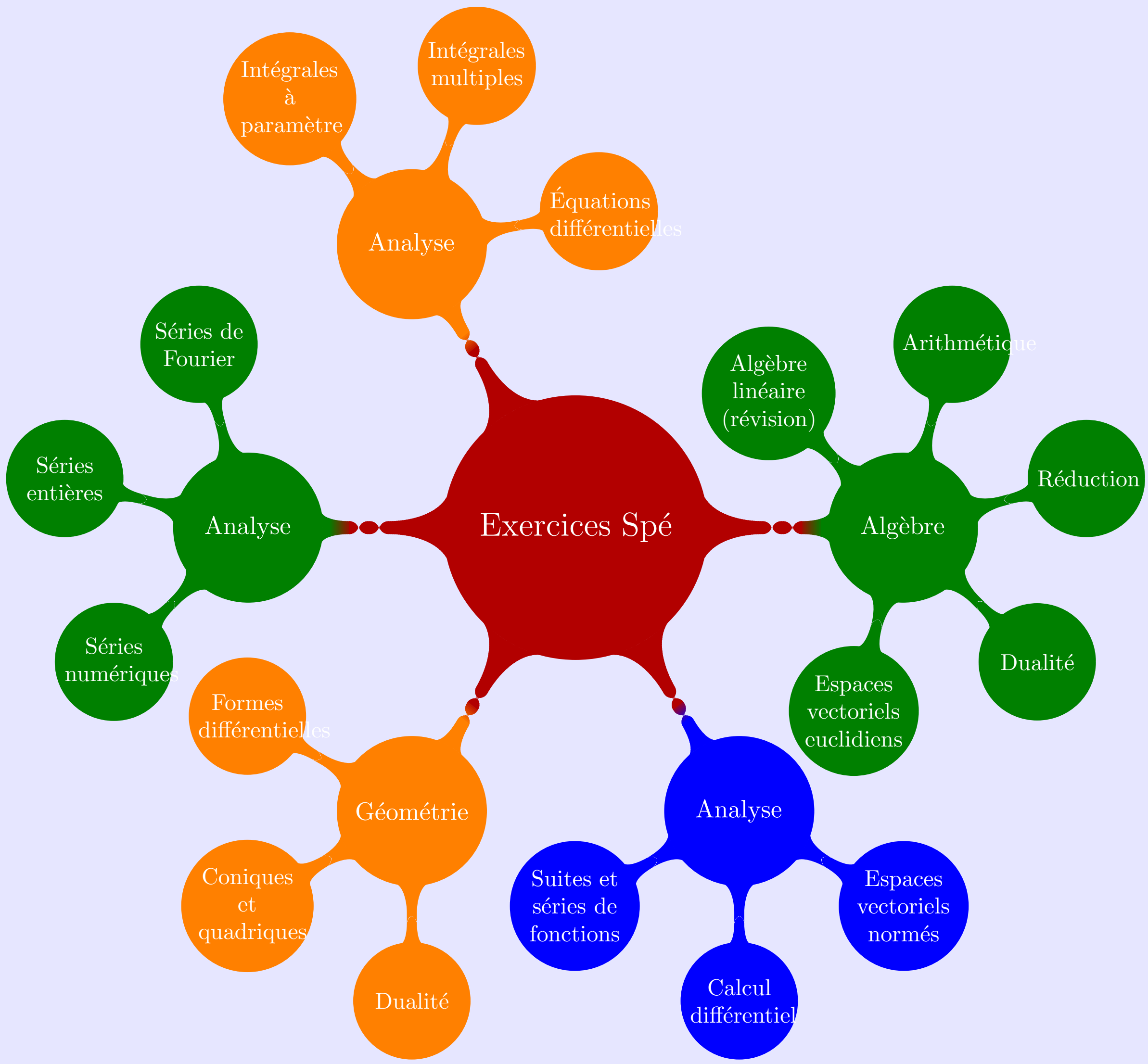



My Ismail Mamouni

Professeur Docteur-Agrégé
CPGE My Youssef, Rabat,
myismail.chez.com
mamouni.myismail@gmail.com

.

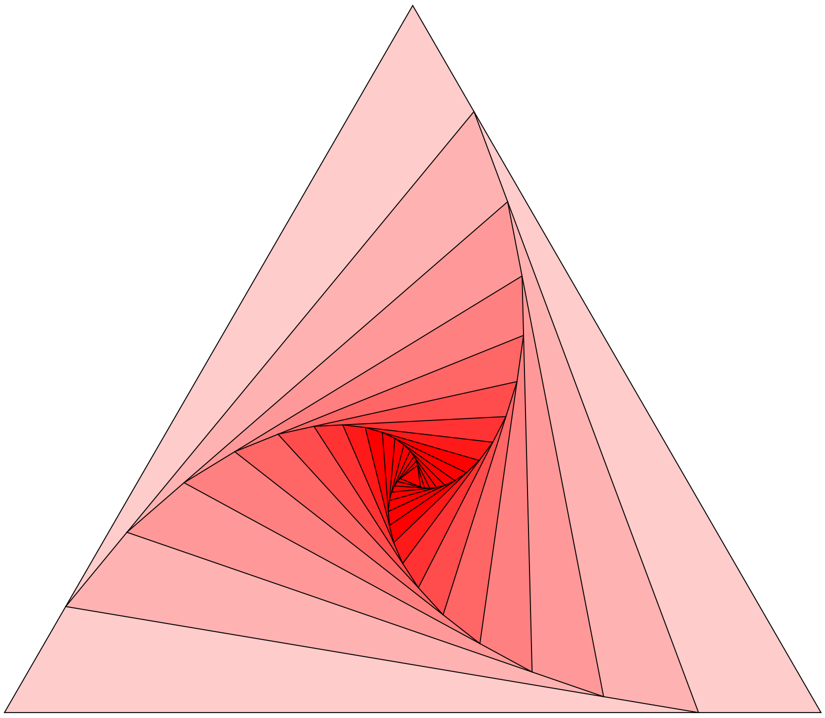
## Remerciements

L'auteur tient à adresser ses vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, notamment les élèves des différents CPGE du Maroc par leurs questions, messages, .... Aux collègues par leurs, corrections, propositions, parfois source latex (Bassou, Boujaida, El Hachimi, Ratbi,...) et à toute autre personne, qui par des actes simples et spontanés a donné du souffle à ce travail.

L'auteur a abusé de la générosité de Michel Quercia et a utilisé dans maintes feuilles d'exercices ses sources latex, qu'il trouve ici les sincères reconnaissances.

L'auteur ne saurait pas comment remercier Pr. Boujaida Sadik des CPGE My Youssef pour son initiation au package Tikz de Latex. L'artiste, comme on l'aime surnommer, était toujours disponible à apporter des idées de conception, tous les codes sources tikz (à 90%) utilisés ici sont des copier-coller des ses propres idées. Sans bien sûr oublier de remercier tous les volontaires tikz qui mettent à la disponibilité de la communauté latex, leurs sources sur les sites http ://www.altermundus.com/ et http ://www.texample.net/tikz/ et enfin le concepteur du package Tikz, le célèbre Till Tantau.

Enfin, tout ce que je pourrai dire ne pourrai pas remercier assez ma femme, Ouichou Lamya. En supportant de lourdes tâches quotidiennes, elle m'a épargné pour que je me consacre à ce travail entre autres. Comment aussi oublier mes deux enfants, Wassim et Naim ; les courts moments de bonheur et de joie qu'on passe ensemble sont toujours assez suffisants pour me donner du plaisir, courage et forces à travailler encore plus.



Sommaire

بِسمِ اللّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللّهُ

عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَ المُؤمِنُون

صَدَقَ اللّهُ العَظِيم

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices
# Algèbre Linéaire (révision)

MP-CPGE Rabat

### Blague du jour

C'est un voleur qui fait son tour de prospection habituel, il voit accroché sur la porte d'une entre d'un jardin ATTENTION PERROQUET MÉCHANT. Il s'éclate de rire et revient la nuit, quand il passe la barrière et pénètre dans le jardin. Soudain, le perroquet crie : "REX, ATTAQUE !!!!"

### Diophante d'Alexandrie (env. 200/214 - env. 284/298)

Mathématicien du jour

Mathématicien grec. Surtout connu pour son étude des équations diophantiennes, il est surnommé le père de l'algèbre. Peu de choses sont connues de sa vie. Il était probablement un babylonien. Son œuvre est en partie perdue. Son ouvrage le plus important est son Arithmétique, qui influença les mathématiciens arabes et plus tard ceux de la Renaissance.

**Exo 1** Noyaux et images itérés Soit $E$ un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

1. Montrer que la suite $(N_k)$ est croissante (pour l'inclusion) et que la suite $(I_k)$ est décroissante.

2. Soit $p$ tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de $p$ et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \cdots = N_{p+k} = \ldots$

3. Montrer que les suites $(N_k)$ et $(I_k)$ sont stationnaires partir du même rang $p$.

4. Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

5. Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.
Indication : Prendre $F$ supplémentaire de $I_{k+1}$ dans $I_k$ et montrer que $I_{k+2} = I_{k+1} + f(F)$.

**Exo 2** Théorème de Hadamard Une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite diagonale strictement dominante si elle vérifie la relation suivante :

$$|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Montrer que de telles matrices sont toujours inversibles.
Indication : Penser résoudre le système linéaire $AX = 0$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 3** Endomorphisme cyclique Soit $E$ un ev de dimension $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\left(f^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $E$.

1. Montrer que $\left(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\right)$ est une base de $E$.

   Considérer $p$ maximal tel que $\mathcal{F} = \left(x, \dots, f^{p-1}(x)\right)$ est libre, et prouver que $f^k(x)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.

2. Montrer que si un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $f$ alors $\exists (a_k)_{0\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

**Exo 4** Limite de matrices .

On dit qu'une famille de matrice $A_\varepsilon = \left((a_{i,j}(\varepsilon))\right)_{i,j}$ converge vers une matrice $A = \left((a_{i,j})\right)_{i,j}$ si

$$\lim_{\varepsilon} a_{i,j}(\varepsilon) = a_{i,j}, \quad \forall i, j.$$

On écrit alors

$$\lim_{\varepsilon} A_\varepsilon = A.$$

Soit $A$ une matrice non inversible.

1. 1ér cas : $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}} \neq \{0\}$. Soit $\alpha = \inf\{|\lambda|$ tel que $\lambda \in \mathbb{R}$ valeur propre non nulle de $A\}$.

   a. Justifier l'existence de $\alpha$.

   b. En déduire que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $|\varepsilon| < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible, puis que $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0 \to (} A - \varepsilon I_n) = A$..

2. 2ème cas : $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}} = \{0\}$. Montrer que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\varepsilon \neq 0$, on a $A - \varepsilon I_n$ est inversible, puis que $\lim\limits_{\varepsilon \longrightarrow 0 \to (} A - \varepsilon I_n) = A$..

