c) Montrer que la surface (Σ) est une réunion de droites parallèles au plan d'équation $z = 0$.

3. (a) Montrer qu'un vecteur normal $\overrightarrow{N}(r, \theta)$ à la nappe paramétrée $(r, \theta) \to M(r, \theta)$, $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0; 2\pi[$, est égal à : $r\vec{k} + 2\sin(2\theta)\vec{v}(\theta)$.

(b) En déduire une équation, dans le repère cylindrique, du plan tangent Π_M à (Σ) au point M de coordonnées cylindriques $(r, \theta, \cos(2\theta))$.

(c) Retrouver l'équation de Π_M en utilisant uniquement les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial \theta}(r, \theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial r}(r, \theta)$.

(d) Montrer que l'intersection de (Σ) et de Π_M contient la droite horizontale passant par le point de coordonnées cylindriques $(0, 0, \cos(2\theta))$

4. Déterminer une équation du plan tangent à (Σ) dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Quatrième partie

On dit qu'une courbe de $\mathbb{R}^3$, définie par un arc paramétré $t \to M(t)$, défini d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, est tracée sur la surface (Σ) si et seulement si le point $M(t)$ appartient à (Σ), pour tout t appartenant à I.

1. (a) L'arc paramétré Γ est défini en coordonnées cylindriques par une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, $t \to (r(t), \theta(t), z(t))$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le point M appartienne à la surface (Σ).

On désigne par (Γ) la courbe formée par l'ensemble des images de l'arc paramétré Γ.

(b) On suppose que l'arc paramétré $t \to M(t)$ est de classe C^1 au moins (ce qui signifie que les fonctions $t \to r(t)$, $t \to \theta(t)$ et $t \to z(t)$ sont de classe C^1) et que la courbe (Γ) est tracée sur la surface (Σ). Soit M un point régulier de la courbe. Démontrer que la tangente en M à la courbe (Γ) est contenue dans le plan tangent en M à la surface (Σ).

(c) Retrouver le résultat de la question 3.(d) de la troisième partie à l'aide de la question précédente.

2. On suppose, jusqu'à la fin du problème, que (Γ) est définie par un arc paramétré de classe C^2 au moins.

On suppose de plus que la courbe est définie par une fonction $\theta \to r(\theta)$, c'est-à-dire, dans le repère cylindrique, par l'arc paramétré : $\theta \to M(r(\theta), \theta, \cos(2\theta))$. Cette courbe est donc tracée sur la surface (Σ).

Donner une expression du vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$ dans le repère cylindrique, puis des vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$.

.

3. En tout point $M(\theta)$ de l'arc paramétré Γ tel que les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$ soient linéairement indépendants, on appelle plan osculateur à la courbe (Γ) en ce point, le plan affine : $\left(M(\theta), \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta), \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)\right)$, qui sera noté P_M.

   On appelle ligne asymptotique de la surface (Σ) une courbe tracée sur (Σ) telle qu'en tout point M de la courbe, le plan tangent Π_M à la surface coïncide avec le plan osculateur P_M à la courbe.

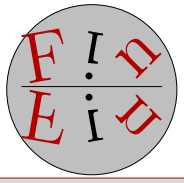
   (a) À quelle condition nécessaire et suffisante, portant sur les vecteurs $\overrightarrow{N}(r(\theta),\theta)$, $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2M}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)$, la courbe (Γ) est-elle une ligne asymptotique de (Σ) ?

   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ), sous forme d'une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la fontion r.

   (c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la courbe (Γ) soit une ligne asymptotique de (Σ) portant sur les vecteurs $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\theta}(r(\theta),\theta)$. Retrouver alors l'équation différentielle précédente.

4. Déterminer les projections sur le plan horizontal des lignes asymptotiques de (Σ).

Fin de l'énoncé



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°22 (Pr. Bergeron)

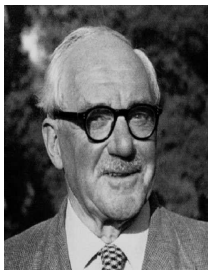
Courbes & Surfaces

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

● Comment appelle t-on un chien sans pattes ? On ne l'appelle pas, on va le chercher !

● Un vieux rat rencontre une petite taupe. Curieux, il lui demande :
- Que veux-tu faire plus tard, ma petite ?
- Taupe-modèle !!



John Edensor Littlewood (1885-1977)

Mathématicien anglais. Il a surtout travaillé en analyse sur le sujet des fonctions entières. Il a collaboré pendant de nombreuses années avec Hardy et ils ont formulé ensemble deux conjectures. Il a aussi travaillé sur la théorie de Fourier. Il est lauréat de la Médaille Sylvester, de la Royal Medal et de la médaille Copley en 1958.

Mathématicien du jour

Exercice:

1-a) $\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n(r)| = r^n.|\cos(n\theta)| \leq r^n$.

La série géométrique $\sum r^n$ converge car $|r| < 1$.

Par comparaison, la série $\sum u_n(r)$ est absolument convergente donc convergente.

1-b) $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n(r) = Re[(r.e^{i\theta})^n]$.

La série $\sum (r.e^{i\theta})^n$ est une série géométrique de raison $r.e^{i\theta}$ avec $|r.e^{i\theta}| = r < 1$.

Cette série est donc convergente et a pour somme $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(r.e^{i\theta})^n = \frac{1}{1-r.e^{i\theta}}$.

Par suite, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n.\cos(n\theta) = Re\left(\frac{1}{1-r.e^{i\theta}}\right) = Re\left(\frac{1}{1-r.\cos\theta - i.r.\sin\theta}\right) = Re\left(\frac{1-r.\cos\theta + i.r.\sin\theta}{1-2r.\cos\theta + r^2}\right)$

D'où $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n.\cos(n\theta) = \frac{1-r.\cos\theta}{1-2r.\cos\theta + r^2}}$.

2-a) $f(r,\theta)=\dfrac{1-r.\cos\theta}{1-2r.\cos\theta+r^2}$ existe si et seulement si $1-2r.\cos\theta+r^2\neq 0$.

$1-2r.\cos\theta+r^2=0 \Leftrightarrow 1-2r.\cos\theta+r^2.\cos^2\theta+r^2.\sin^2\theta=0 \Leftrightarrow (1-r.\cos\theta)^2+(r.\sin\theta)^2=0$

Donc $1-2r.\cos\theta+r^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} r.\sin\theta=0 & (a)\\ r.\cos\theta=1 & (b)\end{cases}$

Comme $r\neq 0$, (a) $\Leftrightarrow \theta\in\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos\theta=\pm 1$.
Comme $|r|<1$, cette condition est incompatible avec (b).

Par suite: $\boxed{\forall r\in]0,1[,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ f(r,\theta)=\dfrac{1-r.\cos\theta}{1-2r.\cos\theta+r^2} \text{ existe}}$.

2-b) $\forall r\in]0,1[,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ 1+2\sum_{n\geq 1} r^n.\cos(n\theta)=1+2\left[\sum_{n\geq 0} r^n.\cos(n\theta)-1\right]=-1+\dfrac{2(1-r.\cos\theta)}{1-2r.\cos\theta+r^2}$

$\forall r\in]0,1[,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ 1+2\sum_{n\geq 1} r^n.\cos(n\theta)=\dfrac{-1+2r.\cos\theta-r^2+2-2r.\cos\theta}{1-2r.\cos\theta+r^2}$

Donc: $\boxed{\forall r\in]0,1[,\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ 1+2\sum_{n\geq 1} r^n.\cos(n\theta)=\dfrac{1-r^2}{1-2r.\cos\theta+r^2}}$.

Problème

Première partie

I-1) On note (H) l'équation différentielle $\sin(2t).f'(t)-\cos(2t).f(t)=0$.
Si $t\in]0,\pi/2[$ alors $2t\in]0,\pi[$ et $\sin(2t)>0$ donc $\sin(2t)\neq 0$.
Sur $]0,\pi/2[$, (H) $\Leftrightarrow f'(t)-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}f(t)=0$.
C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre résolue en f'.
Si $a(t)=-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$ alors $A(t)=-\dfrac{1}{2}\ln[\sin(2t)]$ est une primitive de a sur $]0,\pi/2[$
et la solution générale de (H) sur $]0,\pi/2[$ est $f(t)=\lambda.e^{-A(t)}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

La solution générale de (H) sur $]0,\pi/2[$ est donc $\boxed{f(t)=\lambda\sqrt{\sin(2t)},\ \lambda\in\mathbb{R}}$.

I-2) On note (E) l'équation différentielle $\sin(2t).f'(t)-\cos(2t).f(t)=(\sin(2t))^{3/2}$.
Sur $]0,\pi/2[$, (E) $\Leftrightarrow f'(t)-\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}f(t)=\sqrt{\sin(2t)}$.
C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en f'.
On cherche les solutions de (E) sous la forme $f(t)=\lambda(t).\sqrt{\sin(2t)}$.
Il vient: $\lambda'(t).\sqrt{\sin(2t)}=\sqrt{\sin(2t)}$ soit $\lambda'(t)=1$ et $\lambda(t)=t+k$, $k\in\mathbb{R}$.

La solution générale de (E) sur $]0,\pi/2[$ est donc $\boxed{f(t)=(t+k)\sqrt{\sin(2t)},\ k\in\mathbb{R}}$.

Deuxième partie

II-1.a) $d(AM).d(BM)=k^2 \Leftrightarrow \boxed{[(x+a)^2+y^2][(x-a)^2+y]=k^4}$ (*)

II-1.b) (*) $\Leftrightarrow (x^2+y^2+a^2+2ax)(x^2+y^2+a^2-2ax)=k^4$
(*) $\Leftrightarrow (r^2+a^2+2ar.\cos\theta)(r^2+a^2-2ar.\cos\theta)=k^4$
(*) $\Leftrightarrow \boxed{(r^2+a^2)^2-4a^2.r^2.\cos^2\theta=k^4}$.

II-2.a) Si on pose $R = r^2$, il vient $(R + a^2)^2 - 4a^2.R.\cos^2\theta = k^4$
ou encore $R^2 + 2a^2.R.(1 - 2\cos^2\theta) + a^4 - k^4 = 0$.
Comme $2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$,
R est solution de l'équation du second degré: $\boxed{R^2 - 2a^2.R.\cos(2\theta) + a^4 - k^4 = 0}$ (1).

II-2.b) → Pour cette équation du second degré, $\Delta = 4a^4.\cos^2(2\theta) - 4a^4 + 4k^4 = 4[k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)]$.
Donc $\boxed{\text{(1) admet des racines réelles ssi } k^4 \geq a^4.\sin^2(2\theta)}$.

→ Dans ce cas, leur produit vaut $a^4 - k^4$ et leur somme vaut $2a^2.\cos(2\theta)$.
Pour avoir deux racines positives, on obtient les conditions $\boxed{\begin{cases} a^4.\sin^2(2\theta) \leq k^4 \leq a^4 \\ \cos(2\theta) \geq 0 \end{cases}}$.

II-2.c) Si l'équation admet des racines réelles positives alors $R = r^2 = a^2.\cos(2\theta) \pm \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)} \geq 0$
donc $\boxed{r = \pm\sqrt{a^2.\cos(2\theta) \pm \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)}}}$

ce qui donne bien 4 courbes d'équations polaires respectives:

$r_1(\theta) = \sqrt{a^2.\cos(2\theta) - \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)}}$ $\qquad$ $r_2(\theta) = \sqrt{a^2.\cos(2\theta) + \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)}}$
$r_3(\theta) = -r_1(\theta)$ et $r_4(\theta) = -r_2(\theta)$.

II-2.d) Il faut tenir compte de la condition $\cos(2\theta) \geq 0$ pour préciser l'intervalle d'étude.

→ Les quatre fonctions r_i étant π-périodiques, on se restreint à une étude sur $[-\pi/4, \pi/4]$
suivie d'une symétrie par rapport au point O (rotation de centre O et d'angle π).

→ Ces quatre fonctions étant paires, on peut encore se restreindre à $[0, \pi/4]$
puis faire une symétrie par rapport à l'axe polaire suivie de la symétrie par rapport au pôle.

II-3.a) Si $k = \pm a$, il vient $r = \pm\sqrt{a^2.\cos(2\theta) \pm a^2\sqrt{1 - \sin^2(2\theta)}} = \pm a\sqrt{\cos(2\theta) \pm \cos(2\theta)}$
On obtient donc $\boxed{r = \pm a\sqrt{2\cos(2\theta)}}$ car la valeur $r = 0$ est atteinte pour $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

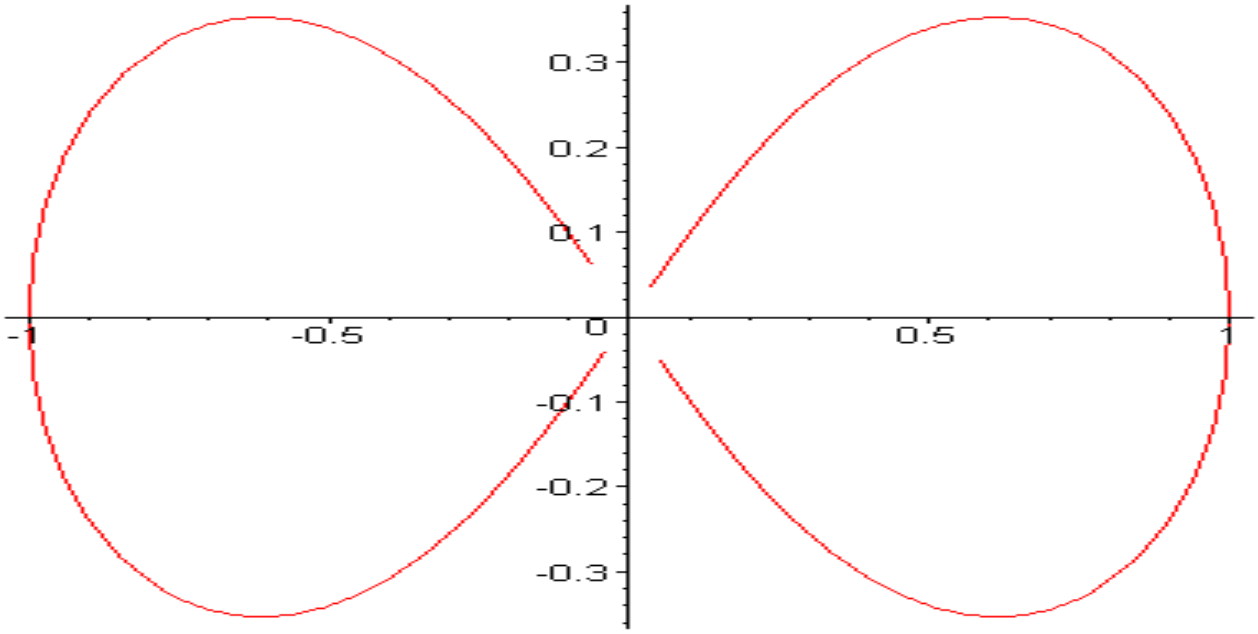
On retrouve, pour ce cas particulier, les symétries précédentes:
→ par rapport à O par π-périodicité,
→ par rapport à $(O, \vec{i})$ par parité,
→ par rapport à $(O, \vec{j})$ par combinaison des deux précédentes.

II-a.b) → Les symétries permettent de se limiter à l'étude de $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ sur $[0, \pi/4]$.
→ Sur cet intervalle, $\cos(2\theta)$ décroit de 1 à 0 donc r décroit de 1 à 0 en restant positif.
Note: $r' = -\dfrac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$

→ Pour $\theta = 0$, la courbe passe par le point I(1, 0).
Sa tangente dans le repère mobile est dirigée par $\vec{T}$ (0, 1)
ce qui donne une tangente verticale.

→ Si $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, la courbe passe par le pôle et la tangente est la droite $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

.



Troisième partie

III-1.a) $\boxed{\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = z \end{cases}}$.

III-1.b) $X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\Leftrightarrow (X.\cos\theta - Y.\sin\theta)\vec{i} + (X.\sin\theta + Y.\cos\theta)\vec{j} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X.\cos\theta - Y.\sin\theta = x \\ X.\sin\theta + Y.\cos\theta = y \\ Z = z \end{cases}$ car $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une famille libre

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} X = x.\cos\theta + y.\sin\theta \\ Y = -x.\sin\theta + y.\cos\theta \\ Z = z \end{cases}}$.

III-1.c) $\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta.\vec{u} - \sin\theta.\vec{v} \\ \vec{j} = \sin\theta.\vec{u} + \cos\theta.\vec{v} \end{cases}}$.

$\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial\theta} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j} = \vec{v}$ et $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial\theta} = -\cos\theta.\vec{i} - \sin\theta.\vec{j} = -\vec{u}$ donc $\boxed{\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial\theta} = \vec{v} \text{ et } \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial\theta} = -\vec{u}}$.

III-1.d) La matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est la matrice de la rotation d'angle θ et d'axe $(O, \vec{k})$.
C'est donc une matrice orthogonale de déterminant égal à +1.
Comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe,
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est aussi une base orthonormale directe.
Par suite $\boxed{(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \text{ est un repère orthonormal direct}}$.

III-2.a) Il est nécessaire d'exclure les points de l'axe $(O, \vec{k})$ pour que le calcul de z ait un sens donc on travaillera avec $r \in \mathbb{R}^*$.

$z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ s'écrit $z = \dfrac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2}$ soit $\boxed{z = \cos(2\theta)}$.

(Σ) apparaît donc comme l'image de la nappe paramétrée

$$\boxed{(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi[\longmapsto M \begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = \cos(2\theta) \end{cases}}.$$

III-2.b) $z = \cos(2\theta) \Rightarrow -1 \leq z \leq 1$.

Donc (Σ) est contenue dans la partie de $\mathbb{R}^3$ comprise entre les deux plans parallèles d'équation $z = -1$ et $z = 1$.

III-2.c) Pour une valeur fixée θ_0 de θ dans $[0, 2\pi[$, il vient $\begin{cases} x = 0 + \cos(\theta_0) \times r \\ y = 0 + \sin(\theta_0) \times r \\ z = \cos(2\theta_0) + 0 \times r \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}^*$.

C'est une représentation paramétrique de la droite $(C, \vec{U})$ avec $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2\theta_0) \end{pmatrix}$ et $\vec{U}\begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}$

privée du point C et cette droite est parallèle au plan d'équation $z = 0$.

Par suite: $\boxed{(\Sigma) \text{ est une réunion de droites parallèles au plan d'équation } z = 0}$.

III-3.a) Dans le repère cylindrique $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta), \vec{k})$, $M(r, \theta, z)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \cos(2\theta) \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}(\theta) + \cos(2\theta).\vec{k}$ donne $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta}(r, \theta) = r.\vec{v}(\theta) - 2.\sin(2\theta).\vec{k}$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial r}(r, \theta) = \vec{u}(\theta)$.

$\boxed{\vec{N}(r, \theta) = \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial r}(r, \theta) \wedge \dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta}(r, \theta) = 2.\sin(2\theta).\vec{v}(\theta) + r.\vec{k} \text{ est un vecteur normal à } (\Sigma) \text{ au point M}}$.

III-3.b) $P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Pi_M \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} r - X \\ -Y \\ \cos(2\theta) - Z \end{pmatrix} \perp \vec{N}(r, \theta) \Leftrightarrow -2.\sin(2\theta).Y + r.(\cos(2\theta) - Z) = 0$

Une équation de Π_M dans le repère cylindrique est donc: $\boxed{2.\sin(2\theta)Y + r.Z = r.\cos(2\theta)}$.

III-3.c) $P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Pi_M \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & X - r \\ 0 & r & Y \\ 0 & -2.\sin(2\theta) & Z - \cos(2\theta) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r & Y \\ -2.\sin(2\theta) & Z - \cos(2\theta) \end{vmatrix} = 0.$

Ce qui redonne l'équation $\boxed{2.\sin(2\theta)Y + r.Z = r.\cos(2\theta)}$.

İII-3.d) La droite dont il est question est celle définie à la question III-2.c.

Elle a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = \cos(2\theta) \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}^*$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

donc $\begin{cases} X = r \\ Y = 0 \\ Z = \cos(2\theta) \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}^*$ dans le repère cylindrique.

$\forall r \in \mathbb{R}^*$, $2.\sin(2\theta)\times 0 + r.\cos(2\theta) = r.\cos(2\theta)$ est une égalité vraie.

Donc tous les points de la droite appartiennent à Π_M.

Par suite: cette droite est incluse dans $(\Sigma) \cap \Pi_M$.

III-4) Soit $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ un point de (Σ),

le vecteur $\vec{N}' = (4ab^2, -4a^2b, -(a^2 + b^2)^2)$ est un vecteur normal à (Σ).

$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi_M \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} \perp \vec{N}' \Leftrightarrow \boxed{4ab^2.x - 4a^2b.y - (a^2 + b^2)^2.z + a^4 - b^4 = 0}$.

Quatrième partie

IV-1.a) Le point $M(r(t), \theta(t), z(t))$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ dans le repère cylindrique.

$\boxed{M \in (\Sigma) \Leftrightarrow z(t) = \cos[2\theta(t)]}$.

IV-1.b) $\overrightarrow{OM}(t) = r(t).\vec{u} + \cos[2\theta(t)].\vec{k}$.

Le point M étant régulier la tangente en M à (Γ) est dirigée par le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$.

$\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = r'(t).\vec{u} + r(t).\theta'(t).\vec{v} - 2\sin[2\theta(t)].\theta'(t).\vec{k}$.

$$\det\left(\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}, \frac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial r}\right) = \begin{vmatrix} r' & 0 & 1 \\ r.\theta' & r & 0 \\ -2.\sin(2\theta).\theta' & -2.\sin(2\theta) & 0 \end{vmatrix} = -2.r.\sin(2\theta).\begin{vmatrix} \theta' & 1 \\ \theta' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donc la tangente à (Γ) est contenue dans le plan Π_M.

IV-1.c) Soit θ_0 une valeur fixe dans $[0, 2\pi[$.

(Γ): $t \in I \longmapsto (r(t), \theta_0, \cos(2\theta_0))$ avec r de classe C^1 sur I définit un arc de classe C^1 tracé sur (Σ).

Au point $M(t_0)$, la tangente à (Γ) est dirigée par $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = r'(t).\vec{u}$ car $(\theta_0)' = 0$.

On retrouve la droite définie au III-2.c.

Cette droite est donc bien incluse dans $(\Sigma) \cap \Pi_M$.

IV-2) $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta).\vec{u} + \cos(2\theta).\vec{k}$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta).\vec{u} + r(\theta).\vec{v} - 2.\sin(2\theta).\vec{k}} \text{ et } \boxed{\frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) = [r''(\theta) - r(\theta)].\vec{u} + 2r'(\theta).\vec{v} - 4.\cos(2\theta).\vec{k}}.$$

IV-3.a) Le point M(θ) est commun aux deux plans P_M et Π_M.
On travaille dans le repère cylindrique.

→ $\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 2.\sin(2\theta) \\ r(\theta) \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Π_M.

→ $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta)\begin{pmatrix} r'(\theta) \\ r(\theta) \\ -2.\sin(2\theta) \end{pmatrix}$ et $\frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta)\begin{pmatrix} r''(\theta) - r(\theta) \\ 2r'(\theta) \\ -4.\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de P_M
et ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.

$$P_M = \Pi_M \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) & (3) \\ \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) & (4) \end{cases}$$

Donc $\boxed{(\Gamma) \text{ est une ligne asymptôtique de } (\Sigma) \text{ ssi } \begin{cases} \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) \\ \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) \end{cases}}$.

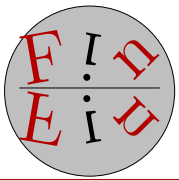
IV-3.b) (3) est toujours vraie.
(4) $\Leftrightarrow$ $\sin(2\theta).r'(\theta) - \cos(2\theta).r(\theta) = 0$ ce qui correspond à l'équation (H) de la partie I.
$\boxed{\text{La courbe } (\Gamma) \text{ est une ligne asymptotique de } (\Sigma) \text{ ssi } r \text{ est solution de l'équation (H)}}$.

IV-3.c) $\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)}{d\theta}.\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) + \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) = 0$

$$P_M = \Pi_M \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = 0 \\ \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\frac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)}{d\theta}.\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = 0$$

Comme $\frac{d\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)}{d\theta}\begin{pmatrix} -2.\sin(2\theta) \\ 4.\cos(2\theta) \\ r'(\theta) \end{pmatrix}$ et $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta)\begin{pmatrix} r'(\theta) \\ r(\theta) \\ -2.\sin(2\theta) \end{pmatrix}$
on retrouve la condition
$\boxed{(\Gamma) \text{ est une ligne asymptôtique de } (\Sigma) \Leftrightarrow r \text{ est solution de l'équation (H)}}$.

IV-4) Si (Γ) est une ligne asymptôtique de (Σ), alors la projection de (Γ) sur le plan d'équation $z = 0$ est $\boxed{\text{une courbe d'équation polaire } r(\theta) = \lambda\sqrt{\sin(2\theta)},\ \lambda \in \mathbb{R}}$.



À la prochaine

C54B

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°23

Séries entières DSE et Equa. Diff la Fonction Gamma

MP-CPGE Rabat

Epreuve de Mathématiques B MP

Blague du jour

Un polytechnicien (ou un centralien, voire pire : un normalien) passe un entretien d'embauche : Bien monsieur, demande le patron, j'aimerais que vous comptiez jusqu'à dix.
- Si vous voulez. Mais dans quelle corps dois-je compter ?
- Ben vous comptez, voilà !
- Oui, mais dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^*$? Doit-on considérer ce corps comme commutatif ou pas ? La loi de composition interne est-elle + ou . ?

Al-Qalasadi (1412(al-Andalus)-1486(Tunisie))

Mathématicien du jour

de son nom complet Abou Al Hassan ibn Ali ibn Muhammad al-Qalasadi. Son innovation au symbolisme algébrique est d'utiliser des lettres en mathématiques. L'inconnue dans une équation est appelée la chose (chay). $\mathbf{12x}$ s'écrivait , $\mathbf{6x^2}$: , $\sqrt{7}$: , $\sqrt{9} = 3$:
Al-Qalasadi a écrit plusieurs livres sur l'arithmétique et un sur l'algèbre. Son important traité s'appelle Al-Tabsira fi'lm al-hisab (Éclaircissement de la science de l'arithmétique).

Exercice 1

1 Problème 1 : e3a 2004, MP

On considère l'équation différentielle :

$$y' + 2xy = 1 \qquad (E)$$

On considère la fonction g de la variable réelle x définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

1. Montrer que g est impaire.
2. Montrer que g est solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire en fonction de g toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Soit $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ une solution développable en série entière de l'équation différentielle (E).

(a) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

(b) Déterminer a_1. Expliciter les coefficients a_{2i+1} pour $i \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par la valeur de a_0, et exprimer les coefficients a_{2i}, pour tout $i \in \mathbb{N}$, en fonction de a_0.

(d) Réciproquement, on considère une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall i \geq 0, \quad (i+2)a_{i+2} + 2a_i = 0.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

(e) Expliciter le développement en série entière de g.

