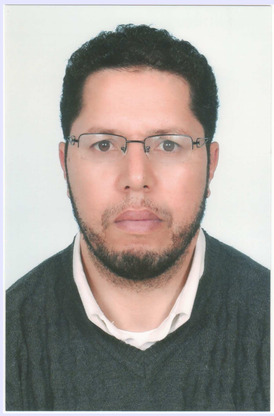
مَمُونِي مُولَاي اسمَاعِيل

Mamouni My Ismail

- ☞ : Professeur Agrégé (1995)-Docteur (2009) en Math
- ☞ : Master 1 (2011) en Sc de l'éducation, Univ. Rouen
- ☞ : MP-CPGE My Youssef, Rabat
- ☞ : Enseignant en Classes Prépas depuis 1995
- ✉ : mamouni.myismail@gmail.com
- ✍ : mamouni.new.fr



Feuilles d'exercices-MP

Série N° 1 Algèbre linéaire

Blague du jour

C'est un voleur qui fait son tour de prospection habituel, il voit accroché sur la porte d'une entre d'un jardin *ATTENTION PERROQUET MÉCHANT*. Il s'éclate de rire et revient la nuit, quand il passe la barrière et pénètre dans le jardin. Soudain, le perroquet crie : "REX, ATTAQUE !!!!"

Diophante d'Alexandrie (env. 200/214 - env. 284/298)

Mathématicien grec. Surtout connu pour son étude des *équations diophantiennes*, il est surnommé le *père de l'algèbre*. Peu de choses sont connues de sa vie. Il était probablement un babylonien. Son œuvre est en partie perdue. Son ouvrage le plus important est son *Arithmétique*, qui influença les mathématiciens arabes et plus tard ceux de la Renaissance.

Mathématicien du jour

Exo 1 **Noyaux et images itérés** Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

① Montrer que la suite (N_k) est croissante (pour l'inclusion) et que la suite (I_k) est décroissante.

② Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \ldots$

③ Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires partir du même rang p.

④ Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

⑤ Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.
☛ Indication : Prendre F supplémentaire de I_{k+1} dans I_k et montrer que $I_{k+2} = I_{k+1} + f(F)$.

Exo 2 **Autour du rang** Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies et $u, v : E \to F$ linéaires.

1. Montrer que $\forall \lambda \neq 0$, on a
$$\operatorname{Im}(\lambda u) = \operatorname{Im} u \text{ et } \ker(\lambda u) = \ker u.$$
2. Montrer que $\operatorname{Im} u + v \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$.
3. En déduire que
$$\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v).$$
4. Montrer que $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_E\} \Longrightarrow \ker u + v = \ker u \cap \ker v$.
5. En déduire que $\operatorname{rg}(u+v) = \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$ si et seulement si $\operatorname{Im} u \cap \operatorname{Im} v = \{0_F\}$ et $\ker u + \ker v = E$.
6. Montrer que
$$|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v).$$

Exo 3

Théorème de Hadamard Une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *diagonale strictement dominante* si elle vérifie la relation suivante :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in [\![1,n]\!]$$

Montrer que de telles matrices sont toujours inversibles.

☛ *Indication* : S'intéresser dans le système linéaire $AX = 0$ à la $k^{\text{ème}}$ ligne où k vérifie $x_k = \max |x_i|$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$.

Exo 4

Endomorphisme cyclique Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E, on dit alors que f est un endomorphisme cyclique, engendré par x_0.

① On considère p maximal tel que $\mathcal{F} = \left(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ est libre, justifier d'abord son existence.

② Dire pourquoi $p \leq n$

③ Montrer par récurrence $k \geq p$ que $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$.

④ En déduire que $\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

⑤ Soit un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec f.

a Dire pourquoi $\exists (a_k)_{0\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$

b Montrer que $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$, $\forall x \in \mathcal{F}$.

c En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

Exo 5

Limite de matrices .

On dit qu'une famille de matrice $A_\varepsilon = \left((a_{i,j}(\varepsilon))\right)_{i,j}$ converge vers une matrice $A = \left((a_{i,j})\right)_{i,j}$ ssi $\lim_\varepsilon a_{i,j}(\varepsilon) = a_{i,j}, \quad \forall i,j$. On écrit alors $\lim_\varepsilon A_\varepsilon = A$.