**Exo 5** Autour de la Comatrice.

**1** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

a On suppose que $A$ est inversible.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, associé $A$ dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on pose $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

i Montrer que $f(F_k) = F_k$.

ii En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.

iii En déduire que $A^{-1}$ est triangulaire supérieure.

iv En déduire que $\mathrm{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

b On suppose que $A$ est non inversible.

i Montrer que $\exists \alpha \neq 0$ tel que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.

ii En déduire que $\mathrm{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

**2** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

$$\begin{array}{ll} \text{si } \mathrm{rg}(A) = n & \text{alors } \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = n \\ \text{si } \mathrm{rg}(A) = n-1 & \text{alors } \mathrm{rg}(\mathrm{com}(A)) = 1 \\ \text{si } \mathrm{rg}(A) \leq n-2 & \text{alors } \mathrm{com}(A) = 0 \end{array}$$

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant, dit théorème de Rouché-Fontené :
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{rg}(A) = r$, alors il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ extraite de $A$ qui soit inversible.

**3** Si $\mathrm{rg} A = n - 1$, montrer que $\mathrm{com}\, A = U\,{}^tV$, où $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

**4** Exprimer $\mathrm{com}\,(\lambda A)$. en fonction de $\lambda, n$ et $\mathrm{com}\,(A)$.

**5** Calculer $\mathrm{com}\,(\mathrm{com}\, A)$ dans le cas où $A$ est inversible.

**6** Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a Calculer $\mathrm{com}\,(I_n)$.

b Si $A$ et $B$ sont inversibles, démontrer que
$\mathrm{com}\,(AB) = (\mathrm{com}\, A)(\mathrm{com}\, B)$ et $\mathrm{com}\,(A^{-1}) = \mathrm{com}\,(A)^{-1}$.

c Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant des scalaires $\lambda$ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.

d En déduire que si $A$ et $B$ sont semblables, alors $\mathrm{com}\, A$ et $\mathrm{com}\, B$ le sont aussi.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com


Exo 6 Un peu de calcul .

1 De la géométrie.

Dans tout l'exercice, $\mathbb{R}^3$ est muni de son repère canonique $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

a Déterminer l'équation du plan $\pi$ passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$ et contenant une droite parallèle $(O, \vec{j})$. b Déterminer la projection de $D$ sur $\pi$ parallèlement $\Delta$, o

$$D : \begin{cases} x + y + z & = & 1 \\ x - 2y - z & = & 0 \end{cases} \qquad \Delta : 6x = 2y = 3z \quad \pi : x + 3y + 2z = 6.$$

c On considère les deux droites

$$D : \begin{cases} x - z & = & a \\ y + 3z & = & -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z & = & 2b \\ 3x + 3y + 2z & = & 7 \end{cases} \quad \text{o } a, b \in \mathbb{R}.$$

i Montrer que $D$ et $D'$ ne sont pas parallèles.

ii Donner une CNS sur $a$ et $b$ pour que $D$ et $D'$ soient concourantes.

iii Dans ce cas, former l'équation du plan les contenant.

2 Des systèmes linéaires.

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

a
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z & = & a^3 \\ x + by + b^2 z & = & b^3 \\ x + cy + c^2 z & = & c^3 \end{cases}$$

Indication : Pensez utiliser les relation de Newton-Vite en racines et coefficients d'un polynôme.

b
$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_n & = & y_1 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ \beta x_1 + \beta x_2 + \cdots + \alpha x_n & = & y_n \end{cases}$$

Indication : Pensez à écrire le système sous sa forme matricielle $AX = b$.

Exo 7 $E = \mathrm{Im}\, f + \ker f$ ? ? Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $f$ un endomorphisme de $E$.

1 On rappelle que si $f$ est un projecteur, i.e, $f^2 = f$, alors

$$E = \mathrm{Im}\, f \bigoplus \ker f \quad (1)$$

Donner un exemple d'application linéaire qui ne vérifie pas (1).

2 Montrer que : $\mathrm{Im}\, f \cap \ker f = \{0_E\} \Longleftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

3 Montrer que : $E = \mathrm{Im}\, f + \ker f \Longleftrightarrow \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.

4 Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ vérifie (1).

5 Donner un exemple d'application linéaire qui n'est pas projecteur et qui vérifie pourtant (1).

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 8 Formule du rang

1. Soient $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $H$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et $K$ est un sous-espace vectoriel de $F$, montrer que :
   a. $\text{Im } f_{|H} = f(H)$ et $\ker f_{|H} = \ker f \cap H$.
   b. $\dim f(H) = \dim(H) - \dim(H \cap \ker f)$.
   c. $\dim(f^{-1}(K)) = \dim(K \cap \text{Im } f) + \dim(\ker f)$.

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^3 = 0$.
   a. Montrer que $\text{rg}(f) + \text{rg}(f^2) \leq \dim(E)$.
   b. Montrer que $2\text{rg}(f^2) \leq \text{rg}(f)$.

   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang $f_{\restriction \text{Im } f}$.

3. Soit $E$ un ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Établir que :
   a. $\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker f \bigoplus \dim \ker g$.

   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang $f_{\restriction \text{Im } g}$.

   b. $\dim(\text{Im } f \cap \ker g) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$.

   Indication : On pourra appliquer le théorème du rang $g_{\restriction \text{Im } f}$.

   c. $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \dim E \leq \text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$.

Exo 9 Autour du rang Soient $E, F$ deux $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimensions finies et $u, v : E \to F$ linéaires.

1. Montrer que $\forall \lambda \neq 0$, on a
$$\text{Im } (\lambda u) = \text{Im } u \text{ et } \ker(\lambda u) = \ker u.$$

2. Montrer que $\text{Im } u + v \subset \text{Im } u + \text{Im } v$.

3. En déduire que
$$\text{rg}(u + v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v).$$

4. Montrer que $\text{Im } u \cap \text{Im } v = \{0_E\} \Longrightarrow \ker u + v = \ker u \cap \ker v$.

5. En déduire que $\text{rg}(u + v) = \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$ si et seulement si $\text{Im } u \cap \text{Im } v = \{0_F\}$ et $\ker u + \ker v = E$.

6. Montrer que
$$|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)| \leq \text{rg}(u + v).$$

Exo 10

Endomorphismes nilpotents.

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de $f$ est le plus petit entier $p$ tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p$.

1. Soit $u \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $\left(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)\right)$ est libre.

2. En déduire que si $E$ est de dimension finie $n$, alors $f^n = 0$.

3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.

4. On suppose que $p = n$. Soit $\mathcal{B} = \left(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\right)$ une base de $E$.

   a. Montrer que $\exists (a_k)_{0 \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

   b. Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

Exo 11 Van Der Monde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ famille de nombres réels et

$$A = (a_i^{j-1})_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} x_1 + a_1x_2 + \cdots + a_1^{n-1}x_n & = & 0 \\ x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_2^{n-1}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_1 + a_nx_2 + \cdots + a_n^{n-1}x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

2. En déduire que la matrice $A$ est inversible si et seulement si les $a_i$ sont deux deux distincts.

3. On suppose $A$ inversible, proposer une méthode pour résoudre le système $AX = Y$, puis une pour inverser $A$.

4. Application : Donner l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

5. Dans la suite, on pose $V(a_1, \ldots, a_n) = \left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et $P(X) = \det\left(V(a_, \ldots, a_{n-1}, X\right)$.

a. Montrer que $P(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Indication : Développer le déterminant suivant la dernière ligne.

b. Préciser son coefficient dominant.

c. Calculer $P(a_i)$.

d. En déduire la décomposition en facteurs irréductibles de $P(X)$ .

e. Calculer le déterminant de la matrice de Van Der Monde $\left(a_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$

f. A quelle condition la matrice $A$ est inversible.

6. Chebychev On pose : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

a. Trouver une relation de récurrence entre $T_{n+1}, T_n, T_{n-1}$.

b. Montrer que $T_n$ est un polynôme de degré $n$, préciser son coefficient dominant.

c. Montrer que $T_n(\cos(t)) = \cos(nt)$ pour tout réel $t$.

d. En déduire les racines de $T_n$.

7. Application :

a. Donner une forme factorise du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos(2a) \\ 1 & \cos b & \cos(2b) \\ 1 & \cos c & \cos(2c) \end{vmatrix}$$

b. En déduire comment factoriser dans le cas général le déterminant de la matrice

$$(\cos^{j-1}(a_i))_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exo 12

## Extraits de CNC

### 1 Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $E$ un $\mathbb{R}$ — espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit l'endomorphisme de $E$, not $u_{i,j}$ par la relation suivante : $u_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i$
Avec $\delta_{j,k} \begin{array}{l} = 1 \text{ si } j = k \\ = 0 \text{ si } j \neq k \end{array}$, appelé symbole de Kronecker.

On note aussi, $E_{i,j}$ la matrice carre d'ordre $n$, dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la $i^{me}$ ligne et $j^{me}$ colonne, gal 1.

a Montrer que $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b Calculer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_{i,j})$, en déduire que $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.

c Soit $i, j, k, l \in \{1, \ldots, n\}$ fixés, calculer pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$, $u_{i,j} \circ u_{k,l}(e_p)$, puis en déduire $E_{i,j} E_{k,l}$.

### 2 Commutant de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $AM = MA$, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.

### 3 Formes linéaires et trace

a Exprimer la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, dans la base $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, puis en déduire les produits $AE_{k,l}$ et $E_{k,l}A$.

b Calculer $\text{Tr}(AE_{k,l})$.

c En déduire que : $\text{Tr}(AM) = 0,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Longrightarrow A = 0$.

d Soit $\phi$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \text{Tr}(AX)$

e On suppose que

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \phi(X) = \lambda \text{Tr}(X)$$

### 4 Commutant d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } AM = MA\}$, appelé commutant de $A$.

a Montrer que $\mathcal{C}_A$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b Soit $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dont tous les $\lambda_i$ sont distincts.

i Chercher $\mathcal{C}_A$.

ii Soit $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & MA - AM \end{array}$

Montrer que Im $\phi$ est l'ensemble des matrices diagonale nulle.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 13** Lemme de Schur Soit $\mathsf{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Le centre de $\mathcal{L}(\mathsf{E})$ est :
$\mathsf{Z} = \{\mathsf{f} \in \mathcal{L}(\mathsf{E})$ tel que $\forall\ \mathsf{g} \in \mathcal{L}(\mathsf{E}),\ \mathsf{f} \circ \mathsf{g} = \mathsf{g} \circ \mathsf{f}\}$.
Autrement dit formé par les endomorphismes qui commutent avec tous les autres.

1. Soit $\mathsf{f} \in \mathsf{Z}, x \in \mathsf{E}$ tel que $(x, \mathsf{f}(x))$ est libre, montrer qu'il existe $\mathsf{g} \in \mathcal{L}(\mathsf{E})$ telle que $\mathsf{g}(x) = x$ et $\mathsf{g} \circ \mathsf{f}(x) = -\mathsf{f}(x)$.

2. En déduire que $\mathsf{Z}$ est l'ensemble des homothéties.

3. Dterminer $\mathsf{Z}' = \{\mathsf{f} \in \mathcal{L}(\mathsf{E})$ tel que $\forall\ \mathsf{g} \in \mathsf{GL}(\mathsf{E}),\ \mathsf{f} \circ \mathsf{g} = \mathsf{g} \circ \mathsf{f}\}$.