5. On considère les fonctions g_1 et g_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; g_1(x) = e^{-x^2} \;\text{ et }\; g_2(x) = \int_0^x e^{t^2} dt.$$

(a) Expliciter le développement en série entière des fonctions g_1 et g_2.

(b) En déduire le le développement en série entière de la fonction $g_1 g_2$ à l'aide d'un résultat dont on rappellera l'énoncé. En déduire la relation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2j+1} C_k^j = \frac{4^k (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Exercice 2

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On le munit du produit scalaire euclidien canonique $<\ ,\ >$ et de la norme euclidienne associée $\|\ \ \|$, c'est à dire : pour tout $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$< v, w >= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \;\text{ et }\; \|v\| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

On remarquera que $< v, w >= (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$.

2 Problème 2 : CNC 2007, PSI

Définitions : Pour tout ce problème, on définit une famille d'équations différentielles $(\mathsf{F}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x} y' - (1 + \frac{\lambda^2}{x^2}) y = 0. \qquad (\mathsf{F}_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions valeurs réelles.

Les deux parties du problème sont largement indépendantes.

.

2.1 Partie I

1 Soit x un réel.

a) Étudier, selon les valeurs de x, l'intégrabilité sur l'intervalle $]0,1]$ de la fonction

$$t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

b) Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2 À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$?

3 On pose $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$, $z \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(z) > 0$.

a) Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$; montrer que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

b) En déduire, pour tout rel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'identité

$$\Gamma(\alpha+p+1) = (\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1).$$

c) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

d) Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier naturel n.

4 Soit z un complexe tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt.$$

Cette formule permet de prolonger la fonction Γ la partie $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ du plan complexe.

5 Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$ et qu'elle y est continue.

6 Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

a) Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t.

b) Montrer que

$$\forall x \in [a,b], \quad 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

c) En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

2.2 Partie II

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0,R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

1 On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\alpha^2 = \lambda^2, \quad \big((\alpha+1)^2 - \lambda^2\big)a_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall\, n \geq 2,\ \big((\alpha+n)^2 - \lambda^2\big)a_n = a_{n-2}.$$

2 On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.

a Montrer que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0\Gamma(\alpha+1)}{2^{2p}p!\Gamma(\alpha+p+1)}.$$

b Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

c Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$ alors

$$\forall\, x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ en 0.

3 On suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$; si $p \in \mathbb{N}^*$, on note le produit $(\alpha+p)(\alpha+p-1)\dots(\alpha+1)$ par $\dfrac{\Gamma(\alpha+p+1)}{\Gamma(\alpha+1)}$ si $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,\dots\}$.

a En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

b Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, est libre et décrire l'ensembles des solutions, sur $\mathbb{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ).

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°23

Séries entières

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Deux hommes se déplaçant en ballon sont perdus dans le désert. Ils aperçoivent un individu et lui demandent ≪ Où sommes-nous, s'il vous plaît ? ≫ Après un long moment de réflexion, l'homme leur répond : "Dans un ballon".
- Merci, monsieur le mathématicien.
- L'homme demande étonné : Comment avez-vous su que j'étais mathématicien ?
- Pour trois raisons, répondent les aéronautes. Premièrement, vous avez beaucoup réfléchi avant de nous répondre. Deuxièmement, votre réponse est très exacte. Troisièmement, elle ne sert à rien. ≫

Muhammad Aboûl-Wafâ, (940-998) à Bagdad

Astronome et mathématicien musulman principalement connu pour ses apports en trigonométrie plane et en trigonométrie sphérique. Il s'intéresse aux mouvements de la lune pour préciser la différence de longitude entre les deux villes. On lui doit la notion de cercle trigonométrique, celles de sécante $1/\cos x$ et cosécante $1/\sin x$. On lui attribue aussi la démonstration de la formule des sinus dûe à Al-Battani. Il s'intéressa entre autre à la géométrie, arithmétique et optique.

Mathématicien du jour

1 Corrigé Problème I : Pr. Dufait

1 1Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = e^{-x^2}\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt = e^{-x^2}\int_0^{x} e^{u^2}\,(-du) = -g(x)$ en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale . Ainsi g est impaire .

2 2L'application $t \longmapsto e^{t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto \int_0^{-x} e^{t^2}\,dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = -2x\,e^{-x^2}\int_0^{-x} e^{t^2}\,dt + e^{-x^2}\,e^{x^2} = -2x\,g(x) + 1$. Donc g est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

3 3L'équation (E) est une équation linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$ qui admet donc, suivant le théorème de Cauchy, comme ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ un espace affine de direction l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $(H) : y' + 2xy = 0$. Les solutions de (H) sur étant les fonctions $x \longrightarrow C\,e^{-x^2}$ où C est une constante réelle si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$, complexe si on cherche les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$, on obtient que :
les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les fonctions $x \longrightarrow g(x) + C\,e^{-x^2}$ avec $C \in \mathbb{K}$.

4 **a** Si $R>0$ et le rayon de convergence de $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ et $\forall x\in]-R,R[,\ y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, on a

$$\forall x\in]-R,R[,\quad y'(x)+2xy(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)a_{i+1}x^i+2\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^{i+1}=a_1+\sum_{i=1}^{\infty}\Big((i+1)a_{i+1}+2a_{i-1}\Big)x^i$$

et si y est solution de (E) sur $]-R,R[$ alors $\forall i\geq 1,\ (i+1)a_{i+1}+2a_{i-1}=0$ soit $\forall i\geq 0,\ (i+2)a_{i+2}+2a_i=$

b ◇ On obtient aussi $a_1=1$.

◇ L'égalité du [a] donne $\forall i\geq 1,\ (2i+1)a_{2i+1}=-2a_{2i-1}$ donc $a_{2i+1}=\dfrac{-2}{2i+1}a_{2i-1}=\dfrac{-2}{2i+1}\dfrac{-2}{2i-1}\cdots\dfrac{-2}{3}a$ par récurrence immédiate. Donc $\forall i\geq 0,\ a_{2i+1}=\dfrac{(-2)^i}{(2i+1)\cdot(2i-1)\cdots 3}=(-2)^i\dfrac{(2i)\cdots 2}{(2i+1)\cdot(2i)\cdots 3\cdot 2}$.Ceci donne $\forall i\geq 0,\ a_{2i+1}=(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}$.

c ◇ De même, $\forall i\geq 1,\ (2i)a_{2i}=-2a_{2i-2}$ donc $a_{2i}=\dfrac{-2}{2i}\dfrac{-2}{2}a_0$ donc $\forall i\geq 0,\ a_{2i}=\dfrac{(-1)^i}{i!}a_0$.

◇ Ainsi la sous-suite $(a_{2i})_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement définie par la valeur de a_0, tandis que la sous-suite $(a_{2i+1})_{i\in\mathbb{N}}$ est connu explicitement donc la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est uniquement définie par la valeur de a_0 .

d Les calculs précédents montrent qu'on a, en général, pour une suite vérifiant la relation de récurrence, $\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i=a_0\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^i}{i!}x^{2i}+a_1\sum_{i=0}^{\infty}(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$. La série entière y_0 est de rayon de convergence $+\infty$: c'est le développement de $x\mapsto e^{-x^2}$. Quant à la série entière y_1, on peut lui appliquer la règle de D'Alembert : $\dfrac{4^i i!}{(2i+1)!}\dfrac{(2i+3)!}{4^{i+1}(i+1)!}=\dfrac{(2i+3)(2i+2)}{4(i+1)}=i+\dfrac{3}{2}\xrightarrow[i\to\infty]{}+\infty$ et donc elle est également de rayon de convergence $+\infty$. Comme combinaison linéaire de séries entières de rayon de convergence $+\infty$, $\sum_{i=0}^{\infty}a_i x^i$a pour rayon de convergence $R=+\infty$.

e Ainsi toutes les séries entières vérifiant la relation de récurrence précédente et la condition $a_1=1$ sont C^∞ sur $\mathbb{R}$ et solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E). Comme, d'après le théorème de Cauchy, (E) admet une unique solution vérifiant la condition $y(0)=0$ et que g et $x\longmapsto\sum_{i=0}^{\infty}(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}$ sont des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant cette condition, on a $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-4)^i\dfrac{i!}{(2i+1)!}x^{2i+1}$.

5 **a** ◇ On a $\forall x\in\mathbb{R},\ g_1(x)=e^{-x^2}=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^i}{i!}x^{2i}$.◇ On a $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{t^2}=\sum_{i=0}^{\infty}\dfrac{1}{i!}t^{2i}$ donc $\forall x\in\mathbb{R},\ g_2(x)=\int_0^x e$

b ◇ En utilisant le fait que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente, on obtient le résultat suivant : si, pour $i=1,2$, g_i est la somme d'une série entière sur $]-R_i,R_i[$ alors g_1g_2 est somme du produit de ces deux séries sur $]-R,R[$ avec $R=\min(R_1,R_2)$.

◇ On a donc,ici, $\forall x\in\mathbb{R},\ (g_1g_2)(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}\dfrac{1}{i!(2i+1)}\right)x^{2k+1}$.

◇ Or $g=g_1g_2$ donc, par unicité du développement en série entière, on obtient avec le résultat du [4.(e)], $\forall k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^{k-i}}{(k-i)!}\dfrac{1}{i!(2i+1)}=(-4)^k\dfrac{k!}{(2k+1)!}$ soit $\dfrac{(-1)^k}{k!}\sum_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^i}{2i+1}\dfrac{k!}{(k-i)!i!}=(-4)^k\dfrac{k!}{(2k+1)!}$.On a donc bien $\forall k\in\mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{k}\dfrac{(-1)^i}{2i+1}C_k^i=\dfrac{4^k(k!)^2}{(2k+1)!}$.

2 Corrigé Problème II : Pr. Chabchi

.

PARTIE I

1. Soit x un réel

   (a) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,1]$ et $t^{x-1}e^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ au $\mathcal{V}(0^+)$, donc elle est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$ càd $\boxed{x>0}$

   (b) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et $t^{x-1}e^{-t} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$, donc elle est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour toute valeur du réel x.

2. La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si et seulement si, elle l'est au $\mathcal{V}(0^+)$ et au $\mathcal{V}(+\infty)$. Selon la question1, cela est réalisé si et seulement $\boxed{x>0}$.

   Pour un complexe z, on a d'abord $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{\mathrm{Re}(z)-1}e^{-t}$. Elle donc intégrable sur $\mathbb{R}^{*+}$ si et seulement si $\boxed{\mathrm{Re}(z)>0}$.

3. Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}(z)>0$, on note $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$

   (a) A l'aide d'une intégration par partie, on a $\Gamma(z+1) = \lim\limits_{(A,B)\longrightarrow(0^+,+\infty)} \left([-e^{-t}t^z]_A^B + z\displaystyle\int_A^B t^z e^{-t}dt\right) = z\Gamma(z)$.

   (b) Par récurrence sur p :
   - Pour $p=1$, on a $\Gamma(\alpha+2) = (\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)$ c'est juste.
   - Soit $p \geq 1$, supposons le résultat vrai pour p, alors selon (a), on a $\Gamma(\alpha+p+2) = (\alpha+p+1)\Gamma(\alpha+p+1)$, on conclu alors à l'aide de l'hypothèse de récurrence. D'où le résultat.

   (c) La fonction $t \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue non nulle sur $]0,+\infty[$, donc $\Gamma(x)>0$.

   (d) On a $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et puisque $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, par récurrence simple, on a $\Gamma(n+1) = n!$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   Pour $\mathrm{Re}(z)>0$, on a d'abord $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$, puis il s'agit d'une intégration terme à terme dans la première intégrale : En effet on a :

   - La série de fonction $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{t^{n+z-1}}{n!}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $t \longmapsto t^{z-1}e^{-t}$.
   - La fonction $t \longmapsto t^{z-1}e^{t}$ est continue sur $]0,1]$.
   - La série des intégrales des modules $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\int_0^{+\infty}\left|(-1)^n\frac{t^{n+z-1}}{n!}\right|dt = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}\frac{1}{n+\mathrm{Re}(z)}$ est convergente

   Le résultat en découle alors.

5. Soit $[c,d]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$, alors son image par la valeur absolue $x \longmapsto |x|$ qui est continue est un segment de $\mathbb{R}$, il existe donc $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $0<\alpha\leq\beta$, $\forall\, x\in[c,d]$, $\alpha\leq|x|\leq\beta$, il vient que :

   - $\forall\, z\in B$, $\forall\, n\geq E(\beta)+1$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+x}\right| \leq \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{n-\beta}$ et $\sum \dfrac{1}{n!}\dfrac{1}{n-\beta}$ est convergente, d'où la convergence normale, donc uniforme de $\displaystyle\sum_{n\geq E(\beta)+1}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ sur le segment (donc aussi sur tout compact) de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$.

.

- Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $z \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

On conclut alors que $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=E(\beta)+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, puis il évident que la sommation finie $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{E(\beta)} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, d'où la continuité de $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

6. Soit $0 < a < b$.

(a) Pour $t > 0$ fixé, la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ pour $t \geq 1$ et décroissante pour $t \leq 1$, il vient alors que

$$\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } t \leq 1 \\ t^{b-1} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}.$$

(b) Découle de la monotonie de la fonction $x \longmapsto t^{x-1}$ sur $[a,b]$, en utilisant le (a).

(c) On devra vérifier les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale (formule de Leibniz)

- D'abord la fonction $f : (x,t) \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe et y est aussi continue sur $\mathbb{R}^{*+} \times \mathbb{R}^{*+}$.
- Pour $x \in [a,b]$, $t > 0$, on a $|f(x,t)| \leq e^{-t}\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \phi(t)$ avec :
  - ϕ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{1-a}}$ avec $1-a<1$
- Pour $x \in [a,b]$, $t > 0$, on a $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t}|\ln(t)|\max\left(t^{a-1}, t^{b-1}\right) = \psi(t)$ avec :
  - ψ continue sur $\mathbb{R}^{*+}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(+\infty)$ car négligeable devant $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$
  - Intégrable au $\mathcal{V}(0^+)$ car équivalente à $t \longmapsto \dfrac{-\ln(t)}{t^{1-a}} = o\left(\dfrac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}\right)$ avec $1-\dfrac{a}{2}<1$

Ainsi la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\, e^{-t}t^{x-1}dt$.

PARTIE II

1. On sait que la somme d'une série entière de rayon $R > 0$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ et se dérive infiniment sous le signe somme, en écrivant $y_\alpha(x) = x^\alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, on en déduit que y_α est de classe C^∞ sur $]0,R[$ et se dérive terme à terme.

y_α est solution de (F_λ) sur $]0,R[$ si et seulement si

$$x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty}(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1} - \left(x^2+\lambda^2\right)\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^{n+\alpha} = 0$$

Après avoir fait le changement $n' = n+2$ dans la sommation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2+\alpha}$, il vient

$$x^\alpha\left(\left(\alpha^2-\lambda^2\right)a_0x^0 + \left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n - a_{n-2}\right)x^n\right) = 0$$

ou encore après simplification par le terme non nul x^α,

$$\left(\alpha^2-\lambda^2\right)a_0x^0 + \left((1+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_1x^1 + \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left((n+\alpha)^2-\lambda^2\right)a_n - a_{n-2}\right)x^n = 0 \text{ pour tout } x \in]0,R[$$

(valable en aussi en 0)

A ce stade, on ne peut utiliser directement l'unicité d'un développement en série entière puisque $[0,R[$ n'est pas un voisinage de zéro! Soit alors $y\in\left]-\sqrt{R},\sqrt{R}\right[$, on a alors $y^2\in[0,R[$, donc

$$\left(\alpha^2-\lambda^2\right)a_0y^0+\left(\left(1+\alpha\right)^2-\lambda^2\right)a_1y^2+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\left(\left(n+\alpha\right)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)y^{2n}=0 \text{ pour tout } y\in\left]-\sqrt{R},\sqrt{R}\right[$$

Par unicité d'un DSE, et en tenant compte de $a_0\neq 0$, il vient $\begin{cases}\alpha^2=\lambda^2\\ \left(\left(1+\alpha\right)^2-\lambda^2\right)a_1=0\\ \forall\ n\geq 2,\ \left(\left(\left(n+\alpha\right)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)=0\end{cases}$.

2. On suppose $\alpha=\lambda\geq 0$ et $a_0\neq 0$.

   (a) Puisque $\alpha=\lambda\geq 0$, alors la relation $\left(\left(1+\alpha\right)^2-\lambda^2\right)a_1=0$ donne $a_1=0$, puis la relation $\forall\ n\geq 2,\ \left(\left(\left(n+\alpha\right)^2-\lambda^2\right)a_n-a_{n-2}\right)=0$ assure que $\forall\ p\in\mathbb{N},\ a_{2p+1}=0$.
   D'autres part $\forall\ p\geq 1,\ \left(2p+\alpha\right)^2-\alpha^2\neq 0$ car $\alpha\geq 0$, donc $a_{2p}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{\left(2p+\alpha\right)^2-\alpha^2}=\dfrac{a_{2(p-1)}}{2^2p\left(p+\alpha\right)}$.
   Par récurrence sur $p\geq 1$, on aura $a_{2p}=\dfrac{a_0}{2^{2p}p!}\dfrac{1}{\left(p+\alpha\right)\left(p+\alpha-1\right)...\left(\alpha+1\right)}$. On conclut à l'aide de la question I-3-b.

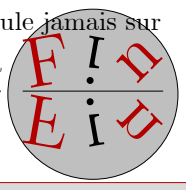
   (b) On vu que pour tout $x>0$, $\Gamma\left(x\right)>0$, donc $a_{2p}\neq 0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
   Pour z un complexe non nul, on note $u_p=\left|a_{2p}z^{2p}\right|$, alors
   $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty}\dfrac{u_{p+1}}{u_p}=\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty}\left|z\right|^2\dfrac{\Gamma\left(\alpha+p+1\right)}{2^2\left(p+1\right)\Gamma\left(\alpha+p+2\right)}=\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty}\left|z\right|^2\dfrac{1}{2^2\left(p+1\right)\left(\alpha+p+1\right)}=0<1$. D'où la série $\sum\limits_{n\geq 0}a_nz^n=\sum\limits_{p\geq 0}a_{2p}z^{2p}$ converge pour tout complexe z. Ainsi le rayon cherché est $+\infty$.

   (c) On suppose $a_02^{\lambda}\Gamma\left(\lambda+1\right)=0$, puisque $\Gamma\left(\lambda+1\right)>0$ car $\lambda+1>0$, alors $a_0=\dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma\left(\lambda+1\right)}$. De plus le rayon de $\sum a_nz^n$ est infini, alors pour tout $x>0$,
   $y_{\lambda}\left(x\right)=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{\lambda}\Gamma\left(\lambda+1\right)}\dfrac{\Gamma\left(\lambda+1\right)}{2^{2p}p!\Gamma\left(\lambda+p+1\right)}x^{2p+\lambda}=\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!\Gamma\left(\lambda+p+1\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p+\lambda}$. CQFD
   On a aussi $y_{\lambda}\left(x\right)=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\lambda}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!\Gamma\left(\lambda+p+1\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p}$, et or $x\longmapsto\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!\Gamma\left(\lambda+p+1\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p}$ est continue en 0, donc
   $$\boxed{y_{\lambda}\left(x\right)\sim_0\left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda}\frac{1}{\Gamma\left(\lambda+1\right)}}$$

3. On suppose que $2\lambda\notin\mathbb{N}$, soit $p\geq 1$.

   (a) Le fait que $2\lambda\notin\mathbb{N}$, assure que $\forall\ p\geq 1$, $\left(-\lambda+n\right)^2-\lambda^2\neq 0$, donc comme dans le 2-$(a)$, on trouve que :
   $\forall\ p\in\mathbb{N}$, $a_{2p+1}=0$ et $a_{2p}=\dfrac{a_0}{2^{2p}p!}\dfrac{1}{\left(p+\alpha\right)\left(p+\alpha-1\right)...\left(\alpha+1\right)}$, puis en prenant comme le 2-(b) : $a_02^{-\lambda}\Gamma\left(-\lambda+1\right)=1$, puisque $-\lambda\notin\mathbb{Z}^{*-}$ (car sinon $2\lambda\in\mathbb{N}$), alors le fait de "noter" le produit non nul : $\left(-\lambda+p\right)\left(-\lambda+p+1\right)...\left(-\lambda+1\right)$ par $\dfrac{\Gamma\left(-\lambda+p+1\right)}{\Gamma\left(-\lambda+1\right)}$, assure que $\Gamma\left(-\lambda+1\right)\neq 0$, donc
   $a_0=\dfrac{1}{2^{-\lambda}\Gamma\left(-\lambda+1\right)}$, on obtient que $x\longmapsto\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p!\Gamma\left(-\lambda+p+1\right)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$ est aussi solution de (F_{λ}) sur $\mathbb{R}^{*+}$.

   (b) Il est à noter d'abord que $\lambda\neq 0$ car $2\lambda\notin\mathbb{N}$, puis comme dans le 3(c), on a $y_{-\lambda}\left(x\right)\sim_0\left(\dfrac{x}{2}\right)^{-\lambda}\dfrac{1}{\Gamma\left(-\lambda+1\right)}$.
   Ainsi y_{λ} et $y_{-\lambda}$ ont des comportements non propotionnel au voisinage de zéro : l'une tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$, la famille $\left(y_{\lambda},y_{-\lambda}\right)$ est alors libre.
   D'autres part (F_{λ}) est une équation différentielle linéaire sans second membre d'ordre deux et dont les coefficients sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^{*+}$ et aussi le coefficient de y'' ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}^{*+}$, donc l'espace des solutions de (F_{λ}) sur $\mathbb{R}^{*+}$ est $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, contenant la famille libre $\left(y_{\lambda},y_{-\lambda}\right)$, qui sera donc une base de cet espace. D'où la solution générale de (F_{λ}) sur $\mathbb{R}^{*+}$ est : $x\longmapsto Ay_{\lambda}\left(x\right)+By_{-\lambda}\left(x\right)$ où A et B sont des constantes réelles.



.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°24

Séries entières
Théorème de Stone-Weierstrass
Polynômes de Lebesgue

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

C'est un prof qui demande à ses prépas si tout le monde a bien compris ce que c'est que la sublimation. Aussi, pensant au glaçon qui passe à l'état de vapeur, il demande :
≪ Est-ce que vous pouvez me donner un exemple de solide qui se transforme en gaz sans passer par l'état liquide ? ≫
Et du fond de la classe quelqu'un lance : ≪ Les cigarettes m'sieur ! ≫

Henri-Léon Lebesgue (1875-1941)

Mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée en 1902. Il se fera alors connaître par sa théorie de la mesure, laquelle prolonge les premiers travaux importants d'Émile Borel, l'un de ses professeurs et plus tard son ami. Il mit au point une théorie des fonctions mesurables qui lui permet de rechercher et de prouver l'existence de primitives pour des fonctions ≪ irrégulières ≫ et généralise des théories d'intégration antérieures : Riemann, Darboux, Stieltjes

Mathématicien du jour

Notations et rappels

Si α est un réel et n un entier naturel, on pose

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad \text{si} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{0} = 1.$$

On rappelle que si n et m sont des entiers naturels avec $n \leqslant m$, $\binom{m}{n}$ est le nombre de parties à n éléments d'un ensemble à m éléments.

1 A. Une relation entre coefficients binomiaux

1 Soient n et m deux entiers naturels avec $n \leqslant m$; montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{m}{p}\binom{m}{n-p} = \binom{2m}{n}$.

On pourra considérer deux ensembles disjoints E et F ayant m éléments chacun, puis calculer de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments de $E \cup F$.

2 Soit n un entier naturel.

a) Vérifier que l'application $\alpha \mapsto \binom{2\alpha}{n} - \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$ est polynomiale puis en donner des zéros.

b) Montrer alors que pour tout réel α, $\binom{2\alpha}{n} = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{\alpha}{p}\binom{\alpha}{n-p}$.

2 B. Recherche d'un équivalent

1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1+w_n$ où $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable. Étudier la suite $(\ln(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel strictement positif.

2 Soient $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs et γ un réel tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=1-\dfrac{\gamma}{n}+w'_n$ où $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable.

a Étudier la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire qu'il existe une constante $\ell>0$ telle que $b_n\sim\dfrac{\ell}{n^\gamma}$.

b Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?

3 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $c_n=(-1)^{n-1}\dbinom{1/2}{n}$.

a Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{2n-1}{2(n+1)}$.

b Établir qu'il existe une constante $C>0$ telle que $\dbinom{1/2}{n}\sim C\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.

3 C. Résultat d'approximation

1 Préciser le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{1/2}{n}(-1)^n z^n$.

2 Montrer que cette série converge normalement sur le disque fermé de $\mathbb{C}$, de centre 0 et de rayon 1 ; sa somme sera notée $f(z)$ pour $|z|\leqslant 1$.

3 Montrer soigneusement que si $|z|\leqslant 1$ alors $f(z)^2=1-z$.

4 Montrer que la fonction $x\mapsto f(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $]-1,1[$ et justifier soigneusement que $f(x)>0$ pour tout $x\in]-1,1[$, puis que $f(x)=\sqrt{1-x}$, $x\in[-1,1]$.

5 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $L_n=-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{(2k-1)2^{2k}}(1-X^2)^k$ (n^{e} polynôme de Lebesgue).

a Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dbinom{1/2}{n}=(-1)^{n-1}\dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{(2n-1)2^{2n}}$.

b Vérifier que pour tout $x\in[-1,1]$, $|x|=f(1-x^2)$ et montrer que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Lebesgue converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction $x\mapsto|x|$.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°24 (Pr Bouchikhi)

Séries entières

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Vous savez comment font les bergers pour vérifier que leur troupeau de mouton est complet ?
- Réponse : Ils prennent une suite de moutons de gauchers (qui mâchent avec la mâchoire gauche), leurs mettent de l'herbe du côté droit, et observent s'ils y convergent, c'est ce qu'on appelle le principe des bergers.

Jean Gaston Darboux (1842-1917)

Mathématicien français, ses travaux concernent l'analyse (intégration, équations aux dérivées partielles) et la géométrie différentielle (étude des courbes et des surfaces). Ils ont été une source d'inspiration pour les frères Cosserat (≪ milieux à directeur ≫) aussi bien que pour Henri Cartan (≪ méthode du repère mobile ≫). Il reçoit le grand prix de l'Académie des sciences, ainsi que la médaille Sylvester de la Royal Society

Mathématicien du jour

A. Une relation entre coefficients binomiaux :

1. Soit $(n,m)\in\mathbb{N}^2$) : $n\leq m$

$$(1+X)^m.(1+X)^m=(1+X)^{2m} \iff [\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^k]^2=\sum_{n=0}^{2m}\binom{2m}{n}X^n$$

$$\iff \sum_{n=0}^{2m}[\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}.\binom{m}{n-k}]X^n=\sum_{n=0}^{2m}\binom{2m}{n}X^n$$

$$\iff \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}.\binom{m}{n-k}=\binom{2m}{n}\ ,\ \forall n\in\{0,1,...,m\}$$

2. (a) f est une combinaison linéaire des fonctions polynômiales en α ,

donc elle est polynômiale en α et d'après la question $1.A$, on a: $f(m)=0$, $\forall m\geq n$

(b) D'après la question $2.A.a$, f est polynômiale , admettant une infinité de racines , donc f est nulle , puis : $\binom{2\alpha}{n}=\binom{\alpha}{k}.\binom{\alpha}{n-k}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$

B. Recherche d'un équivalent :

1. La série $\sum_{n\geq 0}\omega_n$ est sommable donc $\omega_n\longrightarrow 0$ et $\ln(\frac{a_{n+1}}{a_n})=\ln(1+\omega_n)\sim\omega_n$ d'où

$\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)\sim\omega_n$ et la série téléscopique $\sum_{n\geq 0}\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)$ converge , et sa somme vérifie : $\sum_{k=0}^{+\infty}\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)=\lim_{n\longrightarrow+\infty}[\ln(a_n)-\ln(a_0)]$, par suite $(\ln(a_n))_{n\geq 0}$ converge ; Ainsi $(a_n)_{n\geq 0}$ converge et $\lim_{n\longrightarrow+\infty}a_n=a_0.\exp(\sum_{k=0}^{+\infty}\ln(a_{n+1})-\ln(a_n))$

.