① Soit B une matrice carré d'ordre n, montrer que :

a $\lim_\varepsilon (A.A_\varepsilon) = A.\lim_\varepsilon A_\varepsilon$.

b $\lim_\varepsilon (A + A_\varepsilon) = A + \lim_\varepsilon A_\varepsilon$.

② Soit A une matrice carré d'ordre n, on dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si $\exists X \neq 0$ tel que $AX = \lambda X$, l'ensemble de ces valeurs propres se note $\mathrm{sp}(A)$, on distingue deux cas :

a 1ér cas : $\mathrm{sp}(A) \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf\{|\lambda| \text{ tel que } \lambda \in \mathbb{K} \text{ valeur propre non nulle de } A\}$.

a Justifier l'existence de α.

b En déduire que $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}$ tel que $|\varepsilon| < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible, puis que $\lim_{\varepsilon\to 0}(A - \varepsilon I_n) = A$..

b 2ème cas : $\mathrm{sp}(A) = \{0\}$. Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{K}$ tel que $\varepsilon \neq 0$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible, puis que $\lim_{\varepsilon\to 0}(A - \varepsilon I_n) = A$..

☛ : Ainsi tout matrice carré d'ordre n est limite d'une suite de matrices inversibles, on dit alors que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

③ ☛ Application : Montrer qu'une matrice qui commute avec toutes les matrices inversibles, commute en général avec toutes les matrices carrés

④ ☛ Application : En déduire que, en dimension finie, tout endomorphisme qui commute avec tous les automorphismes, commute en général avec tous les endomorphismes.

Exo 6 **Lemme de Schur** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(E)$ est : $Z = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall\, g \in \mathcal{L}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$. Autrement dit formé par les endomorphismes qui commutent avec tous les autres.

① Soit $f \in Z, x \in E$ tel que $(x, f(x))$ est libre, montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que $g(x) = x$ et $g \circ f(x) = -f(x)$.

② En déduire que Z est l'ensemble des homothéties de la forme λid_E.

③ Déterminer $Z' = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \forall\, g \in GL(E),\ f \circ g = g \circ f\}$.

Exo 7 **Formule du rang**

① Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, H est un sous-espace vectoriel de E et K est un sous-espace vectoriel de F, montrer que :

a $\operatorname{Im} f_{|H} = f(H)$ et $\ker f_{|H} = \ker f \cap H$.

b $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker f)$.

c $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \operatorname{Im} f) + \dim(\ker f)$.

② Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$.

a Montrer que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.

b Montrer que $2\operatorname{rg}(f^2) \leq \operatorname{rg}(f)$.

☛ **Indication** : On pourra appliquer le théorème du rang $f_{|\operatorname{Im} f}$.

③ Soit E un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir que :

a $\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker f \oplus \dim \ker g$.

☛ **Indication** : On pourra appliquer le théorème du rang $f_{|\operatorname{Im} g}$.

b $\dim(\operatorname{Im} f \cap \ker g) = \operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g \circ f)$.

☛ **Indication** : On pourra appliquer le théorème du rang $g_{|\operatorname{Im} f}$.

c $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) - \dim E \leq \operatorname{rg}(f \circ g) \leq \min(\operatorname{rg}(f), \operatorname{rg}(g))$.

Exo 8 **Endomorphismes nilpotents.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

① Soit $x_0 \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.

② En déduire que si E est de dimension finie n, alors $f^n = 0$.

③ Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.
☛ Indication : On pourra d'abord montrer que $id_E - f$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de f

④ On suppose que $p = n$. Soit $\mathcal{B} = (u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ une base de E.

a Montrer que $\exists (a_k)_{0 \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

b Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exo 9 **$E = \operatorname{Im} f + \ker f$??** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E.

① On rappelle que si f est un projecteur, i.e, $f^2 = f$, alors
$$E = \operatorname{Im} f \oplus \ker f \quad (1)$$
Donner un exemple d'application linéaire qui ne vérifie pas (1).

② Montrer que : $\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \iff \ker f = \ker f^2$.

③ Montrer que : $E = \operatorname{Im} f + \ker f \iff \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

④ Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f vérifie (1).

⑤ Donner un exemple d'application linéaire qui n'est pas projecteur et qui vérifie pourtant (1).