À la prochaine

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

Blague belge : Un homme se jette du 8 ème étage d'un immeuble. Ses cheveux arrivent en bas 2 minutes plus tard. Pourquoi ?
Réponse : Il utilise un shampoing anti-chute des cheveux.
Commentaire du français : Hi hi Quelle blague ! ! ! Quel idiot peut raconter ça ?
Commentaire du belge : Quel est l'autre idiot à qui cette blague peut arracher un sourire du bout des lèvres. ? ?

**Étienne Bézout (1730-1783)**

Mathématicien du jour

Mathématicien français, il rédige le Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie, qui devint plus tard le livre de chevet des candidats au concours d'entrée à l'École polytechnique. Il est également l'auteur d'une Théorie générale des équations algébriques, publiée en 1779, sur la théorie de l'élimination et des fonctions symétriques sur les racines d'une équation : il utilise les déterminants dans un article de l'Histoire de l'Académie royale, parue en 1764, mais ne traite pas de la théorie générale.

## 1 Notion d'idéal

**Exo 1** Idéaux particuliers

Soit $A$ un anneau commutatif et $\mathcal{I}$ un idéal de $A$.

1. idéal premier.
On dit que $\mathcal{I}$ est un idéal premier si et seulement si $\mathcal{I}$ est différent de $A$, et pour tous $a$ et $b$ de $A$, on a
$$ab \in \mathcal{I} \text{ et } a \notin \mathcal{I} \Longrightarrow b \in \mathcal{I}.$$
   a. Montrer que si $\mathcal{I}$ est premier, $a, b \in A$, alors $ab \in \mathcal{I} \Longrightarrow a \in \mathcal{I}$ ou $b \in \mathcal{I}$.
   b. Montrer que si $\mathcal{I}$ est premier, $a \in A, n \in \mathbb{N}^*s$, alors $a^n \in \mathcal{I} \Longrightarrow a \in \mathcal{I}$ ou $b \in \mathcal{I}$.
   c. Montrer que $\mathcal{I}$ est un idéal premier de A si et seulement si $A/\mathcal{I}$ est intègre.

2. idéal maximal.
$\mathcal{I}$ est dit maximal quand il n'existe que deux idéaux contenant $\mathcal{I}$ savoir $A$ et $\mathcal{I}$ lui même.
Montrer que :
   a. Montrer que tout idéal de $A$ qui contient $1_A$ est égal à $A$.
   b. Soit $\mathcal{I}$ idéal maximal de $A$ et $a \in A, a \notin \mathcal{I}$, montrer que $aA + \mathcal{I} = \mathcal{I}$.
   c. Tout idéal maximal est nécessairement premier.
   d. $\mathcal{I}$ est un idéal maximal de $A$ si et seulement si $A/\mathcal{I}$ est un corps.

**Exo 2** Idéaux et morphismes  Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ deux anneaux commutatifs, $\varphi : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}$ un morphisme d'anneaux et $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ respectivement.

1. a) Montrer que $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est un idéal de $\mathbf{A}$.

   b) Montrer que si $\mathcal{J}$ est premier, alors $\varphi^{-1}(\mathcal{J})$ est aussi premier.

   b) Montrer l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat n'est pas vrai dans le cas des idéaux maximaux.

2. a) On suppose que $\varphi$ est surjectif, montrer alors que $\varphi(\mathcal{I})$ est un idéal de $\mathbf{B}$.

   b) Montrer à l'aide d'un contre-exemple, que ce résultat n'est pas toujours vrai quand $\varphi$ n'est pas surjective.

**Exo 3** Radical d'un idéal .
Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif et $\mathcal{I}$ un idéal de $\mathbf{A}$, on appelle radical de $\mathcal{I}$, not

$$\sqrt{\mathcal{I}} = \{x \in \mathbf{A} / \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n \in \mathcal{I}\}$$

1. Déterminer $\sqrt{30\mathbb{Z}}$.

2. Soient $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$. Montrer les propriétés suivantes :

   a) $\sqrt{\mathcal{I}}$ est un idéal de $\mathbf{A}$.

   b) $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \Longrightarrow \sqrt{\mathcal{I}} \subset \sqrt{\mathcal{J}}$.

   c) $\mathcal{I} \subset \sqrt{\mathcal{I}}$.

   d) $\sqrt{\sqrt{\mathcal{I}}} = \sqrt{\mathcal{I}}$.

   e) $\sqrt{\mathcal{I}\mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{I} \cap \mathcal{J}} = \sqrt{\mathcal{I}} \cap \sqrt{\mathcal{J}}$.

   f) $\sqrt{\mathcal{I} + \mathcal{J}} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{I}} + \sqrt{\mathcal{J}}}$.

   g) $\sqrt{\mathcal{I}} = \mathbf{A} \Longleftrightarrow \mathcal{I} = \mathbf{A}$.

Exo 4 Théorème de factorisation et Idéaux de $\mathcal{L}(E)$

1 a Soient $E$, $F$, $G$ trois espaces vectoriels, soient $w \in \mathcal{L}(E,G)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer l'équivalence :

$$\text{Im } w \subset \text{Im } v \Longleftrightarrow \exists u \in \mathcal{L}(E,F) \quad w = v \circ u\,.$$

b Soient $u_1, \cdots, u_k$ et $v$ des endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ tels que $\text{Im } v \subset \sum_{i=1}^{k} \text{Im } u_i$.

Montrer qu'il existe des endomorphismes $a_1, \cdots, a_k$ de $E$ tels que $v = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ a_i$.

c Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les idéaux à droite de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{I}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \text{Im } u \subset F\}$, où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

2 a Soient $E$, $F$, $G$ trois espaces vectoriels, soient $w \in \mathcal{L}(E,G)$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence

$$\ker u \subset \ker w \Longleftrightarrow \exists v \in \mathcal{L}(F,G) \quad w = v \circ u\,.$$

b Soient $u_1, \cdots, u_k$ et $v$ des endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ tels que $\bigcap_{i=1}^{k} \ker u_i \subset \ker v$.

Montrer qu'il existe des endomorphismes $a_1, \cdots, a_k$ de $E$ tels que $v = \sum_{i=1}^{k} a_i \circ u_i$.

c Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les idéaux à gauche de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{J}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid F \subset \ker u\}$, où $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

Exo 5 Nilradical Soit $A$ un anneau commutatif. Le nilradical de $A$ est l'ensemble,

$$\text{nil}(A) = \{a \in A\ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } a^n = 0_A\}$$

c'est–dire l'ensemble des nilpotents de $A$. Montrer que :

1 $\text{nil}(A)$ est un idéal de $A$.

2 Si $\mathcal{I}$ est un idéal premier de $A$, alors $\text{nil}(A) \subset \mathcal{I}$.

3 $\text{nil}(A/\text{nil}(A)) = \{0_A\}$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

# 2 Arithmétique

**Exo 6** Indicatrice d'Euler. l'indicateur d'Euler d'un entier positif $n$, not $\varphi(n)$ est défini comme étant le nombre d'entiers positifs inférieurs ou égaux $n$ et premiers avec $n$.

1. Justifier la relation $\varphi(n) = \operatorname{card}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, où $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ désigne l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Montrer que $p$ premier si et seulement si $\varphi(p) = p - 1$.

3. Soit $p$ premier et $\alpha \in \mathbb{N}$. Donner tous les multiples de $p$ inférieurs $p^\alpha$, puis en déduire que : $\varphi(p^\alpha) = p^{\alpha-1}(p-1)$.

4. Soit $n$ et $m$ premiers entre eux.
   - a. Construire un isomorphisme $\psi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$
   - b. Montrer $\forall(a, b) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, on a $(a, b)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ si et seulement si $\psi(a, b)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$.
   - c. En déduire que $\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$.

5. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ où $p_i$ sont des nombres premiers, en déduire $\varphi(n)$.
   Calculer $\varphi(180)$.

6. Soit $a \in \mathbb{N}^*$ premier avec $n$,
   - a. Montrer que l'application : $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ x & \longmapsto & ax \end{array}$ est bien définie et bijective.
   - b. En déduire que $\displaystyle\prod_{x\in U} x = \prod_{x\in U} \phi(x)$.
   - c. En déduire que : $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ Thorme d'Euler.

**Exo 7** Cryptographie-RSA. Soit $p$ et $q$ deux nombres premiers, on pose $n = pq$. Soit $M$ un entier naturel premier avec $pq$, qui représente le message à décoder, et $C$ le message codé à envoyer.

1. Dites pourquoi $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$.

2. Soit $e$ premier avec $\varphi(n)$, justifier l'existence de $d \in \mathbb{Z}$ tel que $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.

3. Le message $M$ est codé en $C$ tel que $C \equiv M^e \pmod{n}$.
   En déduire que : $C^d \equiv M \pmod{n}$.
   Indication : On pourra penser utiliser le théorème d'Euler.

4. Application numérique : On prend $p = 3, q = 5$ et $M = 7$, donner les messages codé $C$ et décodé $D$. On prend cette fois $M = 12$, que remarquez vous après avoir fait les calculs. Expliquer ce phénomène et dite comment y remédier.

**Exo 8** Théorème chinois .

1. Les 17 pirates et le cuisinier chinois.
Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de $N$ pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.
Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.
Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?
Réponse : 785

2. Engrenages :
Une roue dentée comportant $a$ dents s'engrène dans une tringle horizontale. Combien de dents doivent passer pour que sa $r$-ième dent vienne en coïncidence avec la $s$-ime dent d'une autre roue dentée comportant elle $b$ dents ?

# 3 Éléments propres

**Exo 9** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A$ est inversible.
   a. Exprimer $\chi_{A^{-1}}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$.
   b. En déduire que $\operatorname{sp}(A^{-1}) = (\operatorname{sp}(A))^{-1} = \{\lambda^{-1},\ \lambda \in \operatorname{sp}(A)\}$.

2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
   a. Exprimer $\chi_{aA+bI_n}(X)$ en fonction de $\chi_A(X)$, $a, b$ et $n$.
   b. En déduire que $\operatorname{sp}(()aA + bI_n) = a\operatorname{sp}(A) + b = \{a\lambda + b,\ \lambda \in \operatorname{sp}(A)\}$.

**Exo 10** Matrice stochastique Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ coefficients strictement positifs, i.e.

$$\begin{aligned} a_{i,j} > 0 \qquad & \forall i, j \in [\![1, n]\!] \\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \quad & \forall i \in [\![1, n]\!] \end{aligned}$$

Montrer les résultats suivants :

1. 1 est valeur propre de $A$ et que $E_1$ le sous-espace propre associé est de dimension égale à 1 .

2. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de $A$, on a : $|\lambda| \leq 1$.

3. Si $\lambda$ est valeur propre telle que $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.

**Exo 11** Nombres algébriques Un nombre complexe $z$ est dit algébrique s'il est solution d'une équation polynomiale coefficients dans $\mathbb{Z}$. Dans le cas contraire on dit qu'il est transcendant.

1. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.

2. Donner un exemple de nombre réel transcendent.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   a. Montrer que $z$ est algébrique si et seulement si $\exists P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(z) = 0$. On dit alors que $P$ est un polynôme annulateur pour $z$.

   b. Montrer que l'ensemble $\mathcal{I}_z = \{P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(z) = 0\}$ est soit vide, soit un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.

   c. En déduire que tout nombre algébrique $z$, admet un unique polynôme annulateur unitaire de degré minimal qui divise tous les autres polynômes annulateurs. On le note $\pi_z$.