2. (a) La régle de D'Alembert donne :

$\frac{(n+1)^\gamma.b_{n+1}}{n^\gamma.b_n} = (1+\frac{1}{n})^\gamma.\frac{b_{n+1}}{b_n} = (1+\frac{\gamma}{n}+O(\frac{1}{n^2}))(1-\frac{\gamma}{n}+\omega'_n) = 1+\omega'_n-\frac{\gamma^2}{n^2}+\frac{\gamma}{n}\omega'_n+O(\frac{1}{n^2})$

Si $\omega''_n = \omega'_n - \frac{\gamma^2}{n^2}+\frac{\gamma}{n}\omega'_n+O(\frac{1}{n^2})$ alors $\sum_{n\geq 0}\omega''_n$ converge par éclatemment , donc d'aprés la question $1.B$ la suite $(n^\gamma b_n)_{n\geq 1}$ converge et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} n^\gamma b_n = \ell > 0$ d'où $b_n \sim \frac{\ell}{n^\gamma}$

(b) On a: $b_n \sim \frac{\ell}{n^\gamma}$, donc le critère de Reimann permet de conlure que : $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge $\Longleftrightarrow \gamma > 1$

3. (a) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(-1)^n\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n)}{(-1)^{n-1}\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n+1)}.\frac{n!}{(n+1)!} = -\frac{(\frac{1}{2}-n)}{n+1} = \frac{2n-1}{2n+1}$

(b) $(c_n)_{n\geq 0}$ est une suite a terme strictement positif tel que : $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n-1}{2n+1} = 1-\frac{3}{2n}+\circ(\frac{1}{n^2})$

La suite $(\circ(\frac{1}{n^2}))_{n\geq 1}$ est sommable , donc D'après la question $2.B$ il existe $C>0$ tel que :

$c_n \sim \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$, d'où $\binom{\frac{1}{2}}{n} \sim C.\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}$

C. Résultat d'approximation:

1. On a: $(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n} = -c_n$ et $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n-1}{2n+1} \longrightarrow 1$, le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}z^n$ est donc égal à 1

2. On a: $\forall\, z\in\overline{D(0,1)}$, $|\binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n| \leq |\binom{\frac{1}{2}}{n}| \sim \frac{C}{n^{\frac{3}{2}}}$

Comme la série de Reimann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$converge , alors la série entière $\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n$ converge normalement sur le disque $\overline{D(0,1)}$

.

3. Soit $z \in \overline{D(0,1)}$, on a : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n$ et la série $\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n$ converge absolument , donc le produit de cauchy de la série $\sum_{n\geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{n}.(-1)^n.z^n$ par elle même donne :

$(f(z))^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n[\sum_{p=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{p}\binom{\frac{1}{2}}{n-p}]z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \binom{1}{n} z^n = 1-z$

4. D'après la question $2.C$, on a: f est de clase $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et $(f(x))^2 = 1-x$, $\forall x \in [-1,1]$, donc $2.f'(x).f(x) = -1$ par suite $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in]-1,1[$ et f garde un signe constant sur $]-1,1[$

Or $f(1) = 0$ et $f(-1) = \sqrt{2}$, donc s'il existe $\alpha \in]-1,1[$ tel que $f(\alpha) < 0$ alors f change de signe sur $]-1,1[$, ce qui est impossible d'où $f(x) > 0$, $\forall x \in]-1,1[$

Par conséquent $f(x) = \sqrt{1-x}$, $\forall x \in [-1,1]$

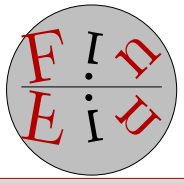
5. (a) $\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)...(\frac{1}{2}-n)}{n!} = (-1)^{n-1}.\frac{1.3.5...(2n-3)(2n-1)}{2^n n!(2n-1)} = (-1)^{n-1}.\frac{(2n)!}{2^n.2.4...(2n).n!.(2n-1)}$

$= (-1)^{n-1}.\frac{(2n)!}{2^{2n}.(n!)^2.(2n-1)} = (-1)^{n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}.(2n-1)}$

(b) On a :$\forall x \in [-1,1]$, $1-x^2 \in [-1,1]$, donc $f(1-x^2) = \sqrt{1-(1-x^2)} = \sqrt{x^2} = |x|$

De plus $L_n(x) = -\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\frac{1}{2^{2k}(2k-1)}(1-x^2)^k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}(1-x^2)^k$

et la série $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{\frac{1}{2}}{k}x^k$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers f , donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers $x \longmapsto f(1-x^2) = |x|$



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°25 (CCP 2004, MP)

Séries de Fourier
Fonctions à variations bornées

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Quelle est la femme politique la plus électrique ?

Réponse : Sokarno Mega Watt i

- Quel président est chargé de boucher les trous à l'ONU ?

George bouche.

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)

Mathématicien allemand. Il fut en contact avec les plus grands mathématiciens français de l'époque, dont Legendre, Laplace, Fourier, Gauss, Jacobi. Il eut entre autres comme élève Riemann. Les travaux de Dirichlet ont surtout porté sur les séries de Fourier, sur l'arithmétique (conjecture de Fermat). On lui doit aussi le principe des tiroirs.

Mathématicien du jour

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue par morceaux et de période 2π, on associe ses coefficients de Fourier exponentiels définis, pour $n \in \mathbb{Z}$, par $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$ et ses coefficients de Fourier trigonométriques définis par :

$a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$ (pour $n \in \mathbb{N}$) et $b_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

On pose, pour tout entier naturel p et tout réel x :

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p}\left(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\right).$$

On rappelle le théorème de convergence normale :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de période 2π et de classe C^1 par morceaux, la série de Fourier de f converge normalement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f est limite uniforme de la suite de polynômes trigonométriques $(S_p(f))_{p\in\mathbb{N}}$.

Nous allons étudier ce qui peut se produire si on enlève à ce théorème l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux ».

Une première partie démontre des résultats préliminaires.

Une deuxième partie traite d'un exemple où, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », la série de Fourier peut diverger.

Une troisième partie recherche une condition plus faible pour que, sans l'hypothèse « de classe C^1 par morceaux », on puisse quand même assurer que la série de Fourier de f converge uniformément vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1 Résultats préliminaires

1 Si, dans le théorème de convergence normale ci-dessus, on suppose que la fonction f n'est pas continue mais seulement continue par morceaux sur $\mathbb{R}$:

a Rappeler le théorème de Dirichlet en précisant de quel type de convergence il s'agit.

b Cette convergence pourrait-elle être uniforme sur $\mathbb{R}$?

2 On considère la fonction continue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 2π , paire et définie pour $x \in [0,\pi]$, par $\varphi(x) = \sqrt{x}$.
Donner l'allure de la courbe de cette fonction et expliquer pourquoi elle n'est pas de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

3 Théorème de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers le complexe l.

a Justifier, simplement, en utilisant un théorème de sommation de relations de comparaison, que : $\sum_{k=0}^{n}(u_k - l) = o(n+1)$ au voisinage de $+\infty$.

b En déduire que la suite $\left(\frac{u_0+u_1+\ldots+u_n}{n+1}\right)$ converge vers l.

4 Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de période 2π dont la somme de Fourier de rang n est notée $S_n(f)$. Pour n entier naturel non nul, on définit la somme de Fejér de f de rang n, notée $\sigma_n(f)$ comme la moyenne de Cesàro des sommes de Fourier :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}\left(S_0(f) + S_1(f) + \ldots + S_n(f)\right).$$

On démontre, et nous l'admettrons, le théorème de Fejér :
« La suite de polynômes trigonométriques $(\sigma_n(f))$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f ».

Une application :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et de période 2π telle que la suite $(S_n(f))$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, montrer que la suite $(S_n(f))$ converge vers la fonction f.

5 Si (u_n) est une suite de réels positifs qui converge vers 0, montrer qu'il existe une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq d_n$ (on pourra, par exemple, vérifier que la suite $(\sup\{u_k, k \geq n\})$ convient).

2 Un exemple de Série de Fourier divergente (en un point)

6 On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur l'intervalle $[0,\pi]$ pour tout entier naturel non nul n par : $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin\left[\left(2^{n^3}+1\right)\frac{x}{2}\right]$.

7 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$.

On définit alors la fonction f paire, continue, de période 2π sur $\mathbb{R}$ et telle que pour tout réel $x \in [0,\pi]$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

8 On pose, pour p et k entiers naturels, $I_{p,k} = \int_0^{\pi} \cos(pt)\sin\left(\frac{2k+1}{2}t\right)dt$ et, pour q entier naturel, $T_{q,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k}$.

a Calculer, pour p et k entiers naturels, l'intégrale $I_{p,k}$.

b Pour q et k entiers naturels, déterminer un réel positif c_k tel que $T_{q,k} = c_k + \sum_{j=k-q}^{k+q} \frac{1}{2j+1}$, et en déduire que, pour tout couple (q,k) d'entiers naturels, $T_{q,k} \geq 0$.

c Déterminer, pour N au voisinage de $+\infty$, un équivalent simple de $\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2k+1}$.

d En déduire que, pour k au voisinage de $+\infty$, $T_{k,k} \sim \frac{1}{2}\ln k$.

9 Montrer que, pour p entier naturel non nul, $a_p(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} I_{p,2n^3-1}$.

10 Montrer que, pour p entier naturel non nul, $S_{2p^3-1}(f)(0) \geq \frac{-a_0(f)}{2} + \frac{2}{\pi p^2} T_{2p^3-1,2p^3-1}$

(on remarquera que : $\frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{N} a_i = -\frac{a_0}{2} + \sum_{i=0}^{N} a_i$).

Conclure que la suite $(S_n(f)(0))$ diverge.

3 Fonctions à variation bornée, Théorème de Jordan

Pour deux réels $a < b$ on note $S_{[a,b]}$ l'ensemble des subdivisions de l'intervalle $[a,b]$.
Si f est une fonction de $[a,b] \to \mathbb{R}$ et $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, , x_n) \in S_{[a,b]}$, on note :

$$V(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

On dira que la fonction f est à variation bornée s'il existe un réel positif M tel que pour toute $\sigma \in S_{[a,b]}$, l'on ait : $V(\sigma, f) \leq M$.
On appelle alors variation totale de f sur $[a,b]$ le réel positif noté :

$$V([a,b], f) = \sup_{\theta \in S_{[a,b]}} V(\sigma, f).$$

11 Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x\cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$ si $x \neq 0$ est continue et n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.
(on pourra choisir $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ subdivision de $[0,1]$: $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ et $\forall k \in \{1, \ldots, n\}, x_k = \frac{1}{2(n+1-k)}$).

12 Exemples généraux

a Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est monotone est à variation bornée sur $[a,b]$, et préciser $V([a,b], f)$.

b Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est somme de deux fonctions monotones est à variation bornée sur $[a,b]$.

c Montrer qu'une fonction $[a,b] \to \mathbb{R}$ qui est continue et de classe C^1 par morceaux est à variation bornée.

13 Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée sur $[a,b]$, et soit $a < c < b$.
Montrer que chacune des restrictions de f aux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$ est à variation bornée et que : $V([a,c], f) + V([c,b], f) \leq V([a,b], f)$.

Remarque : on peut même montrer qu'il y a égalité mais ce ne sera pas utile pour ce problème.

14 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée.
Pour n entier relatif et N entier naturel, tous deux non nuls, on utilisera la subdivision $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq |n|N}$ de $[0, 2\pi]$ définie, pour k entier compris entre 0 et $|n|\,N$, par : $x_k = \dfrac{2\pi k}{|n|\,N}$.
Pour k entier compris entre 1 et $|n|\,N$, on notera $V_k(f)$ la variation totale de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

a) Vérifier que : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(t) - f(x_k))\, e^{-int} dt\right| \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)\,(x_k - x_{k-1})$.

b) Montrer que : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{|n|N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k) e^{-int} dt\right| \leq \dfrac{1}{|n|} V([0, 2\pi], f)$.

c) En déduire que pour tout entier n non nul, $|c_n(f)| \leq \dfrac{V([0, 2\pi], f)}{2|n|\pi}$.

15 Soit (u_n) une suite de complexes, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j \text{ et } \sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}.$$

On suppose que la suite (σ_n) converge vers un complexe L et on suppose qu'il existe une constante réelle A non nulle telle que, pour tout entier naturel k, $|u_k| \leq \dfrac{A}{k+1}$.

a) Pour n et k entiers naturels non nuls, exprimer, à l'aide des termes de la suite (u_i), l'expression : $k(S_n - L) - (n+k)(\sigma_{n+k-1} - L) + n(\sigma_{n-1} - L)$.

b) Soit une suite de réels (d_n) décroissante et de limite nulle telle que, pour tout entier naturel n, $|\sigma_n - L| \leq d_n$, montrer que, pour n et k entiers naturels non nuls :

$$|S_n - L| \leq \left(1 + \frac{2n}{k}\right) d_{n-1} + A\frac{k-1}{2(n+2)}.$$

c) L'entier naturel non nul n étant donné, on choisit k tel que $(k-1)^2 \leq 4n^2 d_{n-1} < k^2$ ($k-1$ est donc la partie entière de $2n\sqrt{d_{n-1}}$).
Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$|S_n - L| \leq d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$.
Que peut-on en déduire ?

16 Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de période 2π telle que la restriction de f à l'intervalle $[0, 2\pi]$ soit à variation bornée converge uniformément vers la fonction f.

17 Montrer que la série de Fourier de la fonction φ de la question 2. converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

18 Application

Montrer que la série de Fourier d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de période 2π et lipschitzienne converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°25 (Pr. Taibi)

Séries de Fourier
Fonctions à variations bornées

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

• Quel est le grand jeu des fonctionnaires le lundi matin ?
Réponse : Le premier qui a bougé a perdu !
• Quel est le point commun entre un professeur qui part à la retraite et un et les gants d'un chirurgien ? Réponse : Ils sortent tous les deux du corps enseignant (en saignant).

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation.

Mathématicien du jour

1 Partie I : Résultats préliminaires

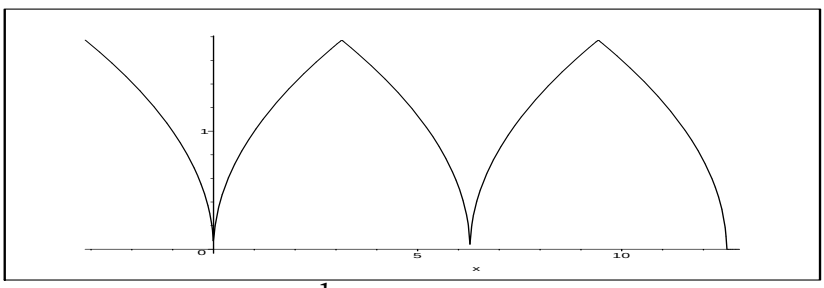
1 Dans le théorème de convergence normale on suppose seulement f continue par morceaux.

a) C'est le théorème de Dirichlet de convergence simple :
• f est continue par morceaux et 2π -périodique
• f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$
Alors $(S_p(f))_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{f} : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

b) La convergence ne peut-être uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exemple : $f(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ 1 \text{ si } t \in [0, \pi[\end{cases}$ et f 2π- périodique

2 Représentation graphique de φ :



φ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de classe C^1 par morceaux car $\lim\limits_{x \to 0} \varphi = +\infty$

3 théorème de Cesaro :

On suppose que la suite complexe (u_n) converge vers ℓ

a) $\begin{cases} u_n - \ell = o(1) \\ \text{la serie } \sum_{n\geqslant 0} 1 \text{ diverge} \end{cases}$ implique $\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell) = o(\sum_{k=0}^{n} 1) = o(n+1)$ (cours)

b) Par ce qui précède $\frac{\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell)}{n+1} = o(1)$. Mais $\sum_{k=0}^{n}(u_k-\ell) = \sum_{k=0}^{n} u_k - (n+1)\ell$, donc $\frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1} - \ell \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

4 On pose $\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1}(S_0(f)+...+S_n(f))$,
On suppose que $(S_n(f))_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Posons alors $g(x) = \lim_n S_n(f)(x)$ pour tout x
Par le théorème de Fejer, $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème de Cesaro $(\sigma_n)_n$ converge simplement vers g.
Donc $f = g$ sur $\mathbb{R}$.

5 $(u_n)_n$ est une suite de réels telle que $\lim u_n = 0$. notons par $d_n = \sup\{u_k \ / \ k \geqslant n\}$, on a alors : $\forall k \geqslant n$, $0 \leqslant u_k \leqslant d_n$, en particulier $0 \leqslant u_n \leqslant d_n$.
D'autre part : $\{u_k \ / \ k \geqslant n+1\} \subset \{u_k \ / \ k \geqslant n\}$ et par passage à la borne sup, on a : $d_n \geqslant d_{n+1}$. Donc la suite $(d_n)_n$ est bien décroissante.
Vérifions que $(d_n)_n$ converge vers 0 pour conclure.
On a déja (d_n) est décroissante et positive, donc converge vers un réel $d \geqslant 0$.
Par définition de d, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ application strictemen croissante telle que : $\forall n,\ d \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant d + \frac{1}{n+1}$. Et comme $u_n \to 0$, il en résulte que $u_{\varphi(n)} \to 0$ et puis $d = 0$ par unicité de la limite.

2 Partie II : Exemple de série de Fourier divergente en un point.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une application telle que : $f_n(x) = \frac{1}{n^2}\sin\left[(2^{n^3}+1)\frac{x}{2}\right]$

6 Pour tout $x \in [0,\pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (indépendement de x) , donc la série $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,\pi]$.

7 $I_{p,k} = \int_0^{\pi} \cos(pt)\sin(\frac{2k+1}{2}t)dt$, et $T_{q,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k}$

a) Calcul de $I_{p,k}$

$$\begin{aligned} I_{p,k} &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(p+\frac{2k+1}{2})t + \sin(p-\frac{2k+1}{2})t\right]dt \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{p+\frac{2k+1}{2}}\cos(p+\frac{2k+1}{2})t\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{p-\frac{2k+1}{2}}\cos(p-\frac{2k+1}{2})t\right]_0^{\pi}\right) \quad (p \neq \frac{2k+1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\frac{2k+1}{2}} + \frac{1}{p+\frac{2k+1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2p-2k-1} + \frac{1}{2p+2k+1} \end{aligned}$$

b) $T_{p,k}$ en fonction des u_j :

$$\begin{aligned}
T_{p,k} = \sum_{p=0}^{q} I_{p,k} &= \sum_{p=0}^{q}\left(\frac{1}{2p-2k-1}+\frac{1}{2p+2k+1}\right)\\
&= \sum_{p=0}^{q}\frac{1}{2(k-p)+1}+\sum_{p=0}^{q}\frac{1}{2(k+p)+1}\\
&= \sum_{j=k}^{k-q}\frac{1}{2j+1}+\sum_{j=k}^{k+q}\frac{1}{2j+1}\\
&= \sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1}+\frac{1}{2k+1}
\end{aligned}$$

Le réel c_k recherché est donc $c_k = \dfrac{1}{2k+1}$ qui est positif. Comme la quatité $\displaystyle\sum_{j=k-q}^{k+q}\frac{1}{2j+1}$ est positif car $0 \leqslant |k-q| \leqslant k+q$, ilen résulte que $T_{q,k}$ est aussi positif ou nul .

c Quetion classique :

$\begin{cases} \dfrac{1}{2k+1} \sim \dfrac{1}{2k} > 0 \\ \sum \dfrac{1}{2k} \text{ diverge} \end{cases}$, donc, par le théorème de sommation des relations de comparaison, on a :

$$\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2k+1} \sim \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \sim \frac{1}{2}\ln(N)$$

d Équivalent de $T_{k,k}$:

On a : $T_{k,k} = \dfrac{1}{2k+1}+\displaystyle\sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{2j+1} \sim \sum_{j=0}^{2k}\frac{1}{2j+1} \sim \frac{1}{2k}\ln(2k) \sim \frac{1}{2}\ln k$ car $\lim \ln(k) = +\infty$ et $\dfrac{1}{2}\ln(2)$ est constant.

8 f étant paire, 2π-périodiq et contiue sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_p(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\cos(pt)\,dt$.

Mais $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin(2^{n^3}+1)\frac{t}{2}$ pour tout $t \in [0,\pi]$ et que la convergence de la série est unifrme sur $[0,\pi]$, donc :

$$\begin{aligned}
a_p(f) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^{\pi}\cos(pt)\sin(2^{n^3}+1)\frac{t}{2}dt\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi.n^2}\underbrace{\int_0^{\pi}\cos(pt)\sin(2^{n^3}+1)\frac{t}{2}dt}_{I_{p,2^{n^3}-1}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi.n^2}I_{p,2^{n^3}-1}, \quad k = 2^{n^3}-1 \text{ de sorte que } 2k = 2^{n^3}
\end{aligned}$$

9 Pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2p^3-1}(f)(0) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{2p^3-1} a_k(f)\cos(k.0) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{2p^3-1} a_k(f)$$
$$= -\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{k=0}^{2p^3-1} a_k(f)$$
$$= -\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{k=0}^{2p^3-1}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi.n^2} I_{k,2n^3-1}$$
$$= -\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi.n^2} \sum_{k=0}^{2p^3-1} I_{k,2n^3-1}$$
$$-\frac{a_0}{2}(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi.n^2} T_{2p^3-1,2p^3-1}$$
$$\geqslant \underbrace{-\frac{a_0}{2}(f) + \frac{2}{\pi.p^2} T_{2p^3-1,2p^3-1}}_{=w_p}$$

On sait que $T_{2p^3-1,2p^3-1} \sim \frac{1}{2}\ln(2^{p^3-1}) = \frac{1}{2}(p^3-1)\ln(2) \sim \frac{1}{2}p^3\ln(2)$, donc $w_p \sim \frac{p}{\pi}\ln(2) \underset{p\to+\infty}{\to} +\infty$ et par suite $\sum_{p\geqslant 1} S_{2p^3-1}(f)(0)$ diverge.

3 Partie III : Fonctions à variations bonées, théorème de Jordan

Pour $a < b$ deux réels, on pose $S[a,,b]$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.

10 $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x\cos(\frac{\pi}{2x}) & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$

Montrons que f est continue sur $[0,1]$.

La fonction f est continue sur $]0,1]$ par opérations. L'application $x \mapsto \cos(\frac{\pi}{2x})$ est bornée sur $]0,1]$, donc $\lim_{x\to 0^+} x.\cos(\frac{\pi}{2x}) = 0 = f(0)$ et suite f est continue en 0. En conclusion f est continue sur $[0;1]$.

Montrons que f n'est pas à variation bornée sur $[0;1]$.

Soit $\sigma = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n+1} \in S_{[0;1]}$ telle que : $\begin{cases} x_0 = 0, & x_{n+1} = 1 \\ \forall k \in [\![1,n]\!], & x_k = \dfrac{1}{2(n+1-k)} \end{cases}$

Pour $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a :

$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \frac{1}{2(n-k)}\cos(\frac{p}{2\frac{1}{2}(n-k)}) - \frac{1}{2(n+1-k)}\cos(\frac{\pi}{2\frac{1}{2(n+1-k)}}) = \cos((n-k)\pi) - \cos((n+1-k)\pi) = (-1)^{n-k}\left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)}\right)$, donc $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)}\right)$

pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$et par suite $V(\sigma,f) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2(n-k)} + \frac{1}{2(n+1-k)}\right) =$

$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right) \underset{n\to\infty}{\to} +\infty$, donc f n'est pas à variation bornée sur $[0,1]$.

11 Exemples généraux :

a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application monotone.

Lemme : f est variation bornée ssi $-f$ est à variation bornée

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$, f est à variation bonée ssi λf est à variation bornée.

La preuve du lemme est évidente.
Quitte a changer f en $-f$, supposons f est croissante sur $[a,b]$ et soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,b]}$, alors : $f(x_{k+1})\geqslant f(x_k)$ pour tout $k\in[\![1;n-1]\!]$
et $V(\sigma,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1})-f(x_k))=f(x_n)-f(x_0)=f(b)-f(a)$ pour tout $\sigma\in S_{[a,b]}$. D'où f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V([a,b],f)=f(b)-f(a)$.
En conclusion :
si f est monotone sur $[a,b]$, alors f est à variation bornée et $V([a,b],f)=|f(b)-f(a)|$

b Supposons $f=g+h$ avec g et h monotones sur $[a,b]$ et soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,b]}$, alors : $V(\sigma,f)\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|g(x_{k+1})-g(x_k)|+\sum_{k=0}^{n-1}|h(x_{k+1})-h(x_k)|=|g(b)-g(a)|+|h(b)-h(a)|$. Donc f est à variation bornée sur $[a,b]$ et $V([a,b],f)\leqslant V([a,b],g)+V([a,b],h)$..

c $f:[a,b]\to\mathbf{C}$ continue et C^1 par morceaux sur $[a,b]$.

Soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in S_{[a,b]}$, alors $V(\sigma,f)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\leqslant M(b-a)$ grâce à l'inégalité des accroissement finis appliquée a f sur $[x_k,x_{k+1}]$ avec $M=\max(\sup_{x\in[a,b]}\left|f'_d(x)\right|,\sup_{x\in[a,b]}\left|f'_g(x)\right|)$ où $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$ désignent resp. les dérivées à droite et à gauche de f au point x.