Exo 10 **Van Der Monde**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ famille de nombres réels et

$$A = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

① Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + \cdots + a_1^{n-1} x_n &= 0 \\ x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_2^{n-1} x_n &= 0 \\ \vdots & \\ x_1 + a_n x_2 + \cdots + a_n^{n-1} x_n &= 0 \end{cases}$$

② En déduire que la matrice A est inversible si et seulement si les a_i sont deux deux distincts.

③ On suppose A inversible, proposer une méthode pour résoudre le système $AX = Y$, puis une pour inverser A.

④ Application : Donner l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

⑤ Dans la suite, on pose $V(a_1, \ldots, a_n) = \left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $P(X) = \det\left(V(a, \ldots, a_{n-1}, X\right)$.

a Montrer que $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
☛ **Indication** : Développer le déterminant suivant la dernière ligne.

b Préciser son coefficient dominant.

c Calculer $P(a_i)$.

d En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$.

e Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde $\left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

f A quelle condition la matrice A est inversible.

Exo 11 **Polynômes de Chebychev** : On pose : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

① Trouver une relation de récurrence entre T_{n+1}, T_n, T_{n-1}.

② Montrer que T_n est un polynôme de degré n, préciser son coefficient dominant.

③ Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pour tout réel t.

④ En déduire les racines de T_n.

⑤ ☛*Application* :

a Donner une forme factorise du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

b En déduire comment factoriser dans le cas général le déterminant de la matrice

$$(\cos^{j-1}(a_i))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exo 12 **Commutant d'une matrice (CNC)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA\}$, appelé commutant de A.

① Montrer que $\mathcal{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

② Soit $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les λ_i sont distincts.

a Chercher $\mathcal{C}_A$.

b Soit $\phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$

Montrer que $\operatorname{Im} \phi$ est l'ensemble des matrices diagonale nulle.

Exo 13 **Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (CNC)** : Soit E un $\mathbb{R}$ − espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on définit l'endomorphisme de E, not $u_{i,j}$ par la relation suivante : $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$

Avec $\delta_{j,k}$ $= 1$ si $j = k$, appelé symbole de Kronecker.
$= 0$ si $j \neq k$

On note aussi, $E_{i,j}$ la matrice carre d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i^{me} ligne et j^{me} colonne, gal 1.

① Montrer que $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

② Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$, en déduire que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

③ Soit $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$ fixés, calculer pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$, puis en déduire $E_{i,j}E_{k,l}$.

④ ☛Application : **Commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

Exo 14 **Formes linéaires et trace (CNC)**

① Exprimer la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, puis en déduire les produits $AE_{k,l}$ et $E_{k,l}A$.

② Calculer $\text{Tr}(AE_{k,l})$.

③ En déduire que : $\text{Tr}(AM) = 0,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow A = 0$.

④ Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \text{Tr}(AX)$

⑤ On suppose que
$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \lambda \text{Tr}(X)$$

Exo 15 **Un peu de calcul** .

① **De la géométrie.**

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a Déterminer l'équation du plan π passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$ et contenant une droite parallèle $(O, \vec{j})$. **b** Déterminer la projection de D sur π parallèlement Δ, o
$$D : \begin{cases} x + y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= 0 \end{cases} \qquad \Delta : 6x = 2y = 3z \qquad \pi : x + 3y + 2z = 6.$$

c On considère les deux droites
$$D : \begin{cases} x - z &= a \\ y + 3z &= -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z &= 2b \\ 3x + 3y + 2z &= 7 \end{cases} \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

i Montrer que D et D' ne sont pas parallèles.

ii Donner une CNS sur a et b pour que D et D' soient concourantes.

iii Dans ce cas, former l'équation du plan les contenant.

② **Des systèmes linéaires.**

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

a
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z &= a^3 \\ x + by + b^2 z &= b^3 \\ x + cy + c^2 z &= c^3 \end{cases}$$

☛ *Indication* : Pensez utiliser les relation de Newton-Vite en racines et coefficients d'un polynôme.

b
$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_n &= y_1 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n &= y_2 \\ \vdots & \\ \beta x_1 + \beta x_2 + \cdots + \alpha x_n &= y_n \end{cases}$$

☛ *Indication* : Pensez à écrire le système sous sa forme matricielle $AX = b$.