4. Donner les polynômes minimaux suivants : $\pi_{\sqrt{2}}$ et $\pi_j$ o $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

**Exo 12** Que peut-on dire d'un endomorphisme ayant un polynôme annulateur de degré 1.

**Exo 13** Soit $f$ un endomorphisme de $E$ et $P$ un polynôme annulateur de $f$ de degré $n$.

1. Montrer que $f$ est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. En déduire que dans ce cas $f^{-1} \in \text{Vect}(f^k)_{0\leq k\leq n-1}$.

**Exo 14** Endomorphismes nilpotents. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $f^p = 0$. Dans ce cas, l'indice de $f$ est le plus petit entier $p$ tel que $f^p = 0$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $p$. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$.

1. Soit $u \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $\left(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)\right)$ est libre.

2. En déduire que si $E$ est de dimension finie $n$, alors $f^n = 0$.

3. Montrer que $id_E - f$ et $id_E + f$ sont inversible, donner leurs inverses en fonction des puissances de $f$.

4. Montrer que $f + g \in GL(E)$.

5. On suppose que $p = n$. Soit $\mathcal{B} = \left(u, f(u), \dots, f^{n-1}(u)\right)$ une base de $E$.

   a. Montrer que $\exists (a_k)_{0\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

   b. Donner $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

6. On ne considère plus dorénavant $f$ nilpotente.

   a. Montrer que $f$ est nilpotent si et seulement si 0 est son unique valeur propre.

   b. En déduire, dans le cas où $f$ est nilpotent :

      i. La forme son polynôme minimal,

      ii. Son degré en fonction de l'indice de nilpotence de $f$.

      iii. La forme du polynôme caractéristique.

Exo 15 Endomorphisme cyclique.

Soit $E$ un ev de dimension $n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. On que $E$ est cyclique (ou monogène) s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre $E$. On sauf dans l'exercice (sauf mention du contraire) que $f$ est cyclique.

1. Justifier l'existence de l'entier $p$ maximal tel que $\mathcal{F} = \left(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ soit libre.

2. Montrer que $f^k(x_0)$ est combinaison linaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.

3. En déduire que $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $E$.

4. En déduire que $\deg \pi_f = n$, comparer $\pi_f$ et $\chi_f$.

5. Montrer que si un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ commute avec $f$.
   - a. Dire pourquoi que $\exists (a_k)_{0\leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$
   - b. Montrer que $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.
   - c. En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

6. On ne suppose plus $f$ cyclique, mais que $\deg \pi_f = n$ et on se propose de montrer que $f$ est effectivement cyclique.
   - a. Pour tout $x \in E$, on note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, engendré par un unique polynôme unitaire, qu'on notera $\pi_{f,x}$.
   - b. Dire pourquoi $\pi_{f,x} = \pi_f$.
   - c. En déduire que $f$ est cyclique.

7. Montrer que les assertions suivantes sont équivalents :
   - a. $f$ est cyclique.
   - b. $\deg \pi_u = n$.
   - c. $\exists x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0))$ soit une base de $E$.
   - d. $(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1})$ libre dans $\mathcal{L}(E)$.

8. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$ et $(x_0, f(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0))$ une base de $E$.
   - a. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $g(x_0) = P(f)(x_0)$.
   - b. En déduire que $g = P(f)$
   - c. En déduire une base et la dimension du commutant de $f$, défini par $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } f \circ g = g \circ f\}$

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 16** Sous-espaces monogènes et Polynôme minimal. Extrait CNC-99

Dans tout l'exercice $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soit $u \in \mathrm{Li}(E)$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$. On pose $E_u(x) = \{P(u)(x);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Montrer que $E_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de $E$, stable par $u$ et non réduit à $\{0\}$. On note par $u_x$ l'endomorphisme induit par $u$ sur $E_u(x)$.

2. Si $x \in \ker u$, donner la forme générale des éléments de $E_u(x)$, donner en particulier $\dim E_u(x)$

3. Même question si cette fois $x$ est un vecteur propre de $u$ associé à une valeur propre $\lambda$ de $u$.

4. On note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$.
   - a. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $E_u(x)$ est stable par $P(u)$.
   - b. Soit $P \in \mathcal{I}_x$, montrer que $P(u)$ induit sur $E_u(x)$ l'endomorphisme nul.
   - c. Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non nul, engendré par un polynôme unitaire, qu'on va noter $\pi_{u,x}$ et appelé polynôme minimal de $u$ en $x$.

5. 
   - a. Dire pourquoi $\pi_{u,x}$ divise $\pi_u$.
   - b. Donner un exemple où :
     - i. $\pi_u = \pi_{u,x}$.
     - ii. $\pi_{u,x}$ divise strictement $\pi_u$.

6. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $x$ et $u$ pour que $\deg(\pi_{u,x}) = 1$.

7. On suppose dans cette question que $\deg(\pi_{u,x}) = k \geq 2$ avec $\pi_{u,x} = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$.
   - a. Montrer que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$ est une base de $E_u(x)$.
   - b. Que peut-on alors dire de l'espace $E_u(x)$.
   - c. En déduire $\dim E_u(x)$.
   - b. Donner la forme de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_x}(u_x)$.

8. En déduire que $\pi_{u_x} = \pi_{u,x}$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 17** Résultant de 2 polynômes — Extrait CCP 2009

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degrés respectifs $p$ et $q$. On appelle résultant de $A$ et $B$ le déterminant d'ordre $p+q$ noté $res(A,B)$ défini par

$$res(A,B) = \det M_{A,B} \text{ où } M_{A,B} = \begin{pmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & \vdots \\ & & a_p & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & b_q \end{pmatrix}$$

1. Donner la forme de $M_{A,B}$ pour $A = 1+2X+3X^2$ et $B = 4+5X+6X^2+7X^3$.

2. Soit $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_{p+q-1}[X] \\ (U,V) & \longmapsto & UA+VB \end{array}$.
   - a. Montrer que $u$ est linéaire.
   - b. Donner la forme générale des éléments de $\ker u$.
   - c. Montrer que $u$ est un isomorphisme si et seulement si $A \wedge B = 1$.

3. Soit $\mathcal{B} = ((1,0),(X,0),\cdots,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),\cdots,(0,X^{p-1}))$ et $\mathcal{B}' = (1,X,\cdots,X^{p+q-1})$.
   - a. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$.
   - b. En déduire que $A \wedge B = 1 \iff Res(A,B) \neq 0$.

**Exo 18** Extrait de E3A 2008

1. On note par $E$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $\cos, \sin, \cosh, \sinh$.
   - a. Quel est la dimension de $E$.
   - b. Justifier que la dérivation induit sur $E$ un endomorphisme $\delta$.
   - c. Déterminer $\pi_\delta$.

2.
   - a. Justifier que la dérivation induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme $\delta_n$.
   - b. Calculer $\delta_n^{n+1}$ et $\delta_n^n(X^n)$.
   - c. En déduire $\pi_{\delta_n}$.

**Exo 19** Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Donner $\mathrm{rg} J$, en déduire $\dim \ker J$.

2. En déduire une valeur propre de $A$ et la dimension du sous-espace propre associé.

3. Calculer $J^2$, en déduire un polynôme annulateur de $J$.

4. En déduire le spectre de $J$, $\pi_J$ et $\chi_J$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 20** Centrale MP 2000 .

On considère la matrice de $\mathcal{M}_n(()\mathbb{C})$ :

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & c \end{pmatrix}$$

On pose

$$P(x) = \det(U + xI_n)$$

1. Montrer que $P$ est un polynôme de degré 1, de la forme $\alpha x + \beta$.
Indication : Faire des opérations sur les lignes ou colonnes.

2. On suppose que $a \neq b$.
   a) Calculer $P(-a)$ et $P(-b)$, en déduire $\alpha$ et $\beta$
   b) En déduire que $\chi_A(X) = \dfrac{(-1)^n}{a-b}\left(a(X+b-c)^n - b(X+a-c)^n\right)$.
   c) Montrer qu'en général les valeurs propres de $A$ sont sur un cercle.

3. Donner le polynôme caractéristique de $A$ quand $a = b$.

**Exo 21** Matrice compagnon .

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n \in \mathbb{K}_n[X]$, sa matrice compagnon est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $E$ et $\varphi$ l'endomorphisme de $E$ de matrice $M$ dans $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\chi_M = P$.

2. Calculer $\varphi^k(\vec{e}_1)$ pour $0 \leq k \leq n$.

3. En déduire que $P(M) = 0$, sans utiliser le théorème de Hamilton-Cayley.

4. Application :
   a. Montrer qu'une matrice compagnon est semblable à sa transposée.
   b. En déduire que pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les matrices $M$ et ${}^tM$ sont semblables.

Exo 22 Matrices spectres disjoints .

1 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

a : $\forall\, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.

b : $\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $AX = XB \Longrightarrow X = 0$.

c : $\chi_B(A)$ est inversible.

d : $A$ et $B$ n'ont pas de valeur propre en commun.

2 Application : Soient $A, B, P$ trois matrices carres complexes avec $P \neq 0$ telles que $AP = PB$. Montrer que $A$ et $B$ ont une valeur propre commune.

Exo 23 Sous espaces stables.

1 Droites et hyperplans stables.

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a Montrer qu'il existe une droite vectorielle stable par $u$.

b Montrer qu'il existe un hyperplan stable par $u$

Indication : considérer Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ o $\lambda$ est une valeur propre de $u$.

c Donner un exemple où ces propriétés sont en défaut pour un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

2 Plan stable.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda = a + ib$ une valeur propre non réelle de $M$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$). On note $X$ un vecteur propre complexe de $M$.

a Montrer que $\overline{X}$ est aussi vecteur propre de $M$.

b Montrer que $(X, \overline{X})$ est libre dans $\mathbb{C}^n$.

c Soient $U = \dfrac{1}{2}(X + \overline{X})$, $V = \dfrac{1}{2i}(X - \overline{X})$.
Montrer que $(U, V)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$.

d Soit $F = \mathrm{vect}(U, V)$. Montrer que $F$ est stable par $\varphi$ (endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé $M$) et donner la matrice de $\varphi_{|F}$ dans la base $(U, V)$.

3 Plans stables.

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

a Soit $F$ un plan vectoriel. Montrer que si $F$ est stable par $f$ alors il existe $P \in \mathbb{K}_2[x]$ non nul tel que $F \subset \ker P(f)$.

b Réciproquement, si $P \in \mathbb{K}_2[x]$ est non nul, montrer que $\ker P(f)$ contient un plan stable par $f$.

c Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ montrer que $f$ admet toujours une droite ou un plan stable.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 24** polynôme minimal d'un vecteur. Extraits CNC 99

Soit $u$ un endomorphisme de $E$, espace vectoriel de dimension $n$ sur le corps $\mathbb{K}$.

1. Soit $x \in E$, montrer que l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u)(x) = 0_E\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un unique polynôme unitaire, not $\pi_{x,u}$ et appel polynôme minimal de $x$ en $u$.