12

$f:[a,b]\to\mathbb{C}$ une application à variation bornée, $c\in]a,b[$
Soient $\sigma_1\in S_{[a,c]}$, $\sigma_2\in S_{[c,b]}$ et $\sigma=\sigma_1\vee\sigma_2$ subdivision de $[a,b]$ obtenue par juxtaposition des deux subdivisions, alors $V(\sigma_1,f)\leqslant V(\sigma,f)\leqslant V([a,b],f)$ et $V(\sigma_2,f)\leqslant V(\sigma,f)\leqslant V([a,b],f)$, donc $f_{/[a,c]}$ et $f_{/[c,b]}$ sont à variations bornées .
On a aussi : $V([a,b],f)\geqslant V(\sigma,f)=V(\sigma_1,f)+V(\sigma_2,f)$ pour tous σ_1 et σ_2. On passe à la borne sup. sur les $\sigma_1\in S_{[a,c]}$ pour avoir :$V([a,b],f)\geqslant V([a,c],f)+V(\sigma_2,f)$ et puis à la borne sup. sur les σ_2 pour obtenir :

$$V([a,b],f)\geqslant V([a,c],f)+V([c,b],f)$$

13

Soit $\sigma=(x_k)_{0\leqslant k\leqslant|n|N}\in S_{[0,2\pi]}$ telle que $x_k=\dfrac{2k\pi}{|n|N}$.
Pour $k\in\{1,...,|n|N\}$, $V_k(f)=V([x_{k-1},x_k],f)$.

a Pour $t\in[x_{k-1},x_k]$, on utilisera la subdivision $x_{k-1}\leqslant t\leqslant x_k$ de $[x_{k-1},x_k]$:
$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt\right|\leqslant\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}|(f(t)-f(x_k))|\,dt\leqslant\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}V_k(f)dt=\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f)(x_k-x_{k-1})$, donc :

$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(f(t)-f(x_k))e^{-int}dt\right|\leqslant\sum_{k=1}^{|n|N}V_k(f)(x_k-x_{k-1})$$

b $\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)e^{-int}dt\right|=\left|\sum_{k=1}^{|n|N}f(x_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-int}dt\right|$. Or $\int_{x_{k-1}}^{x_k}e^{-int}dt=-\dfrac{1}{in}\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right)$,
donc : $\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x_k)e^{-int}dt\right|=\dfrac{1}{|n|}\left|\sum_{k=1}^{|n|N}f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right)\right|$, Mais

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right) &= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_k} - \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_{k-1}}\\ &= \sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)e^{-inx_k} - \sum_{k=0}^{|n|N-1} f(x_{k+1})e^{-inx_k}\\ &= \sum_{k=0}^{|n|N-1}\left(f(x_k)-f(x_{k+1})\right)e^{-inx_k} + \underbrace{f(2\pi)e^{-i2n\pi}-f(0)e^{-inx_0}}_{=0}\\ &= \sum_{k=0}^{|n|N-1}\left(f(x_k)-f(x_{k+1})\right)e^{-inx_k}\end{aligned},$$

donc $\left|\sum_{k=1}^{|n|N} f(x_k)\left(e^{-inx_k}-e^{-inx_{k-1}}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{|n|N-1}|f(x_k)-f(x_{k+1})| = V([0,2\pi],f)$ et par suite :

$$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k)e^{-int}dt\right| \leqslant \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$$

c) Par la question a) et l'inégalité triangulaire , on a :

$\left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| - \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k))e^{-int}dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1})$, donc :

$$\begin{aligned}2\pi|c_n(f)| &= \left|\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right|\\ &= \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)e^{-int}dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \left|\sum_{k=1}^{|n|N}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_k))e^{-int}dt\right|\\ &\leqslant \sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) + \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f).\end{aligned}$$

Or : $\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f)(x_k-x_{k-1}) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}\sum_{k=1}^{|n|N} V_k(f) \leqslant \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f)$ (voir question 12)

D'où : $2\pi|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f) + \frac{2\pi}{|n|N}V([0,2\pi],f) = \frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)\left(1+\frac{2\pi}{N}\right)$ et que $\frac{1}{|n|}V([0,2\pi]$

$\frac{1}{|n|}V([0,2\pi],f)$ et par suite

$$|c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2\pi|n|}V([0,2\pi],f) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{Z}^*$$

14 On pose $S_n = \sum_{j=0}^{n} u_j$ et $\sigma_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$ et suppose que $\sigma_n \to L$ et $\exists A>0$ tel que $|u_k| \leqslant \frac{A}{k+1}$ pour tout k

a) Pour k et n des entiers naturels non nuls, on a :

$$\begin{aligned}k(S_n-L)-(n+k)(\sigma_{n+k-1}-L)+n(\sigma_{n-1}-L) &= kS_n-(n+k)\sigma_{n+k-1}+n\sigma_{n-1}\\ &= kS_n - \sum_{j=0}^{n+k-1} S_j + \sum_{j=0}^{n-1} S_j\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}(S_n-S_{j+n})\\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} u_l\end{aligned}$$

b Avec la relation précèdente et l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} k|S_n - L| &\leqslant \left|\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} u_l\right| + |(n+k)(\sigma_{n+k-1} - L)| + |n(\sigma_{n-1} - L)| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{l=n+1}^{j+n} \frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} \text{ car } (d_n) \text{ est décroissante} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} j\frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} = \frac{k(k-1)}{2}\frac{A}{n+2} + (k+2n)d_{n-1} \end{aligned}$$

D'où

$$|S_n - L| \leqslant \frac{(k-1)}{2}\frac{A}{n+2} + (1+\frac{2n}{k})d_{n-1}$$

c Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $(k-1)^2 \leqslant 4n^2 d_{n-1} \leqslant k^2$, alors :

$$\begin{aligned} |S_n - L| &\leqslant (1+\frac{2n}{k})d_{n-1} + \frac{(k-1)}{2}\frac{A}{n+2} \\ &\leqslant d_{n-1} + \frac{2n}{k}d_{n-1} + \frac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\ &\leqslant d_{n-1} + \frac{2n}{2n}\sqrt{d_{n-1}} + \frac{2n\sqrt{d_{n-1}}}{2(n+2)}A \\ &\leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}} \text{ car } \frac{2n}{2(n+2)} < 1 \end{aligned}$$

Comme (d_n) et décroissante et tend vers 0, la suite $(S_n)_n$ converge vers L.

15 Par le théorème de Fejer $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ .Soit $(d_n)_n$ une suite de reéls positifs telle que (d_n) est décroissante et tend vers 0 (appliquer le résultat de la question **5**) à al suite $\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}|\sigma_n(t) - f(t)|\right)_n$) et que $|\sigma_n(t) - f(t)| \leqslant d_n$ pour tout t.

Posons $\begin{cases} u_0(t) = c_0(f) \\ u_n(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $S_n(f)(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j(t)$. On a alors :

$|u_n(t)| \leqslant |c_n(f)| + |c_{-n}(f)| \leqslant \frac{V([0,2\pi],f)}{n\pi} = \frac{n+1}{n}\frac{V([0,2\pi],f)}{(n+1)\pi} \leqslant 2\frac{V([0,2\pi],f)}{(n+1)\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ (voir question **13.c**)). et que $|u_0(t)| = |c_0(f)|$

Donc : $|u_n(t)| \leqslant \frac{1}{n+1}A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $A = \max(|c_0(f)|, 2\frac{V([0,2\pi],f)}{\pi})$.

Par la question **14**) , pour tout réel t on a : $|S_n(f)(t) - f(t)| \leqslant d_{n-1} + (1+A)\sqrt{d_{n-1}}$ et par suite $(S_n(f))_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

16 φ étant continue et 2π-périodique. En écrivant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où $\varphi_1(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ \sqrt{t} \text{ si } t \in [0,\pi] \end{cases}$ et $\varphi_2(t) = \begin{cases} \sqrt{-t} \text{ si } t \in [-\pi, 0[\\ 0 \text{ si } t \in [0,\pi] \end{cases}$, on a laors φ est à variation bornée sur $[-\pi,\pi]$ car φ est somme de deux fonctions monotones.

Par la question **15**), la série de Fourier de φ converge uniformément vers φ sur $\mathbb{R}$.

17 Application :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ application 2π-périodique et α-lipschitzienne, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus si $\sigma = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in S_{[-\pi,\pi]}$, alors $|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \alpha|x_{k+1} - x_k| = \alpha(x_{k+1} - x_k)$ et par suite : $\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant \alpha\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = \alpha 2\pi$. Donc f est à variation bornée et d'après ce qui précède : (question 15) la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

.

Mamouni My Ismail

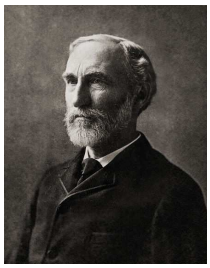
Devoir Libre n°26 (CCP 2010, MP)

Séries de Fourier
Phénomène de Gibbs

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

le Théorème des chats (attribué à Tom, démontré par Jerry).
Énoncé : Un chat a neuf queues.
Preuve : Aucun chat a huit queues. Un chat a une queue de plus qu'aucun chat. Donc un chat a neuf queues.



Josiah Willard Gibbs (1839-1903)

Physico-chimiste américain et l'un des fondateurs (avec Heaviside) de l'analyse vectorielle, il introduit l'analyse vectorielle en séparant la partie réelle et la partie vectorielle du produit de deux quaternions purs, ceci dans le seul but d'une utilisation en physique. En chimie physique, ses travaux en thermodynamique, travaux qui lui valent le prix Rumford, et en physique statistique, la médaille Copley. Il a en particulier introduit les notions de potentiel chimique, de variance et d'enthalpie libre.

Mathématicien du jour

EXERCICE 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y)=\frac{y^4}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0)=0.$$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0,0)$ que l'on déterminera.

2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

EXERCICE 2

1. Rappeler la définition (par les suites) d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.

2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application continue de E dans F.
Si A est une partie compacte de E, démontrer que $f(A)$ est une partie compacte de F.
L'image réciproque par f d'une partie compacte de F est-elle nécessairement une partie compacte de E ?

.

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0;\pi]$.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

(b) Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus et déterminer, avec soin, une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ vérifiant $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k$.

2. (a) Démontrer que la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n\,!}\right)_{n\geq 0}$ converge et que la suite $\left(\dfrac{\pi^n}{n.n\,!}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante.

(b) Si $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$, majorer $|R_n|$, en utilisant la question (a).

En déduire, en précisant la valeur de n utilisée, une valeur approchée du réel $\dfrac{2}{\pi}\,I$ à 10^{-2} près.

Première partie : Phénomène de Gibbs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ impaire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]0;\pi[\quad \text{et} \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

3. On pose pour tout entier naturel n non nul et t réel,

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}.$$

Démontrer, à l'aide d'une série de Fourier, que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4. Sur un même graphique, uniquement à l'aide d'une calculatrice, tracer sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{10}. Puis sur un autre graphique, tracer sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{20}.
Que constate-t-on sur les courbes des fonctions S_n lorsque t se rapproche de 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures ?
Cette particularité est appelée phénomène de Gibbs.

5. On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\sin[(2k+1)t].$$

.

(a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}.$$

Dans la suite de cette question 5., on considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $[a,b] \subset \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

(b) Justifier qu'il existe une constante M telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a,b]$, $T_n(t) \leq M$.

(c) Démontrer que l'on peut trouver une suite de réels (w_n) convergeant vers 0 et telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a,b]$, $|f(t) - S_n(t)| \leq w_n$.
En commençant par observer que $\sin[(2k+1)t] = T_{k+1}(t) - T_k(t)$, on pourra chercher à majorer, pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls et tout $t \in [a,b]$, $|S_{n+p}(t) - S_n(t)|$.
Que peut-on en déduire concernant la série de Fourier de la fonction f ?

6. (a) Calculer $S_n'(t)$ pour tout $t \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer la plus petite valeur α_n qui annule $S_n'(t)$ sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right]$.

(b) Démontrer que, pour $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et n entier naturel non nul,
$S_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ puis que $S_n(\alpha_n) = \dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin\frac{u}{2n}}\,\mathrm{d}u$.

(c) Démontrer que la suite $(S_n(\alpha_n))_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.
On pourra utiliser sans démonstration : pour $\theta \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\theta \geq \dfrac{2\theta}{\pi}$.

7. Démontrer que la suite $\left(\sup_{x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[} |S_n(x) - f(x)|\right)_n$ ne converge pas vers 0.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale

Pour une fonction f continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π, on note pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t.$$

8. Rappeler le théorème de Parseval (avec les coefficients $c_n(f)$) pour une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π.
Dans le cas où la fonction f est de plus continue sur $\mathbb{R}$, justifier que si pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$ alors f est la fonction nulle.
Ce résultat reste-t-il valable si la fonction f est seulement continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π ?

9. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π dont la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty}(c_{-p}(f)e^{-ipt} + c_p(f)e^{ipt}).$$

(a) Justifier que l'application g est continue sur $\mathbb{R}$ puis pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, exprimer, avec soin, $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.

.

(b) Démontrer que $f = g$.

10. Dans cette question, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe C^1 par morceaux.

On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$u_n(f)(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}.$$

(a) Déterminer une relation entre $c_n(f')$ et $c_n(f)$.

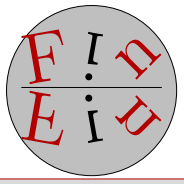
(b) Démontrer que pour tout t réel,

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2).$$

(c) Démontrer, avec soin, que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser vers quelle ffonction.

(d) Énoncer le théorème que l'on vient de démontrer.

Le phénomène de Gibbs peut-il se produire pour cette fonction f ?



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°26 (Pr Boujaida)

Séries de Fourier
Phénomène de Gibbs

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un physicien et un mathématicien discutent sur la terrasse d'un café. Ils remarquent que deux personnes entrent dans une maison située en face du café. Une heure plus tard, trois personnes en sortent.
- L'ingénieur : ≪ Les données initiales étaient erronées. ≫
- Le mathématicien : ≪ Si une personne entre de nouveau dans la maison, elle redeviendra vide. ≫

Mathématicien du jour

Lipót Fejér (1880-1959)

Mathématicien hongrois. Il a publié un théorème de convergence remarquable sur la convergence pour les séries de Fourier. Il a aussi été directeur de thèse de John von Neumann, Paul Erdős, George Pólya

1 Exercice 1

1 $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ et $\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=y\underset{y\to 0}{\longrightarrow}0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

2 $$\frac{f(x,y)-x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leq\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\leq\sqrt{x^2+y^2}.$$

donc $$\frac{f(x,y)-x\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y)\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0.$$

Alors f est différentiable en $(0,0)$.

2 Exercice 2

1 Voir cours.

2 Voir cours pour la première partie de la question. L'image réciproque d'un compact par une application continue n'est pas forcément un compact.

Il suffit de considérer la fonction sinus qui est continue sur $\mathbb{R}$, l'image réciproque du compact $[-1,1]$ par son intérmédiaire est $\mathbb{R}$ tout entier, qui n'est pas un compact.

3 Problème

3.1 Partie préliminaire

1 a) la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,\pi]$ prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0,\pi]$.

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$. et donc si $t \neq 0$,

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}.$$

Soit la fonction f somme de la série entière $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$. f est naturellement DSE sur $\mathbb{R}$, chacune de ses primitives l'est aussi, si on pose pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

alors

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Comme $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in]0,\pi]$ alors

$$F(\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \pi^{2n+1}$$

Soit $\quad I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ avec $u_n = \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

2 a) Utiliser de D'Alembert, ou alors mentionner le fait que la série entière $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini (c'est du cours).

Si on pose $a_n = \dfrac{\pi^n}{n.n!}$ alors $a_n > 0$ et $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\pi}{(n+1)!(n+1)} \leq \dfrac{\pi}{2.2} \leq 1$ si $n \geq 1$.

donc $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. Elle converge vers 0 puisque $a_n \leq \dfrac{\pi^n}{n!}$.

b) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_{2n+1}$ donc $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial de convergence des séries alternées, la série $\displaystyle\sum (-1)^n u_n$ est convergente et si on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ alors

$$|R_n| \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!\ (2n+3)}$$

Nous allons maintenant approcher le réel $\dfrac{2}{\pi} I$ par les termes $\dfrac{2}{\pi} S_n$ où S_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\displaystyle\sum (-1)^n u_n$.

$$\left|\frac{2}{\pi} S_n - \frac{2}{\pi} I\right| = \frac{2}{\pi}|R_n| \leq 2\frac{\pi^{2n+2}}{(2n+3)!\ (2n+3)} \leq 2\frac{10^{n+1}}{(2n+3)!\ (2n+3)}$$

Pour que $\dfrac{2}{\pi} S_n$ approche $\dfrac{2}{\pi} I$ à 10^{-2} près, il suffit que $2\dfrac{10^{n+1}}{(2n+3)!\ (2n+3)} \leq 10^{-2}$

soit $(2n+3)!\ (2n+3) \geq 2.10^{n+3}$.

$n = 3$ suffit et dans ce cas $\frac{2}{\pi} S_n \simeq 1,17$

3.2 Phénomène de Gibbs

3 Vu la parité de la fonction f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$, et par un calcul simple $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ses points de discontinuité sont ceux de la forme $k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

D'après le théorème de Dirichlet, pour tout point $x \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, point où f est continue

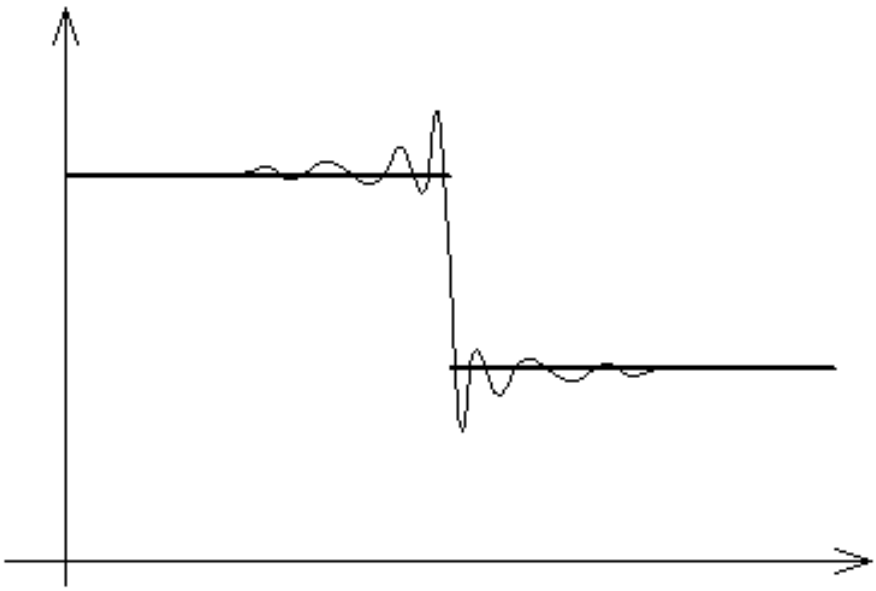
$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} \sin\left[(2k+1)t\right] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1}$$

égalité encore valable lorsque $t \in \pi\mathbb{Z}$ puisque dans ce cas $\sin\left[(2k+1)t\right] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $f(t) = 0$.

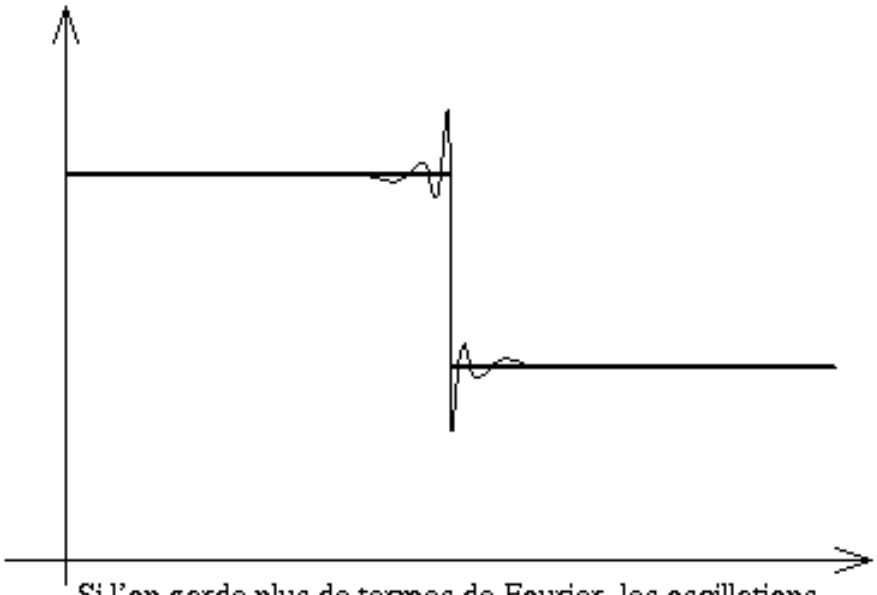
La suite de fonction $(S_n)_n$ converge donc simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

La convergence n'est pas uniforme puisque les fonctions S_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}$ est que f ne l'est pas.

4 Les graphes des fonctions S_{10}, S_{20} et séparèment celui de S_{200} pour une meilleure illustration du phénomène, sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$.



Effet de Gibbs sur un signal unidimensionnel discontinu



Si l'on garde plus de termes de Fourier, les oscillations conservent leurs amplitudes mais s'amortissent plus vite.

Au voisinage de 0, que ce soit à droite ou à gauche, la convergence de S_n vers f n'est pas uniforme. On perçoit de fortes perturbations de la fonction S_n au voisinage de 0, au fur est à mesure que n grandit. C'est le phénomène de Gibbs.

5 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left[(2k+1)t\right] &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n-1} e^{i(2k+1)t}\right) = \operatorname{Im}\left(e^{it}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2it}\right)^k\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(e^{it}\frac{1-e^{2int}}{1-e^{2it}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{e^{it}-e^{i(2n+1)t}}{1-e^{2it}}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{-2i\sin(nt)e^{i(n+1)t}}{-2i\sin(t)e^{it}}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}e^{int}\right) \\ &= \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} \end{aligned}$$

b) Soit un segment $[a,b] \subset]0,\pi/2[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a,b]$

$$T_n(t) \leq \frac{1}{\sin a}$$

On pose alors $M = \dfrac{1}{\sin a}$.

c) On exécute la transformation dite d'Abel, pour tout $n,p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned} S_{n+p}(t) - S_n(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin\left[(2k+1)t\right]}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_{k+1}(t)-T_k(t)}{2k+1} \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\sum_{k=n+2}^{n+p+1}\frac{T_k(t)}{2k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_k(t)}{2k+1}\right) \\ &= \frac{4}{\pi}\left(\frac{T_{n+p+1}}{2(n+p+1)-1} - \frac{T_{n+1}}{2(n+1)-1} + \sum_{k=n+1}^{n+p}T_k(t)\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right) \end{aligned}$$

De quoi on déduit

$$\begin{aligned}|S_{n+p}(t)-S_n(t)| &\leq \frac{4M}{\pi}\left(\frac{1}{2n+2p+1}+\frac{1}{2n+1}+\sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right)\\ &\leq \frac{4M}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+1}+\left(\frac{1}{2(n+1)-1}-\frac{1}{2n+2p+1}\right)\right)\\ &\leq \frac{4M}{\pi}.\frac{3}{2n+1}=\frac{12M}{\pi(2n+1)}\end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon>0$ et soit un entier N tel que $\dfrac{12M}{\pi(2N+1)}\leq\varepsilon$. Pour tous $n\geq N$, $p\in\mathbb{N}$ et pour tout $t\in[a,b]$ on a alors

$$|S_{n+p}(t)-S_n(t)|\leq\varepsilon$$

Ceci démontre que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur le segment $[a,b]$. Convergence qui se fait vers f puisque on a déjà vu qu'il y'a convergence simple vers f sur $\mathbb{R}$.

6 a) Soit $t\in]0,\pi/2]$.

$$S_n'(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left[(2k+1)t\right]=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}e^{i(2k+1)t}=\frac{4}{\pi}\Re\left(\frac{\sin nt}{\sin t}e^{int}\right)=\frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nt}{\sin t}$$

$S_n'(t)=0\iff\sin 2nt=0\iff\exists k\in\mathbb{Z};\ t=\dfrac{k}{2n}\pi$

La plus petite valeur qui annule S_n' sur $]0,\pi/2]$ est donc le réel $\alpha_n=\dfrac{\pi}{2n}$.

b) On a vu que pour tout $t\in]0,\pi/2]$, $S_n'(t)=\dfrac{\sin 2nt}{\sin t}$. La fonction $s_n:t\longmapsto\dfrac{\sin 2nt}{\sin t}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $s_n(0)=2n$.

S_n, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, est alors une primitive de s_n sur le segment $[0,\pi/2]$ avec $S_n(0)=0$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, pour tout $x\in[0,\pi/2]$

$$S_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x s_n(t)dt=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt$$

l'intégrale du dernier terme de cette égalité se faisant sur l'intervalle $]0,x]$. De là

$$S_n(\alpha_n)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2n}\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt\overset{u=2nt}{=}\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}du$$

c) En observant que $\dfrac{\sin u}{\sin(u/2n)}\sim\dfrac{\sin u}{u/2n}$ au voisinage de 0, on peut faire l'hypothèse que chose qu'on va s'atteler à démontrer.

On va utiliser les inégalités connues :

$\forall t\in[0,\pi/2]$, $\sin t\geq\dfrac{2}{\pi}t$ (concavité de sin sur $[0.\pi/2]$)

$\forall t\in\mathbb{R}$, $|\sin t-t|\leq\dfrac{1}{6}|t|^3$ (inégalité de Taylor–Lagrange).

On a alors pour tout $t\in]0,\pi/2]$

$$\left|\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right|=\frac{|t-\sin t|}{t\sin t}\leq\frac{\frac{1}{6}t^3}{t.\frac{2}{\pi}t}\leq\frac{\pi}{12}t$$

Si maintenant $n\in\mathbb{N}^*$ et $u\in]0,\pi]$ alors $\dfrac{u}{2n}\in[0,\pi/2]$ et donc

$$\left|\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}-\frac{\sin u}{u/2n}\right|\leq\frac{\pi}{12}.\frac{u}{2n}|\sin u|\leq\frac{\pi^2}{24n}$$

On intègre sur $]0,\pi]$

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}du-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u}{u}du\right|\leq\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin u}{\sin(u/2n)}-\frac{\sin u}{u/2n}\right|du\leq\frac{\pi^2}{24n^2}$$

Ce qui démontre l'assertion $(*)$, assertion qui signifie que

$$S_n(\alpha_n)\longrightarrow\frac{2}{\pi}I$$

7 $\alpha_n \in]0.\pi/2[$ donc $f(\alpha_n) = 1$ et donc

$$\sup_{x\in]0,\pi/2[} |S_n(x) - f(x)| \geq |S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| \geq |S_n(\alpha_n) - 1|$$

Puisque $(S_n(\alpha_n))$ converge vers $\frac{2}{\pi}I$ est que $\frac{2}{\pi}I \simeq 1,17$ d'après la question (2.b.) alors la quantité $\sup_{x\in]0,\pi/2[} |S_n(x) - f(x)|$ ne peut converger vers 0, car sinon $(S_n(\alpha_n))$ convergerait vers 1.

N.B : La question revient à démontrer que la suite de fonctions $(S_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur l'intervalle $]0,\pi/2[$. Tout le brique à braque mis en œuvre pour y arriver, en dehors de son aspect sportif, est inutile. En effet il suffisait de mettre en défaut le théorème d'interversion

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to0^+} S_n(x) \neq \lim_{x\to0^+}\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$$

La première double limite valant 0, la seconde 1.

La question aurait eu plus d'intérêt si elle s'était orientée vers une minoration effective de $\sup_{x\in]0,\pi/2[} |S_n(x) - f(x)|$.

3.3 Démonstration du théorème de la convergence normale

8 La formule de Parseval pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ cotinue par morceaux 2π-périodique

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Si f est continue et tous ses coefficients de Fourier sont nuls alors

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0 \quad (**)$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[0,2\pi]$, cela implique qu'elle est nulle sur ce segment et par périodicité, sur $\mathbb{R}$ tout entier. f est donc la fonction nulle.

Si maintenant f était seulement continue par morceaux, l'égalité $(**)$ est toujours valable, elle implique que f s'annule en tout point où elle est continue, et donc pas forcément partout nulle, sauf si ... elle était continue.

(Précisons, si f est 2π-périodique, continue par morceaux et vérifie l'égalité $(**)$ alors $f = 0 \iff f$ est continue)

9 f est continue 2π-périodique et sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty} c_p(f)e^{ipt} + c_{-p}(f)e^{-ipt}$$

a les fonctions $t \longmapsto c_p(f)e^{ipt} + c_{-p}(f)e^{-ipt}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ est la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$, donc g est continue sur $\mathbb{R}$.

Maintenant, grace à la convergence uniforme sur le segment $[0,2\pi]$ on peut intégrer terme à terme l'expression $g(t)e^{-int}$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n(f) = \frac{c_0(g)}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-int}dt + \frac{1}{2\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\left(c_p(f)\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t}dt + c_{-p}(f)\int_0^{2\pi} e^{-i(p+n)t}dt\right)$$

Comme pour tout $(k,h) \in \mathbb{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-h)t}dt = \delta_{kh}$ une seule des intégrales figurant dans cette expression est non nulle, elle est obtenue pour $p = n$ si $n \geq 0$, pour $p = -n$ si $n < 0$. Ce qui nous mène à

l'égalité

$$c_n(g) = c_n(f)$$

c $f - g$ est continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et par linéarité des coefficients de Fourier

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f-g) = c_n(f) - c_n(g) = 0$$

D'après la question (8.) on a donc $g = f$.

10 a f étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, une intégration par parties donne

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(\left[f(t)e^{-int}\right]_0^{2\pi} + in\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt\right) = inc_n(f)$$

b Pour deux nombres complexes a et b, $|ab| \leq \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right)$ (découle tout bêtement de $(|a| - |b|)^2 \geq 0$).

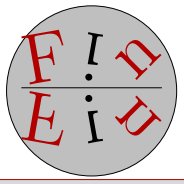
Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ alors $u_n(f)(t) = \frac{1}{in}\left(c_n(f')e^{-int} - c_{-n}(f)e^{int}\right)$ et donc

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{|c_n(f')|}{n} + \frac{|c_{-n}(f')|}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\left(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2\right)$$

c La fonction f' étant continue par morceaux 2π-périodique, d'après la formule de Parseval les séries à termes réels positifs $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ sont convergentes. La majoration obtenue dans la question précédente achève de démontrer que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Elle converge vers la fonction g définie dans la question (9.), toujours d'après cette question, on a forcément $g = f$.

Ainsi $\sum u_n(f)$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

d Le phénomène de Gibbs ne subsiste plus pour une fonction 2π périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

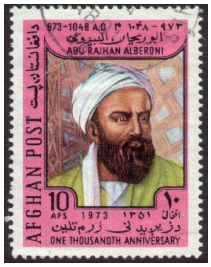
Devoir Libre n°27 (e3a 2005, MP)

Intégrales à paramètre
Exemple de calcul d'intégrale

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Il était une fois un explorateur qui tomba devant un lion. L'explorateur apeuré dit :
- Dieu, faites que ce lion soit croyant et ait une pensée et foie en vous.
Et le lion répondis : oh mon Dieu merci, que ce repas soit béni.



Abu Raihan Al-Biruni (973-1048 AD)

was a versatile scholar and scientist of the 11th century, who had equal facility in physics, metaphysics, mathematics, geography and history. Born in the town of Khewa near Khawarizm (present-day Uzbekistan) in 973 AD, he was a contemporary of the well-known physician Ibn Sina. He accurately determined the densities of 18 different stones. One of his famous books, Kitab-Al-Jawahir, deals with the properties of various precious stones. He also developed a method for trisection of angle and other problems that cannot be solved with a ruler and a compass alone. He also discussed, centuries before the rest of the world, the question whether the earth rotates around its axis or not. He also ascertained that the speed of light, as compared to the speed of sound, was immense. He has been considered to be the greatest of all times.

Mathématicien du jour

1 Partie I

Soit $\mathbf{I}$ un intervalle[1] de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle sur $\mathbf{I}$:

$$y'' + y = 0 \quad (\mathcal{E}_0)$$

1 Montrer que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbf{I}$ est $\left\{x \to A\cos x + B\sin x \mid (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

2 Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$ sur l'intervalle[2] $\mathbf{I}$. Que peut-on dire des suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\frac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$?

3 Soit g une solution de $(\mathcal{E}_0)$. On suppose que $g(x)$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que g est la fonction nulle.

1. Note UPS : non réduit à un point
2. Note UPS : pour cette question et la suivante, $\mathbf{I}$ voisinage de $+\infty$

2 Partie II

Dans cette partie, on note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ le espace vectoriel des fonctions[3] de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (0,0,1,0),\ e_4 = (0,0,0,1).$$

Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. On note h_v l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_v : x \mapsto (ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x.$$

On note V l'ensemble des applications h_v lorsque v parcourt $\mathbb{R}^4$.

1 Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2 Démontrer que l'application qui envoie le vecteur v sur l'application h_v définit un isomorphisme entre $\mathbb{R}^4$ et V. En déduire que $\mathcal{B} = \{h_{e_1}, h_{e_2}, h_{e_3}, h_{e_4}\}$ est une base de V.

3 Soit $v = (a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$. Exprimer l'application $x \mapsto h_v''(x) + h_v(x)$. On note $\psi(h_v)$ cette application.

i Démontrer que ψ est un endomorphisme de V.

ii Déterminer le noyau de ψ. Quel est le rang de ψ ?

iii Expliciter la matrice de ψ sur la base de V, notée $\mathcal{B}$, déterminée à la question 2. En déduire une base de l'image de ψ.

4 On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$: $y'' + y = \cos x \quad (\mathcal{E}_1)$ Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}$.

Dans le reste du problème, on considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$: $y'' + y = \dfrac{1}{x} \quad (\mathcal{E})$

3 Partie III

Dans cette partie, on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $F(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

1 Soit x un réel positif.

a Démontrer l'inégalité : $\forall t \in \mathbb{R}_+, F(x,t) \leq \dfrac{1}{1+t^2}$.

b En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x,t)\,dt$ est convergente.

On peut donc définir sur $\mathbb{R}_+$ une fonction G en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, G(x) = \int_0^{+\infty} F(x,t)\,dt.$$

2 En utilisant l'inégalité démontrée en 1a, justifier que la fonction G est continue sur $\mathbb{R}_+$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

3 On se propose de démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit ϵ un réel strictement positif.

a Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer la dérivée partielle $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ au point (x,t).

3. Note UPS : à valeurs réelles

b En utilisant l'inégalité

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, \forall t \in \mathbb{R}_+, \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\epsilon t}$$

que l'on justifiera, démontrer les points suivants :

i Pour $x \geq \epsilon$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt$ est convergente.

ii La fonction G est dérivable sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

c Conclure.

4 En suivant les mêmes étapes que pour la question 3, démontrer que G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée seconde vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

5 Montrer que G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

6 a Démontrer que G est une application décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

b En déduire que $G(x)$ admet une limite lorsque x tend vers $+\infty$. Déterminer cette limite.

4 Partie IV

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que f vérifie les quatre conditions suivantes :

a f est positive ;

b f est décroissante ;

c $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$;

d l'application g définie, pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, par $g(t) = tf(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures.

1 Soit $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Montrer que la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (on énoncera précisément le théorème utilisé).

2 Montrer que $\sin(t)f(t)$ admet une limite lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. En déduire que la fonction $|\sin(t)|\,f(t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0,x]$, pour tout $x > 0$.

3 Soit n un entier naturel non nul. On pose w_n le réel défini par :

$$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\,f(t)\,dt.$$

a Justifier l'encadrement : $2f((n+1)\pi) \leq w_n \leq 2f(n\pi)$.

b En déduire qu'il existe u_n dans l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

c Montrer que :

$$w_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\ dt.$$

4 On considère les deux suites $\left\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\ dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\ dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

a Montrer que la suite $\left\{\int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\ dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

b Montrer que la suite $\left\{\int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\ dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c En comparant les termes de ces deux suites, établir la convergence de chacune d'entre elles vers une limite l commune.

Pour tous réels positifs x et y tels que $x \leq y$, on pose $I_f(x,y) = \int_x^y \sin(t)f(t)\ dt$.

5 Déduire de 4. que l'application $I_f(x,y)$ admet une limite finie lorsque y tend vers $+\infty$. On note $\int_x^{+\infty} \sin(t)f(t)\ dt$ cette limite.

6 Soit x un réel positif. Justifier l'existence de $I_x = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$.

Partie V

1 Soit x un réel strictement positif. Montrer que la fonction h_x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $h_x(t) = \frac{1}{x+t}$, vérifie les hypothèses de la partie IV.

On peut donc définir une fonction H sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\ dt.$$

2 En effectuant un changement de variables, démontrer l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\ dt.$$

3 En développant $\sin(t-x)$, démontrer que H est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H''(x) + H(x) = \frac{1}{x}.$$

4 Quelle est la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

5 En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, H(x) = G(x),$$

la fonction G étant définie dans la partie III.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

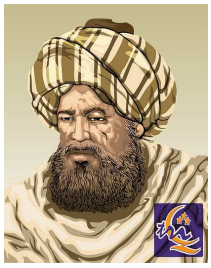
Corrigé Devoir Libre n°27 (Pr. Patte)

Intégrales à paramètre
Exemple de calcul d'intégrale

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

C'est un type qui se promène dans la rue, et accroché sur la porte d'une entrée d'un jardin, il voit : ATTENTION PERROQUET MÉCHANT ! Et un peux plus loin dans le jardin, il aperçoit notre bête, attachée sur un perchoir. Notre, un hardi gaillard se marre en voyant la bestiole attachée sur son perchoir. Décidant de tenter le diable, il passe la barrière et pénètre dans le jardin. Soudain, le perroquet : "REX, ATTAQUE !!!!"



Al-Battani (env. 855-923)

Astronome et mathématicien musulman, d'origine turque. On le désigne parfois comme le ≪ Ptolémée des Arabes ≫. Il a découvert le mouvement de l'apogée du Soleil, calculé l'inclinaison de l'axe terrestre (23° 35'). Il a introduit l'usage du sinus dans les calculs, et en partie celui de la tangente, formant ainsi les bases de la trigonométrie moderne.

Mathématicien du jour

1 Partie I

1 On suppose $\mathbf{I}$ non réduit à un singleton. L'équation différentielle $(\mathcal{E}_0)$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2, résolue en y'', homogène, à coefficients continus sur l'intervalle $\mathbf{I}$. L'ensemble des solutions sur $\mathbf{I}$ est un espace vectoriel de dimension deux. Les fonctions sin et cos sont deux solutions de $(\mathcal{E}_0)$, indépendantes (de wronskien constant non nul). Elles forment donc une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbf{I}$.

2 On suppose que $\mathbf{I}$ est un voisinage de $+\infty$. On écrit g comme combinaison linéaire de sin et cos : $g = A.\cos + B.\sin$. Alors les suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\frac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement $((-1)^n.A)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n.B)_{n\in\mathbb{N}}$. Elles ne peuvent converger que si $A = B = 0$.

3 On suppose encore que $\mathbf{I}$ est un voisinage de $+\infty$ et on reprend les notations de la question précédente. On note l la limite de g en $+\infty$. Comme les suites $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, les suites $(g(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(g(\frac{2n+1}{2}\pi)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers l. D'après la question précédente, $A = B = 0$. Donc g est la fonction nulle.

2 Partie II

Il faut préciser que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$sur $\mathbb{R}$.

1 L'application $\mathcal{H}$ qui envoie v sur h_v est linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et V en est l'image. Donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

2 Il reste à justifier que $\mathcal{H}$ est injective. Soit $v=(a,b,c,d)$ dans $\mathbb{R}^4$ tel que $h_v=0$.
Alors $h_v(x)=0$ et $h_v'(x)=(a+d+cx)\cos x+(c-b-ax)\sin x=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
On a donc le système $\begin{cases} h_v(0) = b = 0 \\ h_v(\pi/2) = d+c.\pi/2 = 0 \\ h_v'(0) = a+d = 0 \\ h_v'(\pi/2) = c-a.\pi/2 = 0 \end{cases}$.

On calcule a et c en fonction de d dans les équations 2 et 3 : $a=-d$; $c=-2d/\pi$; et en reportant dans la dernière équation : $d(-2/\pi-\pi/2)=0$. D'où $d=0$, puis $a=c=0$. Donc $v=0$.

Donc $\mathcal{H}$ est injective : c'est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ sur V. Comme $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, son image $\mathcal{B}$ est une base de V.

3 Avec les notations précédentes, $h_v=a.h_{e_1}+b.h_{e_2}+c.h_{e_3}+d.h_{e4}$ et, après deux lignes de calcul,

$$\psi(h_v)=c\cos-a\sin=c.h_{e_2}-a.h_{e_4}$$

i ψ est linéaire par linéarité de la dérivation, et à valeurs dans V.

ii $\psi(h_v)=0\Leftrightarrow c=a=0\Leftrightarrow h_v\in\text{Vect}(h_{e_2},h_{e_4})$. Donc $\ker(\psi)=\text{Vect}(h_{e_2},h_{e_4})$. On en déduit que (h_{e_2},h_{e_4}) est une base de $\ker(\psi)$, donc $\dim(\ker(\psi)=2$. Le théorème du rang donne alors $\text{rg}(\psi)=\dim V-\dim\ker(\psi)=2$.
Le calcul de $\psi(h_v)$ donne aussi $\text{Im}(\psi)=\text{Vect}(h_{e_2},h_{e_4})$ et (h_{e_2},h_{e_4}) est une base de $\text{Im}(\psi)$.

iii Comme $\psi(h_{e_2})=\psi(h_{e_4})=0$, que $\psi(h_{e_1})=-h_{e_2}$ et $\psi(h_{e_2})=h_{e_4}$, la matrice de ψ dans V vaut

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est de rang 2, donc $\dim(\text{Im}(\psi))=\text{rg}(\psi)=2$. L'image de ψ contient les éléments indépendants h_{e_2} et h_{e_4} : donc (h_{e_2},h_{e_4}) est une base ψ.

4 $\cos=h_{e_2}=-\psi(h_{e_1})$. Donc $-h_{e_1}:x\mapsto-x\cos x$ est une solution particulière de $(\mathcal{E}_1)$. On en déduit la solution générale de $(\mathcal{E}_1)$: somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée $(\mathcal{E}_0)$, soit $x\mapsto-x\cos x+A\cos x+B\sin x$ avec A et B constantes réelles.

3 Partie III

1 Soit x un réel positif.

a $\forall t\in\mathbb{R}_+, e^{-tx}\leq 1$ et $0\leq\dfrac{1}{1+t^2}$, donc $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\leq\dfrac{1}{1+t^2}$.

b La fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part, elle est positive. D'après 1b, elle est dominée au voisinage de $+\infty$ par $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc $t\mapsto\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}F(x,t)\,dt$ est convergente.

2 On vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
* Domination : $\forall x, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est indépendante de x, continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (id 1b).

Le théorème affirme alors la continuité de G sur $\mathbb{R}_+$.

a Les fonctions polynômes $(x,t) \mapsto -xt$ et $(x,t) \mapsto 1+t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et la seconde ne s'annule pas. Par composition avec la fonction exponentielle, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis quotient, F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -tF(x,t) = -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$.

b Pour $t \geq 0$, ou bien $t \leq 1 \leq 1+t^2$, ou bien $t \leq t^2 \leq 1+t^2$; donc $\dfrac{t}{1+t^2} \leq 1$. Donc $\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$. Si $x \geq \varepsilon$, alors $\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-\varepsilon t}$.

i Même raisonnement qu'au 1b en remarquant que $e^{-\varepsilon t}$ est dominée au voisinage de $+\infty$ par $\dfrac{1}{t^2}$.

ii On vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous une intégrale.

* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $F(x,.) : t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
* $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ existe sur $]\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \varepsilon$, la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.) : t \mapsto -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}(.,t) : x \mapsto -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]\varepsilon, +\infty[$.
* Domination : $\forall x > \varepsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-\varepsilon t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t}$ est indépendante de x, continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $]\varepsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\varepsilon, +\infty[, G'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2}\,dt.$$

c Comme tout $x > 0$ admet un voisinage du type $]\varepsilon, +\infty[$ avec $\varepsilon > 0$ et que la dérivabilité est une notion locale, la fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

3 On note $\varphi(x,t) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -tF(x,t) = -\dfrac{te^{-xt}}{1+t^2}$ de sorte que $\forall x \in]0, +\infty[, G'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x,t)\,dt$.

Soit $\varepsilon > 0$.

* Pour tout $x > \varepsilon$, la fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
* $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ existe sur $]\varepsilon, +\infty[\times\mathbb{R}_+$ et pour tout $x > \varepsilon$, la fonction $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,.) : t \mapsto \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) (et intégrable) sur $\mathbb{R}_+$.
* Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(.,t) : x \mapsto \dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $]\varepsilon, +\infty[$.
* Domination : $\forall x > \varepsilon, t \in \mathbb{R}_+, \left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq e^{-\varepsilon t}$ et la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t}$ est indépendante de x, continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de dérivation sous une intégrale, la fonction G' est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur l'intervalle $]\epsilon, +\infty[$ et on a

$$\forall x \in]\epsilon, +\infty[, G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\, dt.$$

On termine comme au 3c : la fonction G est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même de classe $\mathcal{C}^2$) et la formule précédente est valable sur tout cet ensemble.

4 $G(x) + G''(x)$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \left[\frac{1}{-x} e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$
Donc G est une solution de l'équation différentielle $\mathcal{E}$.

5 a Pour tout $x > 0$, $G'(x) \leq 0$ et G est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc G est une application décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

b Comme G est décroissante et minorée par 0 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, $G(x)$ admet une limite finie positive lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour $x > 0$: comme $\frac{1}{1+t^2} \leq 1$, on a $0 \leq G(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$. Donc $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4 Partie IV

1 La suite (u_n) est croissante et f décroissante. La suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. Comme elle est de limite nulle, la série de terme général $(-1)^n f(u_n)$ est convergente (critère des séries alternées).

2 Au voisinage de 0, $\sin(t)f(t) \sim tf(t)$, donc $\sin(t)f(t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures. On en déduit que la fonction $|\sin(t)|\, f(t)$, continue sur $\mathbb{R}_+^*$, est prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur l'intervalle $[0, x]$ pour tout $x > 0$ et, plus généralement, sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

3 a Sur le segment $[n\pi, (n+1)\pi]$, par décroissance de f et positivité de $|\sin(t)|$, on a l'encadrement

$$|\sin(t)|\, f((n+1)\pi) \leq |\sin(t)|\, f(t) \leq |\sin(t)|\, f(n\pi).$$

En intégrant, on obtient

$$f((n+1)\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\, dt \leq w_n \leq f(n\pi) \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\, dt.$$

Comme sin est de signe constant sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ (celui de $(-1)^n$),

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t)|\, dt = \left| \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t)\, dt \right| = \cdots = 2.$$

D'où l'encadrement demandé.

b Comme $2f$ est une fonction continue sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, il existe $u_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$ tel que $w_n = 2f(u_n)$.

c Sur $[n\pi, (n+1)\pi]$, $\sin(t) = \sin(t - n\pi + n\pi) = (-1)^n \underbrace{\sin(t - n\pi)}_{\geq 0} = (-1)^n |\sin(t)|$.

D'où l'égalité $w_n = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin(t) f(t)\, dt$.

4 On note $p_n = \int_0^{2n\pi} \sin(t)f(t)\,dt$ et $q_n = \int_0^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt$.

a $p_{n+1} - p_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt + \int_{(2n+1)\pi}^{2(n+1)\pi} \sin(t)f(t)\,dt$
$= (-1)^{2n}w_{2n} + (-1)^{2n+1}w_{2n+1} = w_{2n} - w_{2n+1}$.
Comme au 1, $(f(u_n))$ est décroissante. Donc (w_n) est décroissante et $p_{n+1} - p_n \geqslant 0$ pour tout n. Concluion : (p_n) est croissante.

b De même, $q_{n+1} - q_n = -w_{2n+1} + w_{2n+2} \leqslant 0$. Donc (q_n) est décroissante.

c $q_n - p_n = (-1)^n w_n = 2(-1)^n f(u_n)$. Comme f a une limite nulle en $+\infty$ et que (u_n) tend vers $+\infty$, $(q_n - p_n)$ tend vers 0. Les deux suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune.

5 On déduit de la question 4 que la suite $\left\{\int_0^{n\pi} \sin(t)f(t)\,dt\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain l.
Soit maintenant $y \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\pi \leqslant y < (n+1)y$: n est la partie entière de y/π.
Alors $I_f(0,y) = \int_0^{n\pi} \sin(t)f(t)\,dt + \int_{n\pi}^{y} \sin(t)f(t)\,dt$.
Dans cette somme, comme n tend vers $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers l quand y tend vers $+\infty$.
De plus $\left|\int_{n\pi}^{y} \sin(t)f(t)\,dt\right| \leqslant \int_{n\pi}^{y} |\sin(t)|\,f(t)\,dt \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(t|)f(t)\,dt = w_n$. Comme w_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, $\int_{n\pi}^{y} \sin(t)f(t)\,dt$ tend vers 0 quand y tend vers $+\infty$.
Finalement, $I_f(0,y)$ tend vers l quand y tend vers $+\infty$.

Pour terminer, $I_f(x,y) = I_f(0,y) - I_f(0,x)$ tend vers $l - I_f(0,x)$ quand y tend vers $+\infty$.

6 Il suffit de vérifier que $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ satisfait les hypothèses de la partie IV, ce qui est immédiat.

5 Partie V

1 Immédiat !!!

2 Le changement de variables $(u = t + x)$ est immédiat à repérer, mais aucun théorème du cours ne l'autorise car la fonction sous l'intégrale n'est pas intégrable. On le fait en revenant à la définition.
$\int_0^y \dfrac{\sin(t)}{t+x}\,dt = \int_x^{x+y} \dfrac{\sin(u-x)}{u}\,du$. Puis on fait tendre y vers $+\infty$ et on obtient l'égalité annoncée dans l'énoncé.

3 En écrivant $\sin(t-x) = \sin(t)\cos(x) - \sin(x)\cos(t)$ et en posant dans l'une des intégrales $u = t - \pi/2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_x^y \frac{\sin(t-x)}{t}\,dt &= \cos(x)\int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^y \frac{\cos(t)}{t}\,dt\\ &= \cos(x)\int_x^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_{\pi/2}^y \frac{\cos(t)}{t}\,dt\\ &= \cos(x)\int_0^y \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_0^{y-\pi/2} \frac{\sin(u)}{u+\pi/}\end{aligned}$$

On fait tendre y vers $+\infty$:

$$H(x) = \cos(x)\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt - \cos(x)\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt + \sin(x)\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt - \sin(x)\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du.$$

Comme $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même $\mathbb{R}_+$) de dérivée $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$. De même, $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \displaystyle\int_{\pi/2}^x \frac{\cos(t)}{t}\,dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$.

Par produit et combinaison linéaire, H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}H'(x) = &-\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\sin(x)\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\,dt-\cos(x).\frac{\sin(x)}{x}\\&+\cos(x)\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\,dt+\sin(x).\frac{\cos(x)}{x}-\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\end{aligned}$$

D'où

$$H'(x) = -\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\sin(x)\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\cos(x)\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\,dt-\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du.$$

De même, H' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\begin{aligned}H''(x) = &-\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\cos(x)\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\sin(x).\frac{\sin(x)}{x}\\&-\sin(x)\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\,dt+\cos(x).\frac{\cos(x)}{x}+\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\end{aligned}$$

D'où

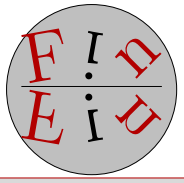
$$\begin{aligned}H''(x) &= -\cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\cos(x)\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\frac{1}{x}+\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\\&= -H(x)+\frac{1}{x}\end{aligned}$$

4 On reprend l'expression de la question 3 :

$$\begin{aligned}H(x) &= \cos(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt-\cos(x)\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\,dt+\sin(x)\int_{\pi/2}^x\frac{\cos(t)}{t}\,dt-\sin(x)\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\\&= \cos(x)\underbrace{\left\{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt-\int_0^x\frac{\sin(t)}{t}\,dt\right\}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}+\sin(x)\underbrace{\left\{\int_0^{x-\pi/2}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du-\int_0^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u+\pi/2}\,du\right\}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\end{aligned}$$

Comme sin et cos sont bornées, $H(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5 La fonction $H-G$ est solution de l'équation $(\mathcal{E}_0)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et a une limite finie 0 en $+\infty$. D'après la première partie, c'est donc la fonction nulle. Donc $G = H$ sur $\mathbb{R}_+^*$.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°6 (28 mars 2011, 4 heures)

Séries de fonctions, entières
Séries de Fourier
Intégrales à paramètre

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Des suites de Gauchers (Cauchy) adjacents (voisins) ont envie de s'amuser, et elles décident de converger à une soirée "sans-limite". Mais à l'entrée, on leur affiche que : "C'est complet !" et on les conseille d'aller voir ailleurs où est organiser une soirée "avec-limite" plus adaptée à leur nature de Gauchers.

Abou dHamid Modhammed ibn Modhammed al-Ghazālī (1058-1111)

Penseur musulman d'origine persane. Personnage emblématique dans la culture musulmane, déçu dans sa recherche d'une vérité philosophique finale, il s'oriente vers un mysticisme profond refusant toute vérité aux philosophes et les accusant d'infidélité dans son ouvrage Tahafut al-Falasifa.

Mathématicien du jour

1 Problème : Séries de Fourier et la fonction Gamma (CCP 2003, PC)

1.1 PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0,1[$, on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :

-Pour tout $t \in [-\pi,\pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,

-La fonction φ_u est périodique de période 2π.

Soit $\frac{1}{2}a_0(u) + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(u)\cos nt$ la série de Fourier de la fonction φ_u.

I.1 Calculer $a_n(u)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La fonction φ_u est-elle égale en tout point de $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier ?

I.2 En déduire pour tout $u \in]0,1[$, l'égalité :

$$\frac{\pi\cos\pi u}{\sin\pi u} - \frac{1}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2-n^2}.$$

I.3 Montrer que la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement sur $[0,1[$, et que la série de fonctions de terme général $u_n'(x)$ converge normalement sur tout segment $[0,a] \subset [0,1[$.

En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.

I.4 Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x) = x, \qquad s_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) s_{n-1}(x) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Montrer que la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Nous noterons s sa limite.

I.4.2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s_n(x+1) = \dfrac{x+n+1}{x-n} s_n(x)$.
En déduire que $s(x+1) = -s(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.4.3 Calculer $s(x)$ pour tout $x \in [0,1[$.
En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $s(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.

1.2 PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} x(x+1)\dots(x+n-1) = \frac{n^{-x}}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-1} (x+k).$$

II.1 .

II.1.1 Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre entier naturel. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(-p)$.

II.1.2 On suppose que x n'est pas un nombre entier négatif ou nul.
Montrer que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite non nulle (on pourra considérer la série de terme général $\ln \dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir d'un certain rang N_x que l'on déterminera en fonction de x).
Nous noterons f la fonction $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = xf(x+1)$.
Calculer $f(1)$ et en déduire $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x)f(1-x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.
On pourra étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$ le rapport $\dfrac{f_n(x)f_n(1-x)}{s_n(x)}$.