2. Montrer que $\pi_{x,u}$ divise $\pi_u$.

3. Donner $\pi_{x,u}$ quand $x \in \ker u$.

4. Exemple : On suppose que $u$ est un projecteur non nul, différent de l'identité. Rappeler son polynôme minimal, ainsi que celui de $x$ quand $x \in \operatorname{Im} u$.

5. Application : On se propose de montrer l'équivalence suivante : $\{0\}$ et $E$ sont les seuls sous-espace vectoriel de $E$ stables par $u$ si et seulement si $\chi_u$ est irréductible sur $\mathbb{K}$. Pour cela pour tout $x \in E$, on pose $\mathbb{K}_u[x] = \{P(u)(x)$ tel que $P \in \mathbb{K}[X]\}$, appel sous-espace cyclique engendré par $x$

   a. On suppose que $\chi_u$ est irréductible.

      i. Si $x \neq 0$, montrer que $\chi_u = \pi_u = \pi_{x,u}$.

      ii. En déduire que $\mathbb{K}_u[x] = E$, puis conclure.

   b. Réciproquement.

      i. Soit $x \neq 0$, montrer que $\mathbb{K}_u[X] = E$.

      ii. Supposons qu'il existe $P$ un diviseur non trivial de $\chi_u$ et soit $y = P(u)(x)$. Montrer que $\pi_{y,u} = \chi_u/P$, puis en déduire une contradiction.

**Exo 25** Endomorphisme cyclique.

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie gale $n$. Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est dit cyclique si $\exists a \in E$ tel que la famille $(f^k(a))_{k\in\mathbb{N}}$ soit une famille génératrice de $E$.

1. Montrer que $\forall k \geq n$, on a : $f^k(a) \in \operatorname{Vect}\left((f^k(a))_{0\leq k\leq n}\right)$.

2. Soit $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de $f$, non nul. Montrer que $\deg(P) \geq n$ (raisonner par l'absurde).

3. En déduire que le polynôme minimal de $f$ est (au signe près) le polynôme caractéristique de $f$.

4. Étudier la réciproque

**Exo 26** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $P(u)$ est un automorphisme $\iff P \wedge \pi_u = 1$.

**Exo 27** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de $\chi_A$.

**Exo 28** $\operatorname{sp}(u \circ v) = \operatorname{sp}(v \circ u)$.

Soient $E$ un K-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si $\lambda$ est valeur propre de $u \circ v$ alors $\lambda$ est valeur propre de $v \circ u$ (on distinguera les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$).

2. En déduire que ${}^{(}u \circ v) = {}^{(}\ v \circ u)$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 29** Crochet de Lie.

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul, $E$, on pose pour tous endomorphismes $u$ et $v$ :

$$[u,v] = u \circ v - v \circ u \qquad \text{Crochet de Lie.}$$

1. Montrer que $(\mathcal{L}(E), +, ., [,])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

2. Montrer que l'application : $\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E)^2 & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & (u,v) & \longmapsto & [u,v] \end{array}$ est bilinéaire symétrique.

3. Montrer que $\forall u, v, w \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$[u,[v,w]] + [v,[w,u]] + [w,[u,v]] = 0. \qquad \text{identit de Jacobi.}$$

4. Soient $u, v$ deux endomorphisme de $E$ tels que $[u,v] = \mathrm{id}_E$. Montrer que :
   - a $[u^k, v] = ku^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}$.
   - b $[P(u), v] = P'(u)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.
   - c $u$ et $v$ n'ont pas de polynômes minimaux.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices
# Réduction

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

Ça se passe dans un concours pour ouvrir une boite de conserve
- L'ingénieur : Quand j'ai eu faim, j'ai pris la conserve et j'ai tapé sur son point de moindre résistance.
- Le physicien : Quand j'ai eu faim, j'ai observé la boite, posé quelques équations et appliqué une forte pression sur les points idoines, et la boite s'est ouverte.
- Le mathématicien en transpirant : Supposons que la bote est ouverte, supposons que la bote est ouverte...

**Ibn al-Haytham (965-1039)**

Mathématicien et physicien musulman d'origine erse. Il est l'un des pères de la physique quantitative et de l'optique physiologique. Craignant de possible sanctions du calife d'Égypte, qui lui confie le projet d'arrêter les inondations du Nil, il fait semblant de folie et fut assigné à résidence. Il profita de ce loisir forcé pour écrire plusieurs livres (environ 200). Il a été le premier expliquer pourquoi le soleil et la lune semblent plus gros (on a cru longtemps que c'tait Ptolémée). C'est aussi lui qui a contredit Ptolémée sur le fait que l'œil mettrait de la lumière. Selon lui, si l'œil était connu de cette faon on pourrait voir la nuit. Il a compris que la lumière du soleil se reflétait sur les objets et ensuite entrait dans l'oeil. Il fut également le premier illustrer l'anatomie de l'oeil avec un diagramme. Il dit qu'un objet en mouvement continue de bouger aussi longtemps qu'aucune force ne l'arrête : c'est le principe d'inertie que Galilée redécouvrira. On lui doit l'invention de la chambre noire, un instrument optique qui permet d'obtenir une projection en deux dimensions très proche de la vision humaine. Le théorème de Wilson (1741-1793) était aussi connu de Alhassan Ibn Al Haytam.

Mathématicien du jour

**Exo 1** Soient $E$ un ev de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et $u$ un endomorphisme de $E$.
On suppose que $u^3 = u^2, u \neq \mathrm{id}_E, u^2 \neq 0, u^2 \neq u$.

1. Montrer qu'une valeur propre de $u$ ne peut être que $0$ ou $1$.
2. Montrer que $1$ et $0$ sont effectivement valeurs propres de $u$.
3. Montrer que u n'est diagonalisable.
4. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u^2) \oplus \mathrm{Ker}(u^2)$.
5. Monter que $u|_F = \mathrm{id}_F$ avec $F = \mathrm{Im}(u^2)$.

**Exo 2** Soit $f$ un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie, $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $p_\lambda$ le projecteur sur le sous-espace propre associé parallèlement la somme des autres sous-espaces propres. Soit $P$ un polynôme tel que $P(\lambda) = 1$ et $P(\mu) = 0$ pour toutes les autres valeurs propres, $\mu$, de $f$.
Montrer que $p_\lambda = P(f)$.

**Exo 3** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^m = I_n$.

1. Justifier pourquoi $A$ est diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $m = n$ et que $(I, A, \dots, A^{m-1})$ est libre. Donner $\pi_A, \operatorname{tr}(A), \det(A)$.

3. On suppose que dans cette question que $\operatorname{sp}(A) \subset \mathbb{R}$, montrer que $A$ est la matrice d'une symétrie.

**Exo 4** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $n$ est impair, montrer que $A$ admet au moins une valeur propre réelle.

**Exo 5** Matrices de rang 1 .

1. Soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls, on pose $A = X^tY$.
   a) Calculer les coefficients de $A$
   b) Montrer que $\operatorname{rg}A = 1$.

2. Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{rg}A = 1$.
   a Montrer que $\exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nuls tel que $A = X^tY$.
   b Donner une base de $\ker A$.
   c Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est une valeur propre de $A$.
   d Donner toutes les valeurs propres de $A$, ainsi que la dimension de leurs sous-espaces propres.
   e En déduire $\chi_A$.

3. a Montrer que $A^k = \operatorname{tr}(A)^{k-1}A,\ \forall k \in \mathbb{N}^*$.
   b En déduire qu'une matrice $A$ de rang 1, est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{tr}(A) = 0$.

4. Application : Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(u) = 1$.
Montrer que : $u^2 = 0 \iff \operatorname{Im} u \subset \ker u$
$\iff u$ n'est pas diagonalisable

**Exo 6** Réduction dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + (\operatorname{tr}A)\lambda^2 - \left( \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right) \lambda + \det(A).$$

2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $L_1, L_2$ deux lignes non proportionnelles de $A - \lambda I$ (s'il en existe).
   a Calculer $L = L_1 \wedge L_2$ (produit vectoriel) et $X = {}^tL$. b Montrer que $X$ est vecteur propre de $A$ pour la valeur propre $\lambda$.

**Exo 7** Oral CCP .
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension $n$ et $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p^2$ est un projecteur.

1. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de $p$ ?

2. Montrer que $p$ est diagonalisable si et seulement si $p^3 = p$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 8** Valeurs propres simples.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $A$ telle que $\dim E_\lambda = 1$

1. Justifier que $\text{rg}(A - \lambda I_n) = n - 1$.

2. Montrer que $\text{rg}({}^t\text{com}(A - \lambda I)) = 1$.
   Indication : On pourra utiliser la relation $B.{}^t(\text{com}B) = (\det B)I_n$ pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer que les colonnes de ${}^t\text{com}(A - \lambda I)$ engendrent $E_\lambda$.

4. Application : Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**Exo 9** Anticommutant — Centrale MP 2003

Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p$ $(p \geq 2)$ des endomorphismes de $E$ vérifiant :

$$\forall k,\ u_k^2 = -\text{id}_E, \qquad \forall\ k \neq \ell,\ u_k \circ u_\ell = -u_\ell \circ u_k.$$

1. Montrer que les $u_k$ sont des automorphismes et qu'ils sont diagonalisables.

2. Montrer que $n$ est pair.

3. Donner le spectre de chaque $u_k$.

4. Donner les ordres de multiplicité des valeurs propres des $u_k$.

5. Calculer $\det(u_k)$.

**Exo 10** X 2004 .

Trouver tous les polynômes $P$ vérifiant :

$$\forall\ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad P(A) = 0 \Longrightarrow \text{tr}(A) \in \mathbb{Z}.$$

Exo 11 Centrale MP 2003.

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $u \in LE$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi_u : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & v & \longmapsto & v \circ u \end{array}$$

1. Montrer que $\Phi_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

2. On se propose de montrer l'équivalence suivante : ($u$ est diagonalisable) $\Longleftrightarrow$ $\Phi_u$ est diagonalisable)

   a. 1ère méthode :

      i. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $v \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$P(\Phi_u)(v) = v \circ P(u)$$

      ii. En déduire que $u$ et $\Phi_u$ ont mêmes polynômes annulateurs, puis conclure.

   b. 2ème méthode :

      i. Montrer que $\lambda \in^( \Phi_u) \Longleftrightarrow u - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas surjectif.

      ii. En déduire que $^(\Phi_u) =^( u)$.

      iii. Soit $\lambda \in^( u)$ et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(\Phi_u(v) = \lambda v)$. Montrer que :

         $\alpha$. Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E) \subset \ker v)$.

         $\beta$. $\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{LE})$ est isomorphe $\mathcal{L}H, E$ où $H$ est un supplémentaire de Im $(u - \lambda \mathrm{id}_E)$.

         $\gamma$. $\dim(\ker(\Phi_u - \lambda \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)})) = \dim(E)\dim(\ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$

      iv. Conclure.

Exo 12 Commutant d'une matrice

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $C(A)$ le commutant de $A$.

1. Pour $n = 2$, montrer que $C(A)$ est de dimension $2$ ou $4$, en donner une base.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A$ diagonalisable, montrer que $C(A)$ est de dimension $\geq n$

3. Cas d'une matrice valeurs propres distinctes.

   a. Soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une matrice diagonale valeurs propres distinctes.

   b. Montrer qu'une matrice $M$ commute avec $D$ si et seulement si $M$ est diagonale.

   c. Montrer que pour toute matrice $M$ diagonale, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ unique tel que $M = P(D)$.

   d. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice valeurs propres distinctes. Montrer que les matrices $M$ commutant avec $A$ sont les polynômes en $A$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 13** Usage de la réduction.

1. Système différentiel.

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $A^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Soit $U_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(U_n)$ dfini par la relation : $U_{n+1} = AU_n$. Calculer $U_n$ en fonction de $n$.

c. Soit $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$. Résoudre $X'(t) = AX(t)$.

2. Calcul des puissances de $A$.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour valeurs propres $1, -2, 2$ et $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer que $A^n$ peut s'écrire sous la forme : $A^n = \alpha_n A^2 + \beta_n A + \gamma_n I_3$ avec $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

b. On considère le polynôme $P(X) = \alpha_n X^2 + \beta_n X + \gamma_n$. Montrer que : $P(1) = 1$, $P(2) = 2^n$, $P(-2) = (-2)^n$.

c. En déduire les coefficients $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$.

3. Suites récurrentes linaires.

Soit $(u_n)$ une suite réelle vérifiant l'équation de récurrence : $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$.

a. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.

b. Diagonaliser $A$. En déduire $u_n$ en fonction de $u_0$, $u_1$, $u_2$ et $n$.

4. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de nombres réels satisfaisant aux relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n - x_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n - z_n \end{cases}$$

Calculer les valeurs de $x_n$, $y_n$ et $z_n$ en fonction de $x_0$, $y_0$ et $z_0$.

**Exo 14** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}$, $A^k$ est diagonalisable.

2. On suppose que $A$ est inversible.

a. Montrer que $A^{-1}$ est aussi diagonalisable.

b. Donner les valeurs propres et vecteurs propres de $A^{-1}$ en fonctions de ceux de $A$.

c. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de $\chi_A$.

d. Donner les racines de $\chi_{A^{-1}}$ ainsi que leurs multiplicités respectives, en fonction de celles $\chi_A$.

e. Montrer que $A^k$ est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

**Exo 15** Endomorphismes semi-simples.

Un endomorphisme $f$ est dit semi-simple si tout sous-espace stable par $f$ admet un supplémentaire stable par $f$.

Montrer qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie est semi-simple si et seulement s'il est diagonalisable.

mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 16** Trigonalisation simultanée .

Montrer que si $AB = 0$, alors $A$ et $B$ sont simultanément trigonalisables.

**Exo 17** Diagonalisation simultanée.

Soient $u$ et $v$ deux endomorphismes diagonalisables de $E$, qui commutent, c'est à dire tels que $u \circ v = v \circ u$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (resp. $\mu_1, \dots, \mu_q$) les valeurs propres de $u$ (resp. de $v$), et $F_1, \dots, F_p$ les espaces propres associés (resp. $G_1, \dots, G_q$).

1. Dire pourquoi chaque $G_j$ (resp. $F_i$) est stable par $u$ (resp. $v$)

2. On pose $H_{i,j} = F_i \cap G_j$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$.
   - a. Montrer que $H_{i,j} \cap \sum_{k \neq j} H_{i,k} = 0$.
   - b. Soit $x \in F_i$, justifier l'existence des $x_j^i n G_j$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_q$.
   - c. Calculer $u(x)$ de deux façons, en déduire que $x_j \in F_i$.
   - d. Conclure que $F_i = \bigoplus_{j=1}^{q} H_{i,j}$.

3. En déduire l'énoncé suivant :

   Lorsque deux endomorphismes diagonalisables $u$ et $v$ commutent, il existe une base formée de vecteurs propres communs à $u$ et à $v$ (en d'autres termes, $u$ et $v$ sont diagonalisables simultanément dans la même base).

4. Deuxième méthode :
   - a. Dire pourquoi les sous-espace vectoriel $G_j$ sont stable par $u$.
   - b. En déduire que $u_{|G_j}$ est diagonalisable.
   - c. En déduire qu'il existe une base formée de vecteurs propres communs à $u$ et à $v$

5. Application Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisables qui commutent.
   - a. Montrer qu'il existe $P$ inversible et $D, D'$ diagonales, telle que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$.
   - b. En déduire que $A + B, A - B$ et $AB$ sont diagonalisable.

Exo 18 Décomposition de Dunford .

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On se propose de montrer qu'il existe deux matrices uniques $D, N$ telles que $A = D + N$, $D$ est diagonalisable, $N$ est nilpotente, $DN = ND$. Pour cela on considère $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}$ associé à la matrice $A$ dans une base donnée de $E$, on pose $\pi_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et $E_i = \ker(u - \lambda_i \mathrm{id}_E)^{\alpha_i}$ et enfin $u_i = u|_{F_i}$.

1. Existence :
   a. Dire pourquoi $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$.
   b. Soit $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{p} \mathcal{B}_i$ une base adaptée à cette somme, que peut-on dire de la forme de $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.
   c. Montrer que $u_i - \lambda_i \mathrm{id}_{E_i}$ est nilpotent.
   d. Soit $B_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(u_i)$, montrer que $B_i = D_i + N_i$ avec $D_i$ matrice scalaire et $N_i$ nilpotente.
   e. En déduire l'existence de la décomposition de Dunford.

2. Unicité :
   Soit $A = D' + N'$ une autre décomposition de Dunford. On pose $D' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(d')$ et $N' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(n')$.
   a. Montrer que $AD' = D'A$
   b. En déduire que les $E_i$ sont stables par $d'$.
   c. Que peut-on dire de la forme de $D'$.
   d. En déduire que $DD' = D'D$, puis que $D - D'$ est diagonalisable.
   e. En déduire que $D = D'$, puis conclure.

Exo 19

Noyau et image.

1 Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Pour $\lambda \in^( u)$, on note $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ et $F_\lambda = \mathrm{Im}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E)$. Montrer que

$$E_\lambda \oplus F_\lambda = E.$$

2 Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.
Montrer que $\ker f^2 = \ker f$ puis que $\ker f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$.
Indication : Distinguez les cas $P(0) \neq 0$ et $P(0) = 0$.

3 Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f$ est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{rg}(f - \lambda \mathrm{id}_E)^2$.

4 Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On se propose de montrer que les ensembles $\mathcal{K} = \{\ker(P(u)),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{I} = \{\mathrm{Im}\,(P(u)),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ sont finis et ont même cardinal. Pour cela on note $\mu$ le polynôme minimal de $u$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs unitaires de $\mu$.

a Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on pose $d = P \wedge \mu$.
Montrer que $\ker(P(u)) = \ker(d(u))$ et $\mathrm{Im}\,(P(u)) = \mathrm{Im}\,(d(u))$.

b En déduire que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{I}$ sont finis.

c Soit $d \in \mathcal{D}$.

i Montrer que le polynôme minimal de $u_{|\mathrm{Im}\,(d(u))}$ est $\mu/d$.

ii En déduire que l'application $d \mapsto \mathrm{Im}\,(d(u))$ est injective sur $\mathcal{D}$ et que $\mathrm{card}(\mathcal{I}) = \mathrm{card}(\mathcal{D})$.

iii Montrer que $d$ le polynôme minimal de $u_{|\ker(d(u))}$ ainsi que $u_{|\mathrm{Im}\,(\frac{\mu}{d}(u))}$.

iv En déduire que l'application $d \mapsto \ker(d(u))$ est injective sur $\mathcal{D}$ puis que $\mathrm{card}(\mathcal{K}) = \mathrm{card}(\mathcal{D})$.

**Exo 20** Matrices tridiagonales .

Ce sont les matrices de la forme :

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & & & (0) \\ b & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a & b \\ (0) & & & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

**1** Rappeler la forme générale des suites réelles vérifiant une relation de type

$$au_{n+1} + bu_n + cu_{n-1} = 0 \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^*, \ (b, c) \in \mathbb{R}^2.$$

**2** Dire comment calculer $\Delta_n = \det A_n$ (chercher une relation de récurrence).

**3** Exemple : Calculer le déterminant de la matrice suivante

$$B_n = \begin{pmatrix} 2 & \cos\theta & & & (0) \\ \cos\theta & 2 & \cos\theta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \cos\theta & 2 & \cos\theta \\ (0) & & & \cos\theta & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**4** Proposer une méthode pour déterminer les valeurs propres de $A$.

**5** polynômes de Chebychev .

Soit

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

c Calculer $D_n(\theta) = \det(T_n + (2\cos\theta)I_n)$ par récurrence, on pourra prendre $D_0(\theta) = 2$ pour simplifier les calculs.

d En déduire les valeurs propres de $T_n$.

e Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(T_n)$, déterminer ses vecteur propres associés, $X = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$.
On pourra Résoudre l'équation $(T_n - \lambda I_n)X = 0$, on pourra prendre $x_0 = x_{n+1} = 0$ pour simplifier les calculs.

f Justifier pourquoi $T_n$ est diagonalisable, puis la diagonaliser.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 21

Soit $f$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel canonique $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker f^2 \oplus \ker(f - 2\mathrm{Id})$.

2. Trouver une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = f$. Montrer que $\ker f^2$ est stable par $g$. En déduire qu'un tel endomorphisme $g$ ne peut exister.

Exo 22

Un peu de calcul

1. Mettre sous forme triangulaire les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer les puissances et l'exponentielle ($e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$) des matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables, triangularisables ? Si oui, les réduire.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Fin

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

# Feuille d'exercices
# Dualité

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

● Pourquoi le nombre zéro n'a-t-il aucune crédibilité au sein des nombres complexes ?
Réponse : Parcequ'il n'a jamais d'argument.

● Pourquoi, pour les Romains, les mathématiques ne sont pas vraiment intéressantes ?
Réponse : Parce que **X** est toujours égal à 10.

**Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)**

Mathématicien du jour

Mathématicien, astronome et physicien allemand. Doté d'un grand génie, il est surnommé le prince des mathématiciens, et considéré comme l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. Considéré par beaucoup comme distant et austre, Gauss ne travailla jamais comme professeur de mathématiques, détestait enseigner et collabora rarement avec d'autres mathématiciens.
Enfant prodige, il apprend seul à lire et à compter à l'âge de trois ans. Très jeune, il formule la méthode des moindres carrés et une conjecture sur la répartition des nombres premiers, conjecture qui sera prouve un sicle plus tard. Il fait ensuite une grande perce, en caractérisant presque complètement tous les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas uniquement. Il est le premier à démontrer rigoureusement le théorème de D'Alembert-Gauss, appelé théorème fondamental de l'algèbre.
En physique, il est l'origine de la découverte des lois de Kirchoff en électricité et l'auteur de deux des quatre équations de Maxwell.

## 4 Formes linéaires.

**Exo 1** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non identiquement nulle. On note $H = \ker f$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$.

2) Soit $\vec{u} \in E \setminus H$ et $F = \operatorname{vect}(\vec{u})$. Montrer que $F \bigoplus H = E$.

**Exo 2** Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varphi$ des formes linéaires sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie égale à $n$, montrer que : $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \iff \ker \varphi \supset \bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i$.