II.4 On se propose dans cette question de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a la relation :

$$(1) \qquad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

II.4.1 Montrer que la relation (1) est vérifiée lorsque px est entier négatif ou nul.

II.4.2 On suppose que px n'est pas entier négatif, et soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{p^{px-1} f_{pn}(px)}{\prod\limits_{k=0}^{p-1} f_n\left(x + \frac{k}{p}\right)}$ ne dépend pas de x. En déduire que f vérifie une relation du type :

$$f(px) = A_p\, p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x + \frac{k}{p}\right).$$

où A_p est un nombre réel positif ou nul dépendant de p.

II.4.3 En écrivant pour $x = \dfrac{1}{p}$ la relation ci-dessus, montrer que :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1 - \frac{k}{p}\right) = 1.$$

En déduire une expression de A_p^2 en fonction de p et de $\prod\limits_{k=1}^{p-1} \sin \dfrac{k\pi}{p}$.

II.4.4 Montrer l'identité suivante entre fonctions polynômes de la variable réelle x :

$$(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2=\prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right).$$

En donnant à x la valeur 1, en déduire les valeurs de $\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}$ et de A_p, ainsi que la relation (1).

1.3 PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

III.1 Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de Γ et montrer que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x\in]0,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x)=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$.

III.2.1 On pose $g_n(x)=\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,du$. Déterminer une relation entre $g_n(x)$ et $g_{n-1}(x+1)$ et en déduire l'expression de $g_n(x)$ en fonction de x et n.
En déduire que $G_n(x)=\dfrac{n}{(n+x)f_n(x)}$.

III.2.2 Montrer que pour tout $t\in[0,n]$ on a les inégalités $e^{-t}\geq\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ et $e^t\geq\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$. En déduire que l'on a $0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right]$ pour tout $t\in[0,n]$.

III.2.3 Montrer, par récurrence sur n, que l'on a $(1-a)^n\geq 1-na$ pour tout $a\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$.
En déduire que pour tout $t\in[0,n]$ on a les inégalités :

$$0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq\frac{t^2e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Déduire de ce qui précède la limite, pour $x\in]0,+\infty[$, de $G_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et exprimer $f(x)$ en fonction de $\Gamma(x)$ pour $x\in]0,+\infty[$.

III.3 Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 Exercice 1 : Étude d'un cylindre (cnc 89, MP)

3 Exercice 2 : séries entière équivalente (e3a 2006, MP)

5. *Application* :

Déterminer un équivalent au voisinage de l'infini de : $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

Exercice 2.

Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à termes strictement positifs et telles que : $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$.

On suppose d'autre part que la fonction $f : t \mapsto f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $\mathbf{R}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $g : t \mapsto g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$?

2. Justifier l'existence d'une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et telle que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\quad a_n = b_n\,(1+\gamma_n)$$

3. Soit $m \in \mathbf{N}$.

3.1. Prouver l'existence de $\delta_m = \sup_{n\geqslant m} |\gamma_n|$.

3.2. Montrer que :

$$\forall\, t > 0,\ \forall\, m \in \mathbf{N},\ \left|\frac{f(t)}{g(t)} - 1\right| \leqslant \delta_m + \frac{1}{b_{m+1}\,t^{m+1}} \sum_{n=0}^{m} |\gamma_n|\, b_n\, t^n.$$

3.3. En déduire que : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Applications :

4. Soit h la fonction définie par : $t \mapsto h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{n!} t^n$.

4.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h.

4.2. Trouver un équivalent de $h(t)$ au voisinage de $+\infty$.

5. Soit (E) l'équation différentielle définie sur $\mathbf{R}$:

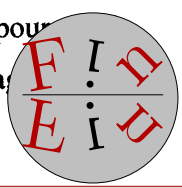
$$ty''(t) + (1-t)y'(t) = 1$$

5.1. Démontrer que (E) possède une unique solution z développable en série entière à l'origine telle que : $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

Préciser les coefficients de ce développement.

5.2. Donner une expression simple de $z'(t)$ pour

5.3. Trouver un équivalent de $z(t)$ au voisina



Bonne Chance

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé N°6

Séries de fonctions, entières
Séries de Fourier
Intégrales à paramètre

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

pour l'optimiste le verre est à moitié plein
pour le pessimiste il est à moitié vide
pour l'ingénieur sa capacité n'est pas à son rendement maximum

Abu Muhammad Abdullah Ibn Ahmad Ibn al-Bitar (?-1248)

was one of the greatest scientists of Muslim Spain and was the greatest botanist and pharmacist of the Middle Ages. He was born in the Spanish city of Malaqa (Malaga) towards the end of the twelfth century. He learned botany from Abu al-Abbas al-Nabati, a learned botanist, with whom he started collecting plants in and around Spain. In 1219 he left Spain on a plant-collecting expedition and travelled along the northern coast of Africa as far as Asia Minor. The exact modes of his travel (whether by land or sea) are not known, but the major stations he visited include Bouaghia, Constantine, tunis, Tripoli, Barqa and Adalia. After 1224, he entered the service of al-kamil, the Egyptian Governor, and was appointed chief herbalist. In 1227, al-kamil extended his domination to Damascus, and Ibn al-Bitar accompanied him there which provided him an opportunity to collect plants form stations located there.

Mathématicien du jour

1 Problème (CCP 2003, PC) : Corrigé Pr. Crépy

1.1 PARTIE I

Pour tout nombre réel $u \in]0,1[$, on définit la fonction φ_u de la variable réelle t par :
-Pour tout $t \in [-\pi,\pi[$, $\varphi_u(t) = \cos ut$,
-La fonction φ_u est périodique de période 2π.

I.1 La fonction φ_u est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'établir la continuité en π pour en déduire, par 2π-périodicité, la continuité de φ_u sur $\mathbb{R}$.
Pour $t \in [\pi, 3\pi[$,on a $\varphi_u(t) = \varphi_u(t-2\pi) = \cos u(t-2\pi)$ et $\lim\limits_{t\to\pi_+} \varphi_u(t) = \cos u\pi$ qui est égal à $\lim\limits_{t\to\pi_-} \varphi_u(t)$. cqfd
La continuité en π permet d'écrire $\varphi_u(t) = \cos ut$ pour tout $t \in [-\pi,\pi]$.
Etablissons maintenant la parité de φ_u sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $t \in [(2n-1)\pi, (2n+1)\pi[$. On a donc $\varphi_u(t) = \varphi_u(t-2n\pi)$.
φ_u est clairement paire sur $[\pi,\pi]$ donc $\varphi_u(t-2n\pi) = \varphi_u(2n\pi - t)$.
Enfin $\varphi_u(-t+2n\pi) = \varphi_u(-t)$ car $-t \in](-2n-1)\pi, (-2n+1)\pi]$. cqfd

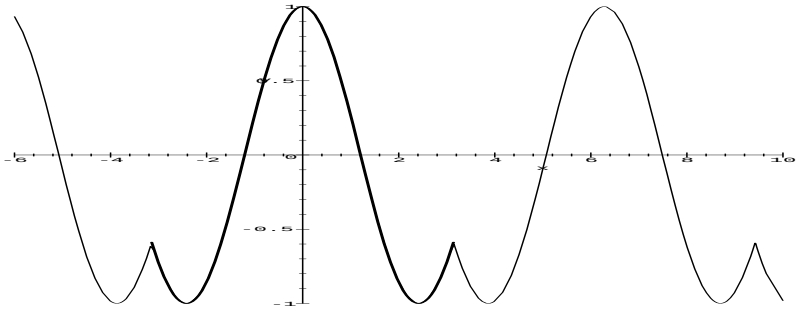


Figure 1 : graphe de $\varphi(u)$ pour $u = 1.3$

Il en résulte que

$$a_n(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_u(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi_u(t)\cos nt\,dt \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} a_n(u) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos ut\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(u-n)t + \cos(u+n)t\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(u-n)t}{u-n} + \frac{\sin(u+n)t}{u+n}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2u\sin u\pi}{u^2-n^2}. \end{aligned}$$

La fonction φ_u est de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$, donc sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers φ_u. Comme φ_u est paire, on a $b_n(u) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_u(t) = \frac{\sin u\pi}{\pi u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2u\sin u\pi}{u^2-n^2}\cos nt.$$

I.2 Pour $t = \pi$ le calcul de la somme de la série de Fourier de φ_u donne, après division par $\sin \pi u \neq 0$:

$$\forall u \in]0,1[, \quad \frac{\pi\cos \pi u}{\sin \pi u} = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2u}{u^2-n^2},$$

d'où l'égalité demandée.

I.3 On considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{n^2}\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, on a $u_n(x)$ défini, négatif et équivalent à $-\dfrac{x^2}{n^2}$ lorsque $n \to +\infty$, ainsi la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

La fonction u_n est de classe C^1 sur $[0,1[$ avec $u_n'(x) = \dfrac{2x}{x^2-n^2}$.

Pour tout $x \in [0,a]$ avec $[0,a] \subset [0,1[$, on a $|u_n'(x)| \leq \dfrac{2a}{n^2-a^2}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente, ainsi la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$.

Il en résulte, d'après le théorème de dérivation d'une série de fonctions, que la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et que

$$\forall x \in [0,1[, \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2-n^2} \underset{I.2}{=} \frac{\pi\cos \pi x}{\sin \pi x} - \frac{1}{x}.$$

Ainsi pour tout $x \in [0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \int_0^x \frac{\pi\cos \pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{u}\,du + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(0)}_{=0} = \left[\ln\frac{\sin \pi u}{u}\right]_0^x = \ln\frac{\sin \pi x}{x} - \ln \pi = \ln\frac{\sin \pi x}{\pi x}.$$

I.4 Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par la récurrence :

$$s_0(x)=x,\qquad s_n(x)=\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)s_{n-1}(x)\text{ pour tout }n\in\mathbb{N}^*.$$

I.4.1 Pour tout $n\geq|x|$, on a $|s_n(x)|\leq|s_{n-1}(x)|$ et $s_n(x)$ de même signe que $s_{n-1}(x)$. La suite $(|s_n(x)|)_{n\geq|x|}$ est décroissante et positive, donc convergente.
Comme la suite $(s_n(x))_{n\geq|x|}$ est de signe constant, elle est donc égale, au signe près, à la suite convergente $(|s_n(x)|)_{n\geq|x|}$.
Ainsi, la suite de fonctions $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction s.

I.4.2 Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$ avec $n\neq x$ (non précisé dans l'énoncé).
Par définition, on a $s_n(x)=x\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\frac{1}{n!^2}\prod_{k=1}^{n}(k-x)\prod_{k=0}^{n}(k+x)$. Il en résulte, avec des changements d'indices, que

$$\begin{aligned}s_n(x+1)&=\frac{1}{n!^2}\prod_{k=1}^{n}(k-x-1)\prod_{k=0}^{n}(k+x+1)=\frac{1}{n!^2}\prod_{k=0}^{n-1}(k-x)\prod_{k=1}^{n+1}(k+x)\\&=\frac{1}{n!^2}\frac{-x}{n-x}\prod_{k=1}^{n}(k-x)\times(n+1+x)\prod_{k=1}^{n}(k+x)=-\frac{n+1+x}{n-x}s_n(x),\end{aligned}$$

d'où l'égalité demandée.
Pour $x\in\mathbb{R}$ fixé, l'égalité $s_n(x+1)=\frac{x+n+1}{x-n}s_n(x)$ est valable pour tout $n>|x|$. Le passage à la limite lorsque $n\to+\infty$ donne $s(x+1)=-s(x)$.

I.4.3 La fonction s est nulle en 0, car $s_n(0)=0$ pour tout n.
Pour $x\in]0,1[$, on a $s_n(x)>0$ et $\ln s_n(x)=\ln x+\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$, ainsi, d'après I.3, $\lim_{n\to+\infty}\ln s_n(x)=\ln x+\ln\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\ln\frac{\sin\pi x}{\pi}$.
La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\lim_{n\to+\infty}s_n(x)=e^{\ln\frac{\sin\pi x}{\pi}}$, soit $s(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n=\lfloor x\rfloor$ sa partie entière. On a donc $s(x)=(-1)^n s(x-n)$ et $x-n\in[0,1[$, ainsi $s(x)=(-1)^n\frac{\sin\pi(x-n)}{\pi}$.
On obtient donc $s(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Dans la littérature, ce résultat est appelé "développement eulérien de sinus".

1.2 PARTIE II

On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x)=\frac{n^{-x}}{(n-1)!}x(x+1)\dots(x+n-1)=\frac{n^{-x}}{(n-1)!}\prod_{k=0}^{n-1}(x+k).$$

II.1 .

II.1.1 Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour $n\geq p+1$, on a $f_n(-p)=0$, ainsi $\lim_{n\to+\infty}f_n(-p)=0$.

II.1.2 On suppose que $x\notin\mathbb{Z}^-$. On a donc $f_n(x)\neq0$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour tout $n>-x$, on a $f_{n+1}(x)$ de même signe que $f_n(x)$.
En posant $N_x=\max\{1,-\lfloor x\rfloor\}$, on obtient donc $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}>0$ pour tout $n\geq N_x$.
Le calcul donne $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)$ et

$$\ln\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=-x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi la série de terme général $\ln\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$, définie à partir du rang N_x est convergente.

Pour tout $n \geq N_x$, un télescopage des termes donne $\displaystyle\sum_{k=N_x}^{n} \ln\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)} = \ln\frac{f_{n+1}(x)}{f_{N_x}(x)}$ ce qui implique $f_{n+1}(x) = f_{N_x}(x)e^{S_n(x)}$ où $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=N_x}^{n} \ln\frac{f_{k+1}(x)}{f_k(x)}$ est le terme général d'une suite convergente (vers $S(x)$) .

Il en résulte que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $f_{N_x}(x)e^{S(x)} \neq 0$.

On note f la fonction $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$, définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

II.2 Pour $x \in \mathbb{R}$, on obtient, après calculs, $f_{n+1}(x) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-x} x f_n(x+1)$.

Le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ donne alors $f(x) = xf(x+1)$.

On a $f_n(1) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $f(1) = 1$. Avec la relation $f(x) = xf(x+1)$, on établit, par récurrence sur n, que $f(n) = \dfrac{1}{(n-1)!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3 Si $x \in \mathbb{Z}$, l'un des entiers x ou $1-x$ est négatif ou nul donc $f(x)f(1-x) = 0 = \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$.

Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, alors $s_n(x) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et, après calculs, on obtient $\dfrac{f_n(x)f_n(1-x)}{s_n(x)} = \dfrac{n}{n+x}$. Le passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ donne alors l'égalité demandée $f(x)f(1-x) = s(x)$, appelée "formule des compléments" dans la littérature.

II.4 On se propose d'établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$(1) \qquad f(px) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{-px+\frac{1}{2}} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right).$$

Nota : comme la relation (1) est trivialement vérifiée pour $p = 1$, on supposera désormais $p \geq 2$, ce qui rendra cohérent le produit écrit dans II.4.4

II.4.1 On suppose $px = -n$ avec $n \in \mathbb{N}$, alors $f(px) = 0$ d'après II.1.1.

Une division euclidienne donne $n = pq + r$ avec $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ et $r \in [0,p[$. Pour $k = r$, on a $x + \dfrac{k}{p} = -q$, ainsi $f\left(x+\dfrac{k}{p}\right) = 0$ d'après II.1.1, ce qui annule la partie droite de (1).

La relation (1) est donc vérifiée lorsque $px \in \mathbb{Z}^-$.

II.4.2 On suppose que px n'est pas entier négatif, et soit n un élément quelconque de $\mathbb{N}^*$. On a

$$p^{px-1} f_{pn}(px) = \frac{p^{-1} n^{-px}}{(pn-1)!} \prod_{j=0}^{pn-1} (px+j).$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right) &= \prod_{k=0}^{p-1}\left(\frac{n^{-\left(x+\frac{k}{p}\right)}}{(n-1)!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{p}+i\right)\right)\\ &= \frac{n^{-\left(px+\frac{\sum_{k=0}^{p-1}k}{p}\right)}}{[(n-1)!]^p}\frac{1}{p^{pn}}\prod_{k=0}^{p-1}\left(\prod_{i=0}^{n-1}(px+k+ip)\right).\end{aligned}$$

Pour chaque $i \in [0,n[$ et k variant dans $[0,p[$, les entiers $ip+k$ décrivent l'ensemble $[ip,(i+1)p[$. La réunion donne l'ensemble $[0,np[$, ainsi

$$\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right) = \frac{n^{-\left(px+\frac{p-1}{2}\right)} p^{-pn}}{[(n-1)!]^p}\prod_{j=0}^{pn-1}(px+j).$$

Il en résulte que $\dfrac{p^{px-1}f_{pn}(px)}{\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} f_n\left(x+\frac{k}{p}\right)}$ est égal à $p^{pn-1}n^{\frac{p-1}{2}}\dfrac{[(n-1)!]^p}{(pn-1)!}$ qui est strictement positif et ne dépend pas de x.

Le terme de gauche admet une limite égale à $\dfrac{p^{px-1}f(px)}{\prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\dfrac{k}{p}\right)}$ lorsque $n \to +\infty$.

Il en résulte que le terme de droite admet une limite, positive ou nulle et qui ne dépend que de p, lorsque $n \to +\infty$. On la note A_p. On obtient alors l'égalité demandée

$$f(px) = A_p\, p^{-px+1} \prod_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{k}{p}\right).$$

II.4.3 Pour $x = \dfrac{1}{p}$ la relation ci-dessus, donne $f(1) = A_p \prod_{k=0}^{p-1} f\left(\dfrac{1+k}{p}\right)$.

Sachant que $f(1) = 1$, un décalage d'indices $k+1 \to k$ donne $A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\dfrac{k}{p}\right) = 1$.

Le changement de parcours des indices $k \to p-k$ donne l'autre égalité :

$$A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(\frac{k}{p}\right) = A_p \prod_{k=1}^{p-1} f\left(1-\frac{k}{p}\right).$$

Avec le produit de deux et le résultat II.3, on obtient $A_p^2 \prod_{k=1}^{p-1} \dfrac{\sin\frac{k\pi}{p}}{\pi} = 1$ ainsi

$$A_p^2 = \frac{\pi^{p-1}}{\prod_{k=1}^{p-1} \sin\dfrac{k\pi}{p}}.$$

II.4.4 On a $(x-1)(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1) = x^p-1$, ainsi le polynôme $x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1$ a pour zéros complexes, les $p-1$ racines de l'unité $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ avec $k = 1,\ldots,p-1$.

Le polynôme $x^2 - 2x\cos\dfrac{2k\pi}{p} + 1$ a pour zéros complexes, les 2 racines de l'unité $e^{\frac{2ik\pi}{p}} = z_k$ et $e^{-\frac{2ik\pi}{p}} = \overline{z_k} = z_{p-k}$. Ainsi le polynôme $\prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2 - 2x\cos\dfrac{2k\pi}{p}+1\right)$, de degré $2p-2$, a pour ensemble de zéros $\{z_k, z_{p-k}/k = 1,\ldots,p-1\}$.

Il coïncide avec l'ensemble des zéros de $(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2$ de même degré et même coefficient dominant, ainsi

$$(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+x+1)^2 = \prod_{k=1}^{p-1}\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{p}+1\right).$$

En donnant à x la valeur 1, on obtient

$$p^2 = \prod_{k=1}^{p-1} \underbrace{2-2\cos\frac{2k\pi}{p}}_{4\sin^2\frac{k\pi}{p}} = 4^{p-1}\left(\prod_{k=1}^{p-1}\sin\frac{k\pi}{p}\right)^2.$$

Il en résulte, connaissant le signe, que $\prod_{k=1}^{p-1}\sin\dfrac{k\pi}{p} = \dfrac{p}{2^{p-1}}$.

Avec le dernier résultat de II.4.3, sachant que $A_p \geq 0$, il vient $A_p = \dfrac{2\pi^{\frac{p-1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}}$.

Combiné avec la relation établie en II.4.2, on obtient l'égalité (1) demandée, appelée "formule multiplicative de Gauss" dans la littérature.

1.3 PARTIE III

Soit Γ la fonction de la variable réelle x définie par $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$.

III.1 Pour $x\in\mathbb{R}$, l'application $h_x : t\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$.

On a $h_x(t)\underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$, ainsi h_x est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $x>0$.

On a $h_x(t)\underset{t\to+\infty}{=} O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ainsi h_x est intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout x.

Il en résulte que la fonction Γ est définie sur $\mathcal{D}=]0,+\infty[$.

La fonction $h : (x,t)\mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[^2$, ainsi que chacune de ses dérivées partielles $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k} : (x,t)\mapsto \ln^k t\, e^{-t}t^{x-1}$.

Pout tout segment $[a,b]\subset\mathcal{D}$ et tout $(x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[$, on a

$$|h(x,t)|\leq \varphi_{[a,b]}(t)| \text{ et } \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq \ln^k t\,\varphi_{[a,b]}(t) \text{ où } \varphi_{[a,b]}(t)=e^{-t}\max\{t^{a-1},t^{b-1}\}.$$

Comme les fonctions $\varphi_{[a,b]}$ et $\ln^k t\varphi_{[a,b]}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$, il résulte des théorèmes sur la continuité et la dérivation des intégrales à paramètre, sur un intervalle, que Γ est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{D}$.

III.2 Pour tout $x\in]0,+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$ on pose $G_n(x)=\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$.

III.2.1 Soit $g_n(x)=\displaystyle\int_0^1(1-u)^n u^{x-1}\,du$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $x>0$.

Une intégration par parties, valide, donne pour $n\geq 1$:

$$g_n(x)=\underbrace{\left[(1-u)^n\frac{u^x}{x}\right]_0^1}_{0}+\int_0^1 n(1-u)^{n-1}\frac{u^x}{x}\,du=\frac{n}{x}g_{n-1}(x+1).$$

Il en résulte que $g_n(x)=\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{x(x+1)\dots(x+k-1)}g_{n-k}(x+k)$ pour tout $k\in[1,n]$. Après calculs, on obtient $g_0(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g_n(x)=\dfrac{n!}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, le changement de variable $t=nu$ donne $g_n(x)=n^{-x}G_n(x)$.

En remplaçant par la valeur de $f_n(x)$, non nulle, on obtient $G_n(x)=\dfrac{n}{(n+x)f_n(x)}$.

III.2.2 On vérifie aisément (étude directe ou convexité) que $e^x\geq 1+x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On en déduit que $e^{\frac{t}{n}}\geq 1+\dfrac{t}{n}\geq 0$ et $e^{-\frac{t}{n}}\geq 1-\dfrac{t}{n}\geq 0$ pour tout $t\in[0,n]$.

En élevant à la puissance n, on obtient les inégalités demandées : $e^{-t}\geq\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ et $e^t\geq\left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n$.

On en déduit que, pour tout $t\in[0,n]$,

$$0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n=e^{-t}\left[1-e^t\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\leq e^{-t}\left[1-\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n\right].$$

III.2.3 Soit $a\in[0,1]$. L'inégalité $(1-a)^n\geq 1-na$ est vérifiée pour $n=1$.

Supposons-la vérifiée pour $n\geq 1$, alors

$$(1-a)^{n+1}=(1-a)(1-a)^n\geq(1-a)(1-na)=1-(n+1)a+na^2\geq 1-(n+1)a.$$

Il en résulte, par récurrence sur n, que l'on a $(1-a)^n\geq 1-na$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. En combinant avec le dernier résultat de III.2.2, on obtient

$$0\leq e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leq e^{-t}\left[1-\left(1-n\frac{t^2}{n^2}\right)\right]=\frac{t^2e^{-t}}{n}.$$

III.2.4 Pour $x \in]0,+\infty[$, on a

$$0 \leq \int_0^n \left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) t^{x-1}\,dt = \Gamma(x) - G_n(x) - \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt \leq \int_0^n \frac{t^{x+1}e^{-t}}{n}\,dt.$$

L'existence de $\Gamma(x)$ implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_n^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt = 0$.

Par ailleurs, $\int_0^n \frac{t^{x+1}e^{-t}}{n}\,dt \leq \frac{\Gamma(x+2)}{n}$ qui tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \Gamma(x)$.

D'après III.2.1, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = \frac{1}{f(x)}$, ainsi $f(x) = \frac{1}{\Gamma(x)}$.

Cette expression de $\Gamma(x)$ est appelée "forme limite d'Euler" dans la littérature.

III.3 D'après III.1 et III.2.4, on a f est indéfiniment dérivable sur $]0,+\infty[$.

Avec la relation $f(x) = xf(x+1)$, on établit, par récurrence sur n, la classe C^∞ de f sur $]-n,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il en résulte que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2 Exercice 1, cnc 89, MP : Corrigé Pr. Saddiki

.

3 Exercice 2, e3a 2006, MP : Corrigé Pr. Girard

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\,t^n$ est de rayon infini et pour tout t de $\mathbb{R}$, $\sum_{n\geqslant 0} a_n\,t^n$ est absolument convergente.

1. Pour tout $t>0$, $|b_n|\;t^n \underset{n\to\infty}{\sim} |a_n|\;t^n$ donc la convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} a_n\,t^n$ entraine la convergence absolue de $\sum_{n\geqslant 0} b_n\,t^n$: la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n\,t^n$ est de rayon de convergence infini, c'est-à-dire $\boxed{g \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

2. Avec $b_n>0$, on a $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}=1$.
   En posant $\gamma_n=\frac{a_n}{b_n}-1$, on a $a_n=b_n\,(1+\gamma_n)$ et $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$.

3. a) Pour tout $m\in\mathbb{N}$, la suite $(\gamma_n)_{n\geqslant m}$ étant convergente, elle est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un $\delta_m=\sup\limits_{n\geqslant m}|\gamma_n|$: pour tout $n\geqslant m$, $|\gamma_n|\leqslant\delta_m$.

   b) Pour tout $t>0$, on a $g(t)>\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} b_n\,t^n>b_{m+1}\,t^{m+1}>0$, puis
   $$\frac{f(t)}{g(t)}-1=\frac{f(t)-g(t)}{g(t)}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)\,t^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,t^n}=\frac{\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n\,b_n\,t^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,t^n},$$
   $$\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\,b_n\,t^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,t^n}+\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}|\gamma_n|\,b_n\,t^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,t^n}\leqslant\frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\,b_n\,t^n}{b_{m+1}\,t^{m+1}}+\delta_m\frac{\sum_{n=m+1}^{\infty}b_n\,t^n}{\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,t^n},$$
   et finalement $\boxed{\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\frac{\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\,b_n\,t^n}{b_{m+1}\,t^{m+1}}+\delta_m}$.

   c) On a donc $\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\delta_m+\sum_{n=0}^{m}|\gamma_n|\;\frac{b_n}{b_{m+1}}\;\frac{1}{t^{m-n+1}}$.
   La convergence de la suite (γ_n) vers 0 entraine la convergence de la suite (δ_n) vers 0, donc si $\varepsilon>0$ est fixé il existe un N de $\mathbb{N}$ tel que $m\geqslant N$ entraine $\delta_m\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.
   Alors pour tout n de $[\![0,N]\!]$ on a $\lim\limits_{t\to+\infty}|\gamma_n|\;\frac{b_n}{b_{N+1}}\;\frac{1}{t^{N-n+1}}=0$, donc pour tout n de $[\![0,N]\!]$, il existe un $\alpha_n>0$ tel que $t\geqslant\alpha_n$ entraine
   $$|\gamma_n|\;\frac{b_n}{b_{N+1}}\;\frac{1}{t^{N-n+1}}<\frac{\varepsilon}{2\,(N+1)}.$$
   Finalement, si $A=\max\limits_{0\leqslant n\leqslant N}\alpha_n$, pour tout $t\geqslant A$ on a
   $$\left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+(N+1)\,\frac{\varepsilon}{2\,(N+1)}=\varepsilon.$$
   Cela signifie $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1$, c'est-à-dire $\boxed{f(t)\underset{t\to+\infty}{\sim}g(t)}$.

4. a) On a $\ln[(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}]=(n+1)\,\ln(1+\frac{1}{n+1})$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,\ln(1+\frac{1}{n+1})=1$, c'est-à-dire par continuité de la fonction exponentielle $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}=\mathrm{e}$.
   On en déduit que pour tout t de $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\,\frac{t^n}{n!}=0$: avec le lemme d'Abel, la série entière $\sum_{n\geqslant 0}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\,\frac{t^n}{n!}$ est de rayon infini, c'est-à-dire que $\boxed{h \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

.

b) Avec $\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}}{n!}$ et ce qui précède on a $h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$, c'est-à-dire finalement $\boxed{h(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{t+1}}$.

5. a) Soit $y(t) = t + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\, t^n$ la somme d'une série entière de rayon $R > 0$ solution de (E) sur in intervalle $I \subset]-R, R[$.

Pour tout t de $]-R, R[$, on a

$$y'(t) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^{n-1},\ y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^{n-2},$$

$$\text{et } \sum_{n=2}^{\infty} n\,(n-1)\, a_n\, t^{n-1} + [1 + \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^{n-1}] - t - \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^n = 1,$$

$$-t + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)^2\, a_{n+1}\, t^n - \sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n\, t^n = 0,$$

$$(4\, a_2 - 1)\, t + \sum_{n=2}^{\infty}[(n+1)^2\, a_{n+1} - n\, a_n]\, t^n = 0,$$

et, avec l'unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on a $a_2 = \frac{1}{4}$ et pour tout $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)^2}\, a_n$, c'est-à-dire en fait $\boxed{a_n = \frac{n-1}{n^2}\, a_{n-1} \text{ pour tout } n \geqslant 2}$.

Avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, cela définit une unique suite (a_n) à termes strictement positifs pour $n \geqslant 1$.

Pour tout $t > 0$ on a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}\, t^{n+1}}{a_n\, t^n} = 0$, donc la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n\, t^n$ est de rayon de convergence infini.

Par récurrence on a, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \frac{(n-1)!}{(n!)^2}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{n\cdot n!}}.$$

On obtient : $z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n\cdot n!}$ pour tout t de $\mathbb{R}$, unique solution de (E) somme d'une série entière et telle que $z(0) = 0$ et $z'(0) = 1$.

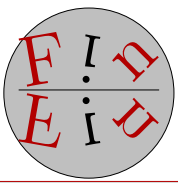
b) On obtient alors $\boxed{z'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^t - 1}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}}$.

c) Pour tout $t > 0$, on a $t\, z(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n\, n!}$.

Avec $n\, n! \underset{n\to\infty}{\sim} (n+1)!$ et ce qui précède on a donc

$$t\, z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \mathrm{e}^t - 1 - t,$$

et finalement $\boxed{z(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^t}{t}}$.



.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°28 (CNC 2000, MP)

Équations différentielles
Un exemple de transformée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Que signifie le sigle B.U.S.H ? Bombarder Uniquement Saddam Hussein ....
- Pourquoi est-ce que les chimistes ne prennent jamais les autoroutes ?

- Parce qu'ils préfèrent les routes sans pH.

Al Farabi (872-950)

Muhammad ibn Muhammad ibn Tarkhan ibn Uzalagh al-Farabi, né à Khorasan en Afghanistan, il meurt à Damas. Il approfondit toutes les sciences et tous les arts de son temps, et est appelé le Second instituteur de l'intelligence, le "Premier Maître" n'étant autre qu'Aristote. On lui doit un commentaire de La République de Platon, ainsi qu'un Sommaire des Lois de Platon. On lui reconnait aussi ses talents dans la musique et la poésie. Sa mort fut tragique : tué par des voleurs en route.

Mathématicien du jour

définitions et notations

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!}.$$

Pour $(x,t) \in [0,1]^2$, on pose :

$$K(x,t) = \frac{t^2}{x} \text{ si } x > t,\ K(x,t) = K(t,x) \text{ si } t > x \text{ et } K(x,x) = x.$$

On désigne par $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on pose :

$$Tf : [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt.$$

On notera en général de la même façon une fonction et une de ses restrictions un sous intervalle de son intervalle de définition maximum.

1 Partie I

1 Vrifier que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n+\frac{3}{2}}$ définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1.

2 Exprimer pour $x \in \mathbb{R}_+$, $xG'(x) + \frac{3}{2}G(x)$ l'aide de fonctions usuelles simples.

2 Partie II

1 a Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, préciser $Tf(0)$ et montrer la continuité de Tf en 0.

b Montrer que $f \mapsto Tf$ définit un endomorphisme T de $\mathcal{C}([0,1])$.

2 T est-il surjectif ?

3 Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. On pose $F = Tf$.

a Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a :

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)\,dt + x^2\int_x^1 \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

b Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1]$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$. Établir une relation entre $F(1)$ et $F'(1)$.

c Montrer que F est de classe C^2 sur $]0,1]$ et vérifie sur $]0,1]$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f.$$

4 On considère l'équation différentielle

$$(E_0) \ : \ x^2y'' - 2y = 0.$$

a Trouver les solutions de (E_0) sur $]0,1]$ de la forme $x \mapsto x^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

b En déduire l'ensemble des solutions de (E_0) sur l'intervalle $]0,1]$.

c En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, Tf est la seule solution sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f$$

vérifiant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

5 On dira qu'un rel λ est valeur propre de T s'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tel que $Tf = \lambda f$ et $f \neq 0$. Dans ce cas, on dira que f est un vecteur propre de T associé λ.

Montrer que λ est une valeur propre non nulle de T si et seulement s'il existe une solution non nulle sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$\lambda x^2 y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0$$

vérifiant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

3 Partie III

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle

$$(E_\lambda) \ : \ \lambda x^2 y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0.$$

1 Montrer qu'il existe une et une seule solution f_λ de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que

$$f_\lambda(x) \underset{0}{\sim} x^2.$$

2 Donner $K_\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f_\lambda(x) = K_\lambda \sqrt{x}\, G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\, x\right).$$

3 a Justifier l'existence de $a > 0$ tel que f_λ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, a]$.

b Soit y une solution de (E_λ) sur $]0,1]$. On pose $z = \dfrac{y}{f_\lambda}$. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifie par z'.

c En déduire qu'il existe une solution g_λ de (E_λ) sur $]0,1]$ telle $g_\lambda(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4 Une telle solution g_λ étant choisie.

c Montrer que la famille (f_λ, g_λ) d'éléments de $\mathcal{C}(]0,1])$ est libre.

b Décrire alors l'ensemble $\sum_0$ des solutions sur $]0,1]$ de l'équation différentielle (E_λ).

a Montrer que les solutions de (E_λ) sur $]0,1]$ qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 sont exactement les éléments de $\mathbf{Vect}(f_\lambda)$.

5 a

Montrer que toute valeur propre strictement positive de T est de la forme $\lambda_k = \dfrac{3}{k^2\pi^2}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

b Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ_k est effectivement valeur propre de T.

c Donner les vecteurs propres associés la valeur propre λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

4 Partie IV

On considère l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ pour f et g dans E. On notera $\|.\|$ la norme associe à ce produit scalaire. (On ne demande pas de redémontrer que l'on a bien défini un produit scalaire).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_k : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}\, G(k\pi x)$ et $\phi_k = \dfrac{h_k}{\|h_k\|}$.

1 Montrer que $\forall (f,g)\in E^2,\ \ (Tf,g)=(f,Tg)$.

2 a Calculer Th_k pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

b Montrer que la famille $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de E.

3 a Développer en série de Fourier la fonction $f\ :\ \mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=1-\dfrac{x^2}{\pi^2}$.

b En déduire

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

c Calculer $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)\,dxdt$ et comparer le résultat avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2$.

4 Pour tout $x\in[0,1]$, on note $K_x\ :\ [0,1]\mapsto\mathbb{R},\ t\mapsto K(x,t)$. Pour tout $N\in\mathbb{N}^*$, soit $K_{N,x}$ la projection orthogonale de K_x sur $Vect(\phi_1,\dots,\phi_N)$.

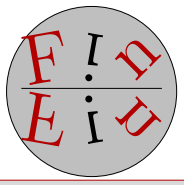
a Donner l'expression de $K_{N,x}$.

b Établir $\lim\limits_{N\to+\infty}\displaystyle\int_0^1\|K_x-K_{N,x}\|^2\,dx=0$.

c Soit $f\in E$ et $F=Tf$. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty}\|F-\sum_{k=1}^{N}(F,\phi_k)\phi_k\|^2=0.$$

(On remarquera que $\forall x\in[0,1],\ F(x)=(K_x,f)$.)



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°28 (Pr. Deruelle)

Équations différentielles
Un exemple de transformée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Quand est-ce qu'on utilise le théorème suivant : "Selon la question n°(-), c'est trivial " ?
- Quand on copie du voisin.
- Pour inverser une matrice à déterminant nul.
- Quand on est au petit a du petit 1 du grand I au bout de trois heures le jour d'un concours.

Al-Farghani (805-880)

Abu'l-Abbas Ahmad ibn Muhammad ibn Kathir connu sous le nom Alfraganus ou Alfergani, né en Ouzbékistan, est l'un des astronomes musulmans les plus célèbres du IXe siècle.
Il mesure le diamètre de la Terre et écrit en 833 Éléments d'astronomie sur le mouvement des corps célestes, inspiré de l'Almageste de Ptolémée, qui reste le livre d'astronomie le plus célèbre jusqu'au XVe siècle en Occident mais aussi en Orient. Ce livre est traduit en latin au XIIe siècle et exerce une grande influence au sein de l'astronomie européenne avant Regiomontanus. Il prend part à la révision des tables astronomiques de Ptolémée et compose, outre une introduction à l'astronomie, deux autres ouvrages, sur les cadrans solaires et l'astrolabe.
Le cratère lunaire Alfraganus fut nommé ainsi pour lui rendre hommage.

Mathématicien du jour

1 Première Partie

1 On a :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+5)(2n+2)}=0$$

ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n X^n$ est gal $+\infty$.

On en déduit que celui de la série entière $\sum u_n x^{2n}$ est gal $+\infty$. G apparat donc comme le produit de cette série entière par la fonction $x\mapsto x^{\frac{3}{2}}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

2

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\ xG'(x)+\frac{3}{2}G(x)=x\left(x^{\frac{3}{2}}.\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n}\right)'+\frac{3}{2}\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n+\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n}+x^{\frac{5}{2}}\sum_{n\geq 1}2nu_nx^{2n-1}+\frac{3}{2}\sum_{n\geq 0}u_nx^{2n+\frac{3}{2}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}}\left(3\sum_{n\geq 0}u_n x^{2n}+\sum_{n\geq 1}2nu_n x^{2n}\right) = x^{\frac{3}{2}}\left(3u_0+\sum_{n\geq 1}(2n+3)u_n x^{2n}\right)$$
$$= x^{\frac{3}{2}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} = \sqrt{x}\sin x\ .$$

2 Deuxième Partie

1 a) $\forall t\in[0,1], K(0,t)=0$. On en déduit que $Tf(0)=0$. On a par ailleurs :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ Tf(x)=\int_0^x K(x,t)f(t)dt+\int_x^1 K(x,t)f(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^x t^2f(t)dt+x^2\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt\ (\star).$$

Cela donne la majoration :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ |Tf(x)|\leq\|f\|_\infty\left[\frac{1}{x}x\int_0^x t^2dt+x^2\int_x^1\frac{dt}{t}\right]=\|f\|_\infty\left[\frac{x^3}{3}-x^2\ln x\right]\ .$$

On en déduit la continuité de Tf en $x=0$.

b) La linéarité de l'opérateur T découle de la linéarité de l'intégrale. Par ailleurs $(\star)$ montre, pour tout $f\in\mathcal{C}([\prime,\infty])$, la continuité de Tf sur $]0,1]$. Enfin grâce au 1.(a) : $\forall f\in\mathcal{C}([\prime,\infty]), \mathcal{T}\{\in\mathcal{C}([\prime,\infty])$. En conclusion T est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}([\prime,\infty])$.

2 T n'est pas surjectif : la question 1.(a) a montré que pour tout $f\in\mathcal{C}([\prime,\infty])$, $Tf(0)=0$; or une fonction de $\mathcal{C}([\prime,\infty])$ ne s'annule pas nécessairement l'origine.

3 a) On a déjà montré ce résultat la question 1.(a).

b) $(\star)$ montre sans difficulté que F est de classe C^1 sur $]0,1]$. On obtient précisent :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2f(t)dt+2x\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt\ .(\star\star)$$

D'o la majoration :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ \left|F'(x)\right|\leq\|f\|_\infty\left[\frac{x^2}{3}-2x\ln x\right]\ .$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+}F'(x)=0$, puis classiquement par le théorème de "prolongement C^1" , que F est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $F'(0)=0$.
$(\star)$ et $(\star\star)$ montrent que $F(1)+F'(1)=0$.

c) En drivant $(\star\star)$ il vient :

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ F''(x)=\frac{2}{x^3}\int_0^x t^2f(t)dt+2\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt-3f(x)\ .$$

On en déduit grce $(\star)$:

$$\forall x\in]0,1]\ ,\ F''(x)=\frac{2}{x^2}\left[\frac{1}{x}\int_0^x t^2f(t)dt+x^2\int_x^1\frac{f(t)}{t}dt\right]-3f(x)=\frac{2}{x^2}F(x)-3f(x)\ .$$

4 a) Exprimons que $x \mapsto x^\lambda$ est solution de (E_0) :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda(\lambda-1)x^2x^{(\lambda-1)(\lambda-2)} - 2x^\lambda = x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1)x^{(\lambda-2)^2} - 2\right] = 0 \ .$$

La seule possibilité est $\lambda = 2$.

b) $x \mapsto x^2$ ne s'annulant pas sur $]0,1]$, cherchons une autre solution sous la forme $y = x^2z$. On est alors ramène à résoudre :

$$Z = z' \quad \text{et} \quad xZ' + 4Z = 0 \ .$$

On obtient : $Z = \dfrac{\text{Cste}}{x^4} = z'$, puis $z = \dfrac{\text{Cste}}{x^3} + \text{Cste}$.

Une solution de (E_0) indépendante de $x \mapsto x^2$ est par exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Toute solution de (E_0) sur $]0,1]$ s'crit alors sous la forme :

$$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \quad \text{où} \quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \ .$$

c) D'après ce qui précède, f étant donnée, Tf est bien solution du problème pos. Il s'agit donc de montrer que c'est la seule. Supposons pour cela que F et G soient solutions. Alors $F - G$ est solution de (E_0) et en conséquence il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F(x) - G(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \ .$$

Le fait que $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) - G(x) = 0$ implique que $\beta = 0$. Il vient alors $F(x) - G(x) = \alpha x^2$, puis $F(1) - G(1) + F'(1) - G'(1) = \alpha + 2\alpha = 0$ entraîne que $\alpha = 0$. Finalement $F = G$.

5 Soit λ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associ. $Tf = \lambda f$ est alors solution du problème énoncé la question 4.(c). En particulier :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda f''(x) - \frac{2}{x^2}\lambda f(x) = -3f(x) \ .$$

Ce qui donne :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda x^2 f''(x) + \left(3x^2 - 2\lambda\right) f(x) = 0 \ .$$

Les autres conditions du problème, tant vérifies par λf, le sont par f.

Réciproquement, on montre par un calcul similaire que si f est une solution non identiquement nulle du problème posé dans cette question $(\lambda \neq 0)$, λf est solution de celui posé à la question 4.(c) : Tf tant l'unique solution de ce problème, on obtient : $Tf = \lambda f$ avec $f \neq 0$. Ce qui montre que f est valeur propre de T associ la valeur propre λ.

3 Troisième Partie.

1.et 2. Exprimons donc qu'une série entière $\sum a_n x^n$ est solution de (E_λ) sur $]-R,R[$:

$$\forall x \in]-R,R[\ ,\ \lambda x^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n - 2\lambda \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= -2\lambda(a_0 + a_1 x) + \sum_{n\geq 2} \lambda[n(n-1)-2]a_n x^n + 3\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n$$

$$= -2\lambda(a_0 + a_1 x) + \sum_{n\geq 2} [\lambda(n+1)(n-2)a_n + 3a_{n-2}]x^n = 0\ .$$

Cela exige que $a_0 = a_1 = 0$. On en déduit que tous les coefficients de rang impair sont nuls. Par ailleurs a_2 peut être choisi arbitrairement et l'on a :

$$\forall n \geq 2\ ,\ a_{2n} = \frac{-3}{\lambda(2n+1)(2n-2)} a_{2n-2}\ ,$$

d'o l'on tire :

$$\forall n \geq 1\ ,\ a_{2n} = (-1)^{n-1}\frac{3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!}a_2\ .$$

La condition $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro est vérifie pour $a_2 = 1$. La seule série entière qui répond la question est alors :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!}x^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n(2n+3)(2n+1)!}x^{2n+2}\ .$$

On vérifie sans difficulté que son rayon de convergence est gal $+\infty$.

On obtient ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f_\lambda(x) = \sqrt{x}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n(2n+3)(2n+1)!}x^{2n+\frac{3}{2}} = \sqrt{x}\,3^{\frac{1}{4}}\lambda^{\frac{3}{4}}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!}\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right)^{2n+\frac{3}{2}}\ ,$$

c'est dire :

$$f_\lambda(x) = (3\lambda^3)^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}\ G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right)\ .$$

3. a) Cela découle directement de $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro.

b) Classiquement on cherche une solution de (E_λ) sur $]0,a]$ sous la forme $y = f_\lambda z$; un calcul sans difficulté montre que $Z = z'$ est solution de :

$$2f'_\lambda Z + f_\lambda Z' = 0\ .$$

c) On obtient alors : $Z = z' = \dfrac{\text{Cste}}{f_\lambda^2}$, puis $y(x) = f_\lambda(x).\displaystyle\int_x^\star \frac{\text{Cste}}{f_\lambda^2(t)}dt$.

La fonction positive $t \mapsto \dfrac{1}{f_\lambda^2(t)}$ n'tant pas intégrable sur $]0,\star]$, on obtient par " intégration des relation de comparaison" , au voisinage de zéro :

$$y(x) \sim x^2\int_x^\star \frac{dt}{t^4} \sim \frac{\text{Cste}}{x}\ .$$

Ceci montre qu'il existe une solution y_λ de (E_λ) sur $]0,a]$ vérifiant au voisinage de zéro :

$$y_\lambda(x) \sim \frac{1}{x}.$$

Les solutions maximales de l'équation différentielle $\lambda y'' + \dfrac{3x^2-2\lambda}{x^2}y = 0$ sont définies sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$. Le résultat d'existence et d'unicité de telles solutions montre que y_λ se prolonge de faon unique en une solution sur $]0,+\infty[$ de (E_λ). En particulier il existe une solution g_λ sur $]0,1]$ qui prolonge y_λ.

4. a) Les équivalents respectifs de f_λ et g_λ au voisinage de zéro montrent que ces deux fonctions ne peuvent être colinéaires.

b) Toute solution de (E_λ) sur $]0,1]$ s'écrit sous la forme :

$$\alpha f_\lambda + \beta g_\lambda, \quad \text{avec} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2.$$

c) Soit $h = \alpha f_\lambda + \beta g_\lambda$. La condition $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0$ exige clairement $\beta = 0$. Réciproquement ...

5. a) Utilisons la caractérisation de la question II-5. : soit λ une valeur propre non nulle de T ; il existe alors une solution non identiquement nulle de (E_λ) sur $]0,1]$ qui tend vers zéro à l'origine. D'après la question 4.(c), cette solution est proportionnelle f_λ.

Voyons ce qu'entraîne la condition $f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) = 0$:

$$f'_\lambda(x) = K_\lambda\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\sqrt{x}\,G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right)\right],$$

donne :

$$f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) = K_\lambda\left[G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \frac{1}{2}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\,G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)\right]$$

$$= K_\lambda\left[\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\,G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \frac{3}{2}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)\right] = K_\lambda\left(\frac{3}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) = 0.$$

λ est donc nécessairement de la forme :

$$\lambda = \frac{3}{k^2\pi^2} = \lambda_k \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

b) Le calcul effectué dans la question précédente montre que si $\lambda = \lambda_k$, f_{λ_k}, qui est solution de (E_{λ_k}), vérifie bien les conditions requises (cf. question II-5) ... : λ_k est valeur propre de T, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est d'après ce qui précède $\mathrm{Vect}(f_{\lambda_k})$.

4 Quatrième Partie

1 On obtient sans difficulté :

$$\forall (f,g)\in E\ ,\ (Tf,g)=(f,Tg)=\int\int_{[0,1]\times[0,1]} K(x,y)f(y)g(x)dxdy\ .$$

2 a) On a :

$$f_{\lambda_k}(x)=K_{\lambda_k}\sqrt{x}\ G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda_k}}x\right)=K_{\lambda_k}\sqrt{x}\ G\left(k\pi x\right)=\left(3\lambda_k^3\right)^{\frac{1}{4}}h_k(x)=\frac{3}{(k\pi)^{\frac{3}{2}}}h_k(x)\ .$$

D'o :

$$Th_k=\lambda_k h_k=\frac{3}{k^2\pi^2}h_k\ .$$

b) Il vient pour k et $m\in\mathbb{N}^\star$ distincts :

$$(Th_k,h_m)=\lambda_k(h_k,h_m)=(h_k,Th_m)=\lambda_m(h_k,h_m)$$

qui montre que la famille $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est orthogonale.

On en déduit que la famille $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est orthonormale.

3 a) La fonction f est 2π périodique, continue , C^1 par morceaux et paire : le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que f est la somme de sa série de Fourier.

On a :

$$a_0(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt=\frac{4}{3}$$

et

$$\forall n\geq 1\ ,\ a_n(f)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos ntdt=\frac{-2}{\pi^3}\int_0^\pi t^2\cos ntdt=\frac{-2}{\pi^3}\cdot\frac{-2}{n}\int_0^\pi t\sin ntdt=\frac{4}{\pi^3 n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}\pi\ .$$

On obtient finalement :

$$\forall t\in\mathbb{R}\ ,\ f(t)=\frac{2}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nt\ .$$

b) Parseval donne :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt=\frac{8}{15}=\frac{a_0(f)^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}a_n(f)^2=\frac{4}{9}+\frac{8}{\pi^4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}\ .$$

D'o :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{8}\left(\frac{8}{15}-\frac{4}{9}\right)=\frac{\pi^4}{8}\cdot\frac{4}{45}=\frac{\pi^4}{90}\ .$$

c) Un calcul direct donne :

$$\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt=\int_0^1\left(\int_0^x\frac{t^4}{x^2}dt+\int_x^1\frac{x^4}{t^2}dt\right)dx=\int_0^1\left(\frac{x^3}{5}+x^3-x^4\right)dx=\frac{1}{10}\ .$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k\geq 1}\lambda_k^2=\frac{9}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4}=\frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^4}{90}=\frac{1}{10}\ .$$

4 a) On observera que pour tout $x \in [0,1]$, $K_x \in \mathcal{C}([r,\infty])$. On a :

$$K_{N,x} = \sum_{k=1}^{N} (\Phi_k, K_x)\Phi_k = \sum_{k=1}^{N} \left(\int_0^1 K(x,t)\Phi_k(t)dt \right) \Phi_k = \sum_{k=1}^{N} T\Phi_k(x) \cdot \Phi_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \Phi_k(x) \cdot \Phi_k$$

b) Il vient :

$$\|K_x - K_{N,x}\|^2 = \|K_x\|^2 - \|K_{N,x}\|^2$$
$$= \int_0^1 K^2(x,t)dt - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 \Phi_k^2(x) .$$

Puis :

$$\int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)dxdt - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 \int_0^1 \Phi_k^2(x)dx = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)dxdt - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^2 .$$

D'après ce qui précède, cette quantité admet pour limite zéro quand N tend vers $+\infty$.

c) On a donc :

$$\forall x \in [0,1] , \ F(x) = \int_0^1 K_x(t)f(t)dt = (K_x, f) = (K_{N,x}, f) + (K_x - K_{N,x}, f)$$

et

$$(\Phi_k, F) = (\Phi_k, Tf) = (T\Phi_k, f) = \lambda_k(\phi_k, f)$$

qui entraînent pour $N \in \mathbb{N}^*$:

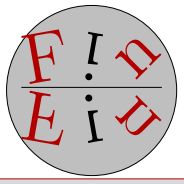
$$\forall x \in [0,1] , \ F(x) - \sum_{k=1}^{N} (\Phi_k, F)\Phi_k(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \Phi_k(x)(\Phi_k, f) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k (\Phi_k, f)\Phi_k(x) + (K_x - K_{N,x}, f) ,$$

d'où

$$\|F - \sum_{k=1}^{N} (\Phi_k, F)\Phi_k\|^2 = \int_0^1 \left(F(x) - \sum_{k=1}^{N} (\Phi_k, F)\Phi_k(x) \right)^2 dx$$
$$\leq \|f\|^2 \cdot \int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2 dx .$$

La question précédente montre alors que :

$$\lim_{N \to +\infty} \|F - \sum_{k=1}^{N} (\Phi_k, F)\Phi_k\|^2 = 0 .$$



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°29 (Pr. Michel Quercia)

Équations différentielles
Exemples d'étude qualitative

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Les Irakiens sont dans la rue et crient : A bas Clinton, à bas Clinton !.
Un autre Irakien intervient et dit aux manifestants : Ce n'est plus Clinton le président, c'est Bush.
Les manifestants répondent : Mais ça n'a aucun sens ! On ne va tout de même pas crier "A babouche ! A babouche !"

La famille des Riccati

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati.

Mathématicien du jour

1 Exemple d'une étude qualitative.

On considère l'équationn différentielle $(E) : x' = x^2 - t$ et l'ensemble $D_0 = \{(t,x) \,|\, x^2 - t < 0\}$. Soit x est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in D_0$.

1. Supposons $\exists t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geq 0$.
   a. Montrer que $t_1 = \min\{t > t_0 \,|\, x^2(t) - t > 0\}$ existe, puis que $x^2(t_1) - t_1 = 0$.
   b. En déduire que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.
   c. Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, étudier la fonction $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$ puis en déduire une contradiction.
   d. Si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, de façon pareille en déduire une contradiction.

2. En déduire que la courbe intégrale reste dans D_0.

3. Supposons que la solution maximale (à droite) est définie sur $[t_0, \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$.
   a. Montrer que pour tout $t \in [t_0, \beta[$, on a $-\beta \leq x'(t) \leq 0$.
   b. En déduire que x' est intégrable sur $[t_0, \beta[$, puis que $x(t)$ admet une limite finie quand t tend vers β.
   c. En déduire une contradiction.