**Exo 3** Base antiduale.
Soient $(f_i)_i$, $n$ formes linéaires indépendantes sur un espace vectoriel $E$ de dimension $n$. Montrer qu'il existe une base $(\vec{e}_i)$ de $E$ telle que $f_i = \vec{e}_i^{\,*}$.
$(\vec{e}_i)_i$ s'appelle la base antiduale de $(f_i)_i$

**Exo 4** Dans $\mathbb{K}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x + y - z$ . $f_2(\vec{x}) = x - y + z$ $f_3(\vec{x}) = x + y + z$

1. Montrer que $(f_1, f_2, f_3)$ est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.

2. Trouver sa base antiduale.

**Exo 5** Pour $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ on pose $f_i(\vec{x}) = x_i + x_{i+1}$, pour $1 \leq i \leq n-1$, et $f_n(\vec{x}) = x_n + x_1$. déterminer si $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de $(\mathbb{K}^n)^*$ et, le cas chant, déterminer la base antiduale.

**Exo 6** Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $x_0, \dots, x_n$ sont des scalaires deux deux distincts. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de $E^*$ et donner la base antiduale lorsque : $f_i(P) = P(x_i)$, $f_i(P) = P^{(i)}(0)$, $f_i(P) = P^{(i)}(x_i)$.

**Exo 7** Polynômes d'Hermite Soit $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ deux deux distincts.
On note : $\phi_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(x_i) \end{array}$ et $\psi_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(x_i) \end{array}$

1. Montrer que $(\phi_1, \dots, \phi_n, \psi_1, \dots, \psi_n)$ est une base de $E^*$.

2. Chercher la base antiduale. On notera $P_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ et $d_i = P_i'(x_i)$.

**Exo 8** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ distincts. On considère les formes linéaires sur E : $f_a : P \longrightarrow P(a)$ , $f_b : P \longrightarrow P(b)$
$f_c : P \longrightarrow P(c)$ , $\varphi : P \longrightarrow \displaystyle\int_{t=a}^{b} P(t)\,dt$
Montrer que $c \neq \dfrac{a+b}{2}$ est une CNS pour la liberté de $(f_a, f_b, f_c, \varphi)$.

**Exo 9** Polynômes de Legendre Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On note $P_0 = 1$, $P_i = X(X-1)\cdots(X-i+1)$ pour $i \geq 1$, et $f_i : P \longrightarrow P(i)$.

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $E$ et $\mathcal{B} = (f_0, \dots, f_n)$ est une base de $E^*$.

2. Décomposer la forme linéaire $P_n^*$ dans la base $\mathcal{B}$.

   Indication : On pourra montrer que : $P_n^* = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} f_i}{i!\,(n-i)!}$.

3. Décomposer de même les autres formes linéaires $P_k^*$.

**Exo 10** Polynômes de Bernstein Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ distincts. On pose $P_k = (X-a)^k (X-b)^{n-k}$.

1. Montrer que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $E$.

2. On suppose $n = 2$ et on prend comme base de $E^*$ : $\mathcal{B} = (f_a, f_c, f_b)$ o $f_x(P) = P(x)$ et $c = \dfrac{a+b}{2}$.
   Exprimer les formes linéaires $(P_0^*, P_1^*, P_2^*)$ dans $\mathcal{B}$.

**Exo 11** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F, G$ deux sous-espace vectoriel de $E$ tels que $F \oplus G = E$.

1. Montrer que $F^\circ \oplus G^\circ = E^*$.

2. Montrer que $F^\circ$ est naturellement isomorphe $G^*$ et $G^\circ$ $F^*$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 12** Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, $Q \in E$ de degré $n$ et $Q_i = Q(X+i)$ $(0 \leq i \leq n)$.

1. Montrer que $(Q, Q', Q'', \dots, Q^{(n)})$ est libre.

2. Montrer que toute forme linéaire sur $E$ peut se mettre sous la forme :
$f : P \longrightarrow \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P'(0) + \cdots + \alpha_n P^{(n)}(0)$.

3. Soit $f \in E^*$ telle que $f(Q_0) = \cdots = f(Q_n) = 0$. Montrer que $f = 0$.
Indication : Considérer le polynôme $P = \alpha_0 Q + \cdots + \alpha_n Q^{(n)}$.

4. Montrer que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $E$.

**Exo 13** Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$.

1. Soit $\varphi \in E^*$ telle que : $\forall\ P \in \mathbb{K}_{n-1}[X],\ \varphi((X-a)P) = 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall\ P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a)$.

2. Soit $\varphi \in E^*$ telle que : $\forall\ P \in \mathbb{K}_{n-2}[X],\ \varphi((X-a)^2P) = 0$.
Montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que :
$\forall\ P \in E,\ \varphi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$.

**Exo 14** Orthogonalité.

1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E^*$ . On note $F^\perp = \{x \in E \text{ tel que } \forall\ \phi \in F \text{ on a } \phi(x) = 0\}$. Montrer que $\dim F^\perp = \operatorname{codim} F$.

2. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$. On note $F^\perp = \{\phi \in E^* \text{ tel que } \forall\ x \in F \text{ on a } \phi(x) = 0\}$. Montrer que $\dim F^\perp = \operatorname{codim} F$.

**Exo 15**

1. Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in E^*$ toutes deux non nulles. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{u} \in E$ tel que $f(\vec{u}) \neq 0$ et $g(\vec{u}) \neq 0$.

2. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\phi_A : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(AM). \end{array}$

   a. Montrer que $E^* = \{\phi_A \text{ tel que } A \in E\}$.

   b. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
Montrer que : $\mathcal{S}^\perp = \{\phi_A \text{ tel que } A \in \mathcal{A}\}$ .
$\mathcal{A}^\perp = \{\phi_A \text{ tel que } A \in \mathcal{S}\}$

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 16** Polynômes trigonométriques.

On note $f_n(x) = \cos nx$ et $g_n(x) = \sin nx$ ($x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$).
Soit $E_n$ l'espace engendré par la famille $\mathcal{F}_n = (f_0, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$.

1. Montrer que pour $k \geq 1$, $(f_k, g_k)$ est libre.

2. Soit $\varphi : \begin{array}{rcl} E_n & \longrightarrow & E_n \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$. Chercher les sous-espaces propres de $\varphi$. En dduire que $\mathcal{F}_n$ est libre.

3. On note $a_k = \dfrac{2k\pi}{2n+1}$ et $\varphi_k : \begin{array}{rcl} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(a_k). \end{array}$
Montrer que $(\varphi_0, \dots, \varphi_{2n})$ est une base de $E_n^*$.

4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $b_k = \dfrac{2k\pi}{N}$ et $\psi_k : \begin{array}{rcl} E_n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(b_k). \end{array}$
Montrer que $(\psi_0, \dots, \psi_{N-1})$ est libre si et seulement si $N \leq 2n+1$, et engendre $E_n^*$ si et seulement si $N \geq 2n+1$.

**Exo 17** Formes linéaires liées.

1. Soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ telles qu'il existe $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $f_1(\vec{x}) = \dots = f_n(\vec{x}) = 0$. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

2. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \longrightarrow P(i)$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.

3. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \longrightarrow P'(i)$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est liée.

**Exo 18** Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On suppose qu'il existe $p$ formes linéaires $f_1, \dots, f_p$ telles que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ (f_1(\vec{x}) = \dots = f_p(\vec{x}) = 0) \Longrightarrow (\vec{x} = \vec{0})$.
Montrer que $E$ est de dimension finie inférieure ou gale $p$.

**Exo 19** Formes linéaires et trace .

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que $AM = MA,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que $\mathrm{Tr}(AM) = 0,\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que : $A = 0$.

3. Pour tout $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\varphi_A(M) = \mathrm{tr}(AM)$. Montrer que l'application $\varphi_A$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. En déduire que l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ A & \longmapsto & \varphi_A \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

5. Soit $\phi$ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$

6. On suppose de plus que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(XY) = \phi(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \phi(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$

**Exo 20** Transposée Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où $E, F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle transposée de $f$, l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} {}^t f: & F^* & \longrightarrow & E^* \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array}$$

1. Montrer que ${}^t f$ est linéaire.

2. Soit $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases respectives de $E$ et $F$, et $M$ la matrice de $f$ relativement à ces bases. Exprimer la matrice de ${}^t f$ relativement aux bases duales en fonction de $M$.

3. Montrer que $\mathrm{Im}\ {}^t f = \ker f^{\perp}$ et que $\ker {}^t f = \mathrm{Im}\ f^{\perp}$.

4. En déduire que ${}^t f$ est injective si et seulement si $f$ est surjective, puis que ${}^t f$ est surjective si et seulement si $f$ est injective.

5. Lemme de Schur : Un endomorphisme $u$ d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie qui laisse stable tout hyperplan est une homothétie.
   a. Montrer que si $f$ laisse stable un hyperplan $H$, alors ${}^t f$ laisse stable laisse stable $\mathbb{K}x_0^*$ pour tout $x_0 \in E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.
   b. Montrer qu'un endomorphisme qui laisse stable toutes les droites est forcément une homothétie.
   c. En déduire le lemme de Shur.

À la prochaine

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

# 5 Formes quadratiques.

**Exo 21** déterminer si les formes quadratiques suivantes sont positives :

1. $q(x,y) = (1-\lambda)x^2 + 2\mu xy + (1+\lambda)y^2$.

2. $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z(x\cos\alpha + y\sin\alpha)$.

3. $q(x,y,z,t) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + t^2 + 2xy + xt$.

**Exo 22** Calcul de signature.
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ coefficients strictement positifs. déterminer la signature de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par : $q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i,j} a_{i,j}(x_i - x_j)^2$.

**Exo 23** Signature de ${}^t\!AA$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $M$ est la matrice d'une forme quadratique $q$ positive sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ${}^t\!AA$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que dans ce cas $\ker M = \ker A$ puis que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A)$.

3. Déterminer la signature en $q$ fonction de $\operatorname{rg} A$.

**Exo 24** Décomposition en carrés.
Décomposer en carrés la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} x_i x_j = \frac{1}{2}\sum_{i\geq 1} x_i^2 + \frac{1}{2}\Big(\sum_{i\geq 1} x_i\Big)^2$$

On posera $y_i = x_i + (x_{i+1} + \cdots + x_n)/(i+1)$.

**Exo 25** Rang d'une décomposition
Soit $q$ une forme quadratique sur un espace vectoriel $E$ de dimension finie et $f_1,\dots,f_p \in E^*$, $\alpha_1,\dots,\alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $q = \alpha_1 f_1^2 + \cdots + \alpha_p f_p^2$.
Montrer que $\operatorname{rg}(f_1,\dots,f_p) \geq \operatorname{rg}(q)$.

**Exo 26** Soit $f$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$ et $q$ la forme quadratique associe. On pose pour $x \in E$ : $\varphi(x) = q(a)q(x) - f^2(a,x)$.

1. Montrer que $\varphi$ est une forme quadratique sur $E$.

2. Si $E$ est de dimension finie comparer les rangs de $\varphi$ et $q$.

3. Dans le cas général, déterminer le noyau de la forme polaire de $\varphi$ en fonction de celui de $f$ et de $a$.

**Exo 27** Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ : $q(A) = \operatorname{tr}(A^2)$. Montrer que $q$ est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa signature
Indication : Étudier les restrictions de $q$ aux sous-espace vectoriel des matrices symétriques et anti-symétriques.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 28**

Soit $\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr} AB \end{array}$.