4 Conclure que $\beta = +\infty$.

5 En remarquant que pour tout $t \geq t_0$, on a $x'(t) < 0$, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = -\infty$.

6 En déduire que $x''(t) \geq 0$ à partir d'un certain rang, puis que $\lim\limits_{t\to+\infty} x'(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

7 On suppose que $\ell \neq 0$.

a Montrer que $x(t) \sim \ell t$, puis que puis et $x'(t) \sim \ell^2 t^2$.

b En déduire que $x'''(t_2) = 2x + \dfrac{1}{2x^2}$ qui est négatif pour t assez grand.

c En déduire une contradiction.

8 En déduire que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

2 Étude d'un système autonome de taille 2.

Soit $n > 0$ et (S) : $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2}{n}x(t)y(t) \\ y'(t) = -x^2(t) + y^2(t). \end{cases}$

1 Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S). Trouver d'autres solutions présentant une symétrie avec γ.
Réponse : $\gamma_1(t) = (-x(t), y(t))$ et $\gamma_2(t) = \ldots$ sont aussi solutions de (S).

2 Montrer que s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t.

3 De même, montrer que s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors $x(t) = y(t) = 0$ pour tout t.

4 En déduire que pour λ, μ non nuls et x ne s'annulant pas, $\sigma : t \mapsto \lambda(x(\mu t), y(\mu t))$ est solution de (S) si et seulement si $\mu = \lambda$.

5 En déduire des symétries des solutions maximales de (S).

6 En déduire que toute trajectoire maximale qui touche l'axe des x est symétrique par rapport cet axe.

7 On se propose de déterminer les courbes du plan formes des points (x_0, y_0) où les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy).

a Montrer que si on a $x(t_0) = 0$, alors $x(t) = 0$ pour tout t et $y(t)$ est arbitraire.

b Montrer que si on a $y(t_0) = 0$, alors $x(t_0) = 0$ est arbitraire.

c En déduire que l'ensemble des points où la tangente est verticale est la réunion des deux axes (Ox) et (Oy) privée de $(0, 0)$.

c Avec un raisonnement pareil, montrer que l'ensemble des points où la tangente horizontale est la réunion des deux bissectrices des axes, privée de $(0, 0)$.

d En déduire quelques solutions particulières.

Réponse : $x(t) = 0, y(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$.

8 On suppose qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$.

a Montrer que $\frac{2}{n}x\psi' = \psi - x^2$ avec $\psi = \Phi^2$.

b En déduire que $\psi(x) = |x|^n\left(\lambda + \frac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n \neq 1$ et $\psi(x) = |x|(\lambda - \ln|x|)$ si $n = 1$.

c Montrer que pour une courbe intégrale qui ne touche aucun des deux axes, on peut exprimer y en fonction de x

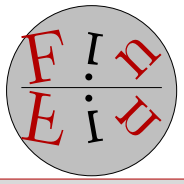
Réponse : $x'(t) \neq 0$, donc $t \mapsto x(t)$ injective.

d Montrer qu'une courbe intégrale qui touche l'axe des y est incluse dans cet axe.

e Montrer que pour une courbe intégrale qui touche l'axe des x en dehors de $(0,0)$, on a :

$$y(x) = \Phi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}.$$

f En déduire toutes les courbes intégrales.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Devoir Libre n°30 (e3a 2009, PSI)

Formes différentielles Intégrales multiples

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

On raconte qu'une secrétaire d'une société dont je tairais le nom avait insérer le cd dans son pc avec la pochette en plastique transparent.
Elle pensait que ça protégeait des virus ...

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir prêtre avant que son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il a entre autres comme professeurs Jacobi, Dirichlet et Gauss. Il meurt de tuberculose à l'âge de 39 ans.

Mathématicien du jour

Formule de Green-Rieman et Intégrale de Dirichlet

1 Applications simples du cours.

Rappels.
Soit $I=[a,b]$ (avec $a<b$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On considère $V : (x,y)\in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x,y)\\ Q(x,y)\end{pmatrix}$ un champ de vecteurs et γ un arc orienté plan de paramétrage :
$t\in I \mapsto \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$, de classe C^1 par morceaux sur I, parcouru dans le sens des t croissants.
On rappelle que la circulation de V le long de γ, notée $\int_\gamma V$ se calcule par la formule

$$\int_\gamma V=\int_\gamma (P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy)$$

On suppose P et Q de classe C^1 sur U. L'arc γ est supposé fermé, sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique. Il délimite un domaine G d'un seul tenant, inclus dans U.
On rapelle la formule de Green-Riemann :

$$\int_\gamma V=\int_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\,dxdy$$

1. Dans cette question seulement, on prend $\mathbf{G} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x^2 \text{ et } y^2 \leq x\}$ et pour γ l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.
   1.1. Représenter le domaine $\mathbf{G}$ et γ.
   1.2. Calculer directement, en paramétrant l'arc : $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{V}$ avec
   $$\mathbf{P} : (x,y) \mapsto 2xy - x^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{Q} : (x,y) \mapsto x + y^2$$
   1.3. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.
2. On suppose que les deux fonctions $\mathbf{P}$ et $\mathbf{Q}$ vérifient : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$.
   2.1. Que vaut $\displaystyle\int_\gamma \mathbf{V}$?
   2.2. Donner un exemple de champ de vecteur $\mathbf{V}$, non identiquement nul, et vérifiant la propriété :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$
3.
   3.1. Démontrer que les intégrales curvilignes suivantes : $\mathbf{A_1} = \displaystyle\int_\gamma x\,dy$, $\mathbf{A_2} = -\int_\gamma y\,dx$ et $\mathbf{A_3} = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$ sont égales. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
   3.2. Représenter graphiquement l'arc orienté γ d'équations paramétriques
   $$t \in [-\pi,\pi] \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{pmatrix}$$
   dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ direct.
   On précisera les tangentes aux points singuliers.
   3.3. Déterminer l'aire délimitée par la courbe γ.

2 Problème.

2.1 Préliminaires.

1. Illustrer graphiquement la double inégalité : $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.
2. On veut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.
   On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.
   2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$.
   2.2. Pour tout $x > 1$, on définit $\Phi : x \mapsto \Phi(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,dt$.
   Montrer que l'on a : $\forall x > 1,\ \Phi(x) = \cos(1) - \dfrac{\cos(x)}{x} - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$.
   2.3. Prouver que $\Phi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.
   2.4. Déduire de ces résultat que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

2.2 Une première façon de calculer $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Soient les deux fonctions :
$$\mathbf{P} : (x,y) \mapsto P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}[x\sin(x) - y\cos(x)]$$

$$Q\ :\ (x,y)\mapsto Q(x,y)=\frac{e^{-y}}{x^2+y^2}[x\cos(x)+y\sin(x)]$$

et V le champ de vecteurs : $(x,y)\mapsto \begin{pmatrix} P(x,y)\\ Q(x,y)\end{pmatrix}$.

1. Justifier le fait que P et Q sont deux fonctions de classe C^1 sur tout domaine U de $\mathbb{R}^2$ ne cotenant pas l'origine.
2. Soit γ un arc paramétré sans point double, n'entourant pas l'origine et parcouru dans le sens trigonométrique.
   Démontrer que $\displaystyle\int_\gamma V=0$.
3. On considère Γ l'arc de cercle de rayon $\rho>0$ paramétré par $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\mapsto \begin{pmatrix} x(\theta)=\rho\cos(\theta)\\ y(\theta)=\rho\sin(\theta)\end{pmatrix}$ et on note A_ρ l'intégrale
   $$A_\rho=\int_\Gamma (P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy)$$
   3.1. Montrer que $\displaystyle A_\rho=\int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin(\theta)}\cos(\rho\cos(\theta))\,d\theta$.
   3.2. Calculer $\lim\limits_{\rho\to 0^+} A_\rho$.
   3.3. Montrer que $\lim\limits_{\rho\to+\infty} A_\rho=0$. On pourra, par exemple, utiliser les préliminaires.
4. Soient r et R deux réels tels que $0<r<R$. On considère l'arc γ constitué par :
   γ_1 : le segment $[A_1,A_2]$ où $A_1=(r,0)$et $A_2=(R,0)$,
   γ_2 : le quart de cercle de centre O et de rayon R reliant A_2 à $A_3=(0,R)$,
   γ_3 : le segment $[A_3,A_4]$ où $A_4=(0,r)$,
   γ_4 : le quart de cercle de cercle de centre O et de rayon r reliant A_4 à A_1.
   4.1. Représenter graphiquement l'arc orienté γ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ direct.
   4.2. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1} V=\int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
   4.3. Montrer que $\displaystyle\int_{\gamma_1} V\,dt=0$.
   4.4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur de $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

2.3 Une deuxième façon de calculer $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle u_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}\,dt$ et $\displaystyle v_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2nt)}{t}\,dt$.

1.
   1.1. Vérifier que u_n et v_n existent pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
   1.2. En calculant $u_{n+1}-u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.
2. Soit h une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha,\beta]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   On pose, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $\displaystyle H_m=\int_\alpha^\beta h(t)e^{imt}\,dt$.
   Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\lim\limits_{m\to+\infty} H_m=0$.
   Ce résultat est connu sous le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.
3. Montrer que la fonction $h\ :\ t\mapsto h(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{\cos(t)}{\sin(t)}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.
4.
   4.1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)$.
   4.2. En déduire la valeur de $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

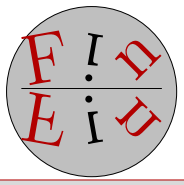
2.4 Une troisième façon de calculer $\mathbf{I}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

Soit $u\in\mathbb{R}^{+*}$. On note $\Delta=[0,u]\times[0,u]$ et $J=\displaystyle\int_\Delta \sin(x)e^{-xy}\,dxdy$.

1. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto \sin(x)e^{-\alpha x}$ où $\alpha\in\mathbb{R}^*$.
2. En utilisant l'intégrale J, montrer que

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}\left(1-e^{ux}\right)\,dx=\int_0^u \frac{1-e^{yu}(\cos(u)+y\sin(u))}{1+y^2}\,dy$$

3. On note alors $K_1=\displaystyle\int_0^u e^{-xu}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$ et $K_2=\displaystyle\int_0^u \frac{y\sin(u)+\cos(u)}{1+y^2}e^{-yu}\,dy$.
   3.1. Prouver que $\lim\limits_{u\to+\infty} K_1=0$.
   3.2. En utilisant une majoration, déterminer $\lim\limits_{u\to+\infty} K_2$.
   3.3. Retrouver alors la valeur de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.
4.
   4.1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$ est convergente.
   4.2. En utilisant ce qui précède, calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt$.



À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°30 (Pr. Devulder)

Formes différentielles Intégrales multiples

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Prenez un nombre de 3 chiffres consécutifs (par exemple 123 ou 789). Soustrayez-le au nombre dont les chiffres sont dans l'ordre inverse du premier nombre (si vous avez pris 123, c'est 321). Ajoutez au résultat le nombre dont les chiffres sont dans l'ordre inverse de ce résultat (même chose). Maintenant je suis prêt à vous dire le résultat que vous avez trouvé. Vous avez trouvé 1089. C'est véritablement sidérant !! Vous doutez de mes capacités divinatoires, Recommençons le. Sinon je vous lance un défi : trouver ma formule magique

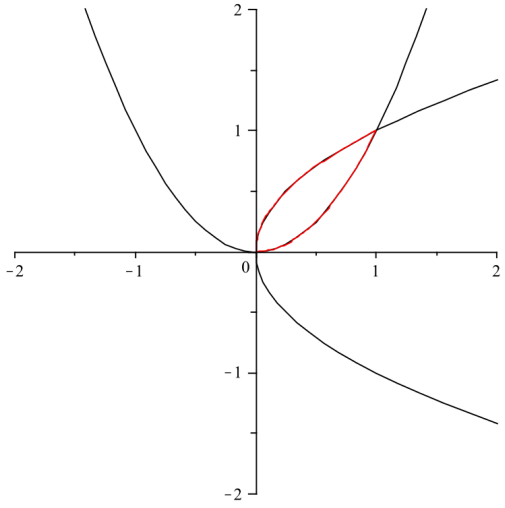
George Green (1793-1841)

Physicien britannique, auteur d'un Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme en introduisant plusieurs concepts importants, parmi lesquels les fonctions potentielles. Sa particularité est qu'il était presque totalement autodidacte, il n'a passé qu'un an environ à l'école, entre 8 et 9 ans et a travaillé longtemps dans le moulin qu'il a hérité de son père. Il l'intégra l'université de Cambridge comme étudiant à l'âge de 40 ans. Il écrivit des publications dans le domaine de l'optique, de l'acoustique et de l'hydrodynamique. C'est surtout à Lord Kelvin, qui le fit connaître, qu'il doit sa renommée.

Mathématicien du jour

Applications simples du cours.

1.1. **G** est l'intersection de "l'intérieur" de deux paraboles.



1.2. On peut paramétrer γ par

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}(t^2,-t) & \text{si } t\in[-1,0]\\ (t,t^2) & \text{si } t\in]0,1]\end{cases}$$

On en déduit que

$$\int_\gamma V = \int_{-1}^{0} \Big((-2t^3 - t^4)2t) + 2t^2(-1)\Big)\ dt + \int_0^1 \Big((2t^3 - t^2) + (t + t^4)(2t)\Big)\ dt = \frac{1}{30}$$

1.3. Si on utilise la formule de Green-Riemann, on obtient

$$\int_\gamma V = \int_G (1 - 2x)\ dxdy$$

On a $G = \{(x, y)/\ x \in [0, 1],\ y \in [x^2, \sqrt{x}]\}$. Par théorème de Fubini (appliqué à une fonction continue sur un compact) on a donc

$$\int_\gamma V = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)\ dy\right)\ dx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\ dx = \frac{1}{30}$$

2.1. D'après la formule de Green-Riemann, on $\int_\gamma V = 0$ dans le cas envisagé.

2.2. Soit $f\ :\ (x, y) \mapsto \cos(xy)$. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

En posant $P(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \sin(xy)$ et $Q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin(xy)$ on a donc la relation voulue.

3.1. En utilisant la formule de Green-Riemann on a

$$A_1 = \int_\gamma x\ dy = \int dxdy$$

$$A_2 = -\int_\gamma y\ dx = \int dxdy$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\int_\gamma (x\ dy - y\ dx) = \int dxdy$$

et ces trois quantités sont égales à l'aire délimitée par γ.

3.2. Notons $M(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t)$; on a

$$M(t + 2\pi) = M(t),\ M(t + \pi) = sym_0(M(t)),\ M(-t) = sym_{(Ox)}(M(t)),\ M(\pi/2 - t) = sym_{x=y}(M(t))$$

On peut donc faire une étude sur $[0, \pi/4]$ puis une symétrie par rapport à la première bissectrice (courbe sur $[0, \pi/2]$) puis une symétrie d'axe Ox (courbe sur $[-\pi/2, \pi/2]$) puis une symétrie par rapport à l'origine (courbe que $[-\pi/2, 3\pi/2]$ et donc en entier puisqu'il y a 2π-périodicité). On a

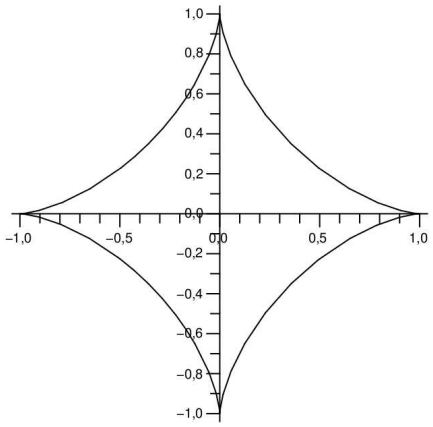
$$\forall t \in [0, \pi/4],\ x'(t) = -3\sin(t)\cos^2(t) \leq 0,\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) \geq 0$$

et x décroît sur $[0, \pi/4]$ alors que y croît. Le seul point d'annulation commun est en 0 (point stationnaire). Comme

$$x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + o_0(t^2)$$

$$y(t) = (t + o_0(t))^3 = o_0(t^2)$$

la tangente en $M(0)$ est portée par $(x''(0), y''(0)) = (-3, 0)$ et est horizontale. D'après les symétries détectées, on a un point de rebroussement de première espèce. On obtient la courbe suivante



3.3. On peut utiliser l'une des formules de **3.1** pour obtenir l'aire. Elle vaut

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3\cos^4(t)\sin^2(t) + 3\sin^4(t)\cos^2(t))\ dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\sin^2(t)\ dt$$

AVec la formule du sinus double,

$$\mathcal{A} = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = \frac{3}{16}\int_0^{2\pi} (1-\cos(4t))\ dt = \frac{3\pi}{8}$$

Problème.

Préliminaires.

1. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $[0, \pi/2]$ (sa dérivée seconde, $-\sin$, est négative sur cet intervalle). Son graphe est donc situé au dessus de la corde $[(0,0),(\pi/2,1)]$ et en dessous de la première bissectrice (tangente à l'origine). Ceci s'écrit

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$$

2.1. φ est continue sur $]0,1]$ et de limite 1 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 (avec $\varphi(0) = 1$).

2.2. Une intégration par parties (les fonctions étant $\mathcal{C}^1$ sur $[1,+\infty[$, celle-ci est licite) donne

$$\forall x \geq 1,\ \Phi(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\ dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\ dt$$

2.3. $\left|\dfrac{\cos(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$ est de limite nulle quand $x \to +\infty$. $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et dominée par $1/t^2$; elle est donc intégrable sur $[1,+\infty[$. A fortiori, sont intégrale entre 1 et x admet une limite quand $x \to +\infty$. On peut donc écrire que

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\ dt$$

2.4. Pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_0^1 \varphi + \Phi(x)$ admet une limite quand $x \to +\infty$ et on peut écrire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\ dt + \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\ dt$$

1 Une première façon de calculer $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1. Par théorèmes généraux, P et Q sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et donc, en particulier, de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout domaine U (ouvert selon le programme) de $\mathbb{R}^2$ qui ne contient pas $(0,0)$.
2. Avec les hypothèses faites, on peut utiliser le théorème de Green-Riemann. Or, un calcul donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}\left((-x^2+y^2+yx^2+y^3)\cos(x)-(x^3+xy^2+2xy)\sin(x)\right)\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_\gamma V = 0$$

3.1. On a

$$P(x(\theta),y(\theta)) = \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho}\left(\sin(x(\theta))\cos(\theta)-\cos(x(\theta))\sin(\theta)\right)$$

$$P(x(\theta),y(\theta)) = \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho}\left(\cos(x(\theta))\cos(\theta)+\sin(x(\theta))\sin(\theta)\right)$$

On multiplie la première quantité par $-\rho\sin(\theta)$ et la seconde par $\rho\cos(\theta)$ pour obtenir

$$A_\rho = \int_0^{\pi/2}\frac{e^{-y(\theta)}}{\rho}\cos(x(\theta))\,d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-\rho\sin(\theta)}\cos(\rho\cos(\theta))\,d\theta$$

3.2. On veut utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall \rho\in\mathbb{R}^+,\ \theta\mapsto e^{-\rho\sin(\theta)}\cos(\rho\cos(\theta))$ est continue sur $[0,\pi/2]$.
- $\forall \theta\in[0,\pi/2],\ \rho\mapsto e^{-\rho\sin(\theta)}\cos(\rho\cos(\theta))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall \rho\geq 0,\ \forall\theta\in[0,\pi/2],\ \left|e^{-\rho\sin(\theta)}\cos(\rho\cos(\theta))\right|\leq 1$. Le majorant est une fonction intégrable sur $[0,\pi/2]$ (continue sur ce segment).

Le théorème s'applique et indique que $\rho\mapsto A_\rho$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. En particulier,

$$\lim_{\rho\to 0^+} A_\rho = A_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

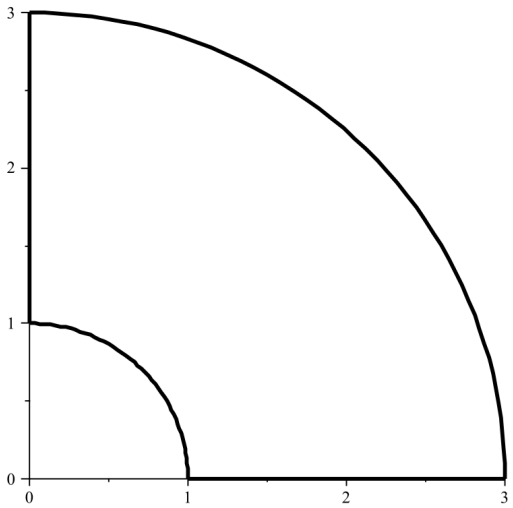
3.3. En utilisant la première question des préliminaires, on a

$$\forall\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \left|e^{-\rho\sin(\theta)}\cos(\rho\cos(\theta))\right|\leq e^{-\rho\sin(\theta)}\leq e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta}$$

On en déduit que

$$|A_\rho|\leq\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta}\,d\theta = -\frac{\pi}{2\rho}\left[e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta}\right]_0^{\pi/2}\leq\frac{\pi}{2\rho}\underset{\rho\to+\infty}{\to}0$$

4.1. Le dessin est fait ici avec $r=1$ et $R=3$.



4.2. γ_1 est paramétré par $t \in [r, R] \mapsto (t, 0)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_1} V = \int_r^R P(t,0)\ dt = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\ dt$$

4.3. γ_3 est paramétré par $t \in [-R, -r,] \mapsto (0, -t)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_1} V = -\int_{-R}^{-r} Q(0,-t)\ dt = 0$$

4.4. D'après la question 2, $\displaystyle\int_\Gamma V = 0$. Par ailleurs (en prenant garde au fait que γ_4 est parcouru dans le sens horaire)

$$\int_{\gamma_2} V = A_R \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_4} V = -A_r$$

Avec les deux questions précédentes, on a donc

$$0 = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t}\ dt + A_R - A_r$$

Il reste à faire tendre r vers 0^+ et R vers $+\infty$ (on a vu l'existence des limites) pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}$$

2 Une deuxième façon de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ dt$.

1.1. $f_n : t \mapsto \dfrac{\cos(t)\sin(2nt)}{\sin(t)}$ et $g_n : t \mapsto \dfrac{\sin(2nt)}{t}$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 (par $f_n(0) = 2n$ et $g_n(0) = 2n$). Ce sont donc des fonctions intégrables sur le segment $[0, \pi/2]$ et u_n et v_n existent a fortiori.

1.2. La formule $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos(\dfrac{a+b}{2})\sin(\dfrac{a-b}{2})$ indique que

$$u_{n+1} - u_n = 2\int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t)\cos(t)\ dt$$

La formule $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$ indique alors que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt))\ dt$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = 0$$

La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc constante et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} 2\cos^2(t)\ dt = \frac{\pi}{2}$$

2. Une intégration par parties donne

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ H_m = \left[h(t)\frac{e^{imt}}{im}\right]_\alpha^\beta - \frac{1}{im}\int_\alpha^\beta h'(t)e^{imt}\ dt$$

Ainsi, on a

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ |H_m| \leq \frac{|h(\alpha) + h(\beta)|}{m} + \frac{|\beta - \alpha|}{m}\|h'\|_{\infty,[\alpha,\beta]}$$

ceci étant licite car h' est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$. On a alors immédiatement

$$\lim_{m\to+\infty} H_m = 0$$

3. h est une fonction continue sur $[0,\pi/2]$ et

$$h(t)=\frac{\sin(t)-t\cos(t)}{t\sin(t)}=\frac{(t+o(t^2))-(t+o(t^2))}{t^2+o(t^2)}=\frac{o(1)}{1+o(1)}$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to 0}h(t)=0$$

et h est prolongable par continuité en posant $h(0)=0$. On a alors une fonction continue sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi/2]$ avec

$$\forall t>0,\ h'(t)=\frac{t^2-\sin^2(t)}{t^2\sin^2(t)}=\frac{(t-\sin(t))(t+\sin(t)}{t^2\sin^2(t)}\underset{t\to 0}{\sim}\frac{(t^3/6)(2t)}{t^4}\underset{t\to 0}{\to}\frac{1}{3}$$

Par un corollaire des accroissements finis, on en déduit que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$ avec $h'(0)=1/3$.

4.1. On remarque que $v_n-u_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}h(t)\sin(2nt)\,dt$. D'après le lemme de Riemann-Lebsque (en passant la partie imaginaire) on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=0$$

4.2. Le changement de variable $x=2nt$ donne

$$v_n=\int_0^{n\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (on a existence des différentes quantités avec ce qui précède) on en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi}\frac{\sin(x)}{x}\,dx=\lim_{n\to+\infty}v_n=\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{\pi}{2}$$

3 Une troisième façon de calculer $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$.

1. Un simple calcul de dérivée montre que

$$x\mapsto-\frac{e^{-\alpha x}}{1+\alpha^2}(\cos(x)+\alpha\sin(x))$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto\sin(x)e^{-\alpha x}$.

2. Avec le théorème de Fubini (sur un pavé et utilisé avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) on a

$$J=\int_0^u\left(\int_0^u\sin(x)e^{-xy}\,dy\right)dx=\int_0^u\left[-\frac{\sin(x)}{x}e^{-xy}\right]_{y=0}^{y=u}dx=\int_0^u\frac{\sin(x)}{x}(1-e^{ux})\,dx$$

mais aussi

$$\begin{aligned}J=\int_0^u\left(\int_0^u\sin(x)e^{-xy}\,dx\right)dy&=\int_0^u\left[-\frac{e^{-yx}}{1+y^2}(\cos(x)+y\sin(x))\right]_{x=0}^{x=u}dy\\&=\int_0^u\frac{1-e^{yu}(\cos(u)+y\sin(u))}{1+y^2}\,dy\end{aligned}$$

L'égalité demandée s'en déduit.

3.1. Comme $|\sin(x)/x|\leq 1$, on a

$$K_1\leq\int_0^u e^{-xu}\,dx=\frac{1-e^{-u^2}}{u}\underset{u\to+\infty}{\to}0$$

3.2. On a aussi

$$|K_2| \leq \int_0^u \frac{1+y}{1+y^2} e^{-yu}\, dy$$

$\frac{1+y}{1+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$. C'est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit M un majorant de son module.

$$|K_2| \leq M \int_0^u e^{-yu}\, dy = M\frac{1-e^{-u^2}}{u} \underset{u\to+\infty}{\to} 0$$

3.3. La question 2 donne

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x}\, dx = K_1(u) + \int_0^u \frac{dy}{1+y^2} - K_2(u)$$

En faisant tendre u vers $+\infty$ ($\int_0^u \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(u)$) on a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

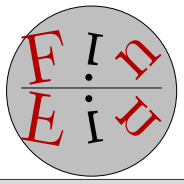
4.1. $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1) et dominée par $1/x^2$ (donc intégrable au voisinage de $+\infty$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et son intégrale sur $\mathbb{R}^+$ existe a fortiori.

4.2. Par un calcul similaire à celui de la question 2.2 des préliminaires, on a (en primitivant sin en $1-\cos$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\, dx$$

En posant $t = x/2$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(2t)}{4t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt$$



À la prochaine