1. Démontrer que $\phi$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

2. On suppose que $n \geq 2$. Démontrer que tout $F$ hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

3. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Quelle est la signature de $\phi$ ?

**Exo 29**

Vecteurs isotropes.

1. Soit $q$ une forme quadratique sur un espace vectoriel réel. Quelle est en fonction de la signature de $q$ la plus grande dimension de sous-espace isotrope de $E$ (i.e. sous-espace vectoriel de $E$ formé de vecteurs isotropes $x \in E$ tel que $q(x) = 0$) ?

2. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la forme quadratique : $q(x, y, z) = x^2 + y^2$
   a. Déterminer tous les vecteurs $(x, y)$ isotrope relativement à $q$
   b. En donner une représentation.
   c. Déterminer le noyau de $q$.

3. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique : $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
   a. Déterminer tous les vecteurs $(x, y, z)$ isotrope relativement à $q$
   b. En donner une représentation.
   c. Déterminer le noyau de $q$.

FIN FIN

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

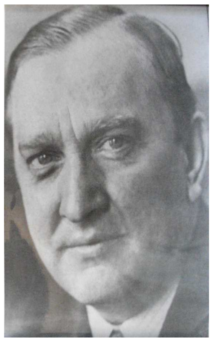
Feuille d'exercices

# Espaces Vectoriels Normés

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

- Qu'est-ce qui est jaune, normé et complet ?
Réponse : Un espace de Bananach.
- Qu'est-ce qui est jaune, normé, complet et meilleur avec de la chantilly ?
Réponse : Un Bananach Split.
- Soit $\varepsilon > 0$. Que vaut $3\varepsilon$ ? Réponse : 8. Car $3\varepsilon = \varepsilon 3 = 8$.
- Quel animal est le plus doué dans le calcul de $\cot^4(a^5)$ ?
Réponse : Le coq, parce que chaque matin, il répète : cot(cot(cot(cot(aaaaa)))) !



**Stefan Banach (1892-1945)** — Mathématicien du jour

Mathématicien polonais. Il est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Il est à l'origine, avec Alfred Tarski, du Paradoxe de Banach-Tarski qui par la simplicité apparente de son énoncé, (il est possible de couper une boule de $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux et de ré-assembler ces morceaux pour former deux boules identiques à la première, à une isométrie près) est étrange dans sa conclusion. Ses autres travaux touchent à la théorie de la mesure de l'intégration, de la théorie des ensembles et des séries orthogonales.

**Exo 1** $N : (x, y) \mapsto |5x + 3y|$ est-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$ ?

**Exo 2** On définit sur $\mathbb{R}^2$ les 3 applications suivantes :

$$N_1((x,y)) = |x| + |y|,\ N_2((x,y)) = \sqrt{x^2+y^2},\ N_\infty((x,y)) = \max(|x|,|y|).$$

1. Prouver que $N_1$, $N_2$, $N_3$ définissent 3 normes sur $\mathbb{R}^2$.
2. Prouver que l'on a : $\forall \alpha \in \mathbb{R}^2,\ N_\infty(\alpha) \leq N_2(\alpha) \leq N_1(\alpha) \leq 2N_\infty(\alpha)$.
3. $N_1$, $N_2$ et $N_3$ sont-elles équivalentes ?
4. Dessiner les boules units fermes associes ces normes.

**Exo 3** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Pour $P$ élément de $E$, on pose :

$$\|P\| = |P(0)| + |P(1)| + |P(2)| + |P(3)|$$

1. démontrer que $\|.\|$ est une norme.
2. Soit $\varphi$ l'application de $E$ dans $E$ définie par : $\varphi(P)(X) = P(X+2)$. Vérifier que $\varphi$ est linéaire, continue et calculer sa norme subordonne.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 4**

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans cet espace.

   Indication : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $A + \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}, \cdots, \frac{p}{n}\right)$ soit racines simples.

2. Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré $p$. Montrer que les racines de $P$ sont toutes dans le disque fermé $D$ de centre 0 et de rayon $R = \max\{1, pM\}$, avec $M = \max\limits_{0 \leq i \leq p-1} |a_i|$.

3. On se propose de montrer dans cette question que l'ensemble des polynômes de degré $p$ unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.

   Soit $P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)}X^{p-1} + \cdots + a_1^{(n)}X + a_0^{(n)}$ une suite de polynômes unitaires de degré $p$ scindés sur $\mathbb{R}$ qui vers un certain polynôme $P = \sum\limits_{i=0}^{p} a_iX^i$.

   a. Montrer que : $\lim\limits_{n \to \infty} a_i^{(n)} = a_i$ pour tout $i \in [\![0, p]\!]$

   b. Dire pourquoi $a_p = 1$.

   c. Pour tout entier naturel $n$, notons $Z_n = (z_1^{(n)}, \cdots, z_p^{(n)})$ une liste des zéros (supposés réels) du polynôme $P_n$ pris dans un ordre arbitraire, mais bien sûr comptés avec leurs multiplicités.
   Montrer que la suite $(Z_n)$ admet une suite extraite $(Z_{\varphi(n)})$ convergente, de limite $Z = (z_1, \cdots, z_p)$.

   d. En déduire que $\prod\limits_{i=1}^{p}(X - z_i)$.

   e. Conclure

4. Montrer que dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans celui des matrices trigonalisables.

**Exo 5**

Soit $a, b > 0$. On pose, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$.

1. Prouver que $N$ est une norme. Dessiner sa boule unité.

2. Déterminer le plus petit nombre $p > 0$ tel que $N \leq p\|.\|_2$ et le plus grand nombre $q$ tel que $q\|.\|_2 \leq N$.

**Exo 6**

On définit $E = \{f \in C^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0\}$. Soient $\|.\|$ et $N$ les deux applications définies sur $E$ par

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \text{ et } N(f) = \sup_{x \in [0,1]} \left|f''(x)\right|$$

1. Montrer que ces deux applications sont des normes sur $E$.

2. Sont-elles équivalentes ?

**Exo 7**

Soit $E$ le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications de classe $C^2$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $N_1$, $N_2$ $N_3$ les applications de $E$ dans $\mathbb{R}$ définies par : $N_1(f) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $N_2(f) = |f(0)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |f'(x)|$, $N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup\limits_{x \in [0,1]} |f''(x)|$.
Montrer que $N_1$, $N_2$ et $N_3$ sont des normes sur $E$ et les comparer.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 8** On définit sur l'espace vectoriel $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ les applications $\gamma_1$ et $\gamma_2$ par

$$\gamma_1(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)| \text{ et } \gamma_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)|\, dx$$

1. Montrer que $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont des normes sur $E$.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite de fonctions dfinie par $\begin{cases} f_n(x) = 1 - nx \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \\ f_n(x) = 0 \text{ si } \dfrac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$.

   Étudier la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ dans $(E, \gamma_1)$ dans $(E, \gamma_2)$. Conclusion ?

**Exo 9** On définit une application sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant

$$N(A) = n \max_{i,j} |a_{i,j}| \text{ si } A = (a_{i,j}).$$

Vérifier que l'on définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, c'est–dire que

$$N(AB) \le N(A)N(B) \text{ pour toutes matrices } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

**Exo 10** Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Que peut-on dire de la suite $6^n A^n$ ? (on commencera par calculer $P^{-1}AP$).

2. Etudier la convergence de la srie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{6^n}{n} A^n$.

**Exo 11** Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur $E$ trois normes par, si $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} a_i X^i$ :

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

1. Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Sont-elles équivalentes deux deux ?

**Exo 12** $E = \mathbb{R}[X]$ et si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\| P \| = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} | a_k |$

1. Montrer que $(E, \|\,\|)$ est un espace vectoriel normé .

2. On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que la suite $P_n$ est de Cauchy dans $E$.

3. Converge-t-elle dans $E$ ?

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 13** $E = \mathbb{R}[X]$ et si $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\| P \| = \sup_{t\in[0,1]} | P(t) - P'(t) |$

1. Montrer que $(E, \| \|)$ est un espace vectoriel normé .
2. On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que la suite $P$ est de Cauchy dans $E$.
3. Converge-t-elle dans $E$ ?

**Exo 14** Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}, \qquad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\}, \qquad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\},$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}, \qquad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\},$$

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - \exp(\sin y) \leq 12\right\}, \qquad H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \ln |x^2 + 1| > 0\}.$$

**Exo 15** On définit un sous-ensemble $A$ de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $A$.

**Exo 16** Soit $E$ un espace vectoriel normé.

1. Soit $C$ une partie convexe de $E$. Prouver que $\overline{C}$ est aussi convexe.
2. Soit $V$ un sous-espace vectoriel de $E$.
   a. Montrer que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel de $E$.
   b. Si de plus $E$ est de dimension finie, montrer que $V$ est fermé.
   c. Montrer que si $\mathring{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.
3. Soit $H$ un hyperplan de $E$, montrer que $H$ est soit dense soit fermé dans $E$.

**Exo 17** Donner un exemple d'ensemble $A$ tels que : $A$, l'adhérence de $A$, l'intérieur de $A$, l'adhérence de l'intérieur de $A$ et l'intérieur de l'adhérence de $A$ sont des ensembles distincts deux à deux.

**Exo 18** Soit $A$ une partie d'un espace vectoriel normé $E$. On rappelle que la frontière de $A$ est l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} - \mathring{A}$. Montrer que :

1. $Fr(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap C_E^A \neq \emptyset\}$
2. $Fr(A) = Fr(C_E^A)$
3. $A$ est fermé si et seulement si $Fr(A)$ est inclus dans $A$.
4. $A$ est ouvert si et seulement si $Fr(A) \cap A = \emptyset$.

**Exo 19** Distance à une partie

Soit $E$ un espace vectoriel normé. Soit $A$ une partie non vide et bornée de $E$.
On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|y-x\|, x, y \in A\}$.

1. Montrer que si $A$ est bornée, alors $\overline{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont bornés.

2. Comparer $\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(\mathring{A})$ et $\mathrm{diam}(\overline{A})$ lorsque $\mathring{A}$ est non vide.
   a. Montrer que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.
   b. Soit $x$ un élément de $A$, et $u$ un élément de $E$ avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   c. En déduire que toute demi-droite issue d'un point $x$ de $A$ coupe $\mathrm{Fr}(A)$.
   d. En déduire que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{diam}(A)$.

**Exo 20**

Soit $E$ un espace vectoriel normé. On munit $\mathcal{L}_c(E)$ de la norme des applications linéaires. Soit $f \in \mathcal{L}_c(E)$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $f$. Montrer que $|\lambda| \leq \|f\|$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 21

## Topologie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 On se propose de montrer que l'ensemble $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a Dire pourquoi l'application $\det: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$ est continue.

b En déduire que $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}(()A) = \{0\}$, montrer que la suite $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A$.

d Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{sp}(()A) \neq \{0\}$ et soit $\varepsilon = \min\{|\lambda|,\ \text{tel que } \lambda \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{0\}\}$.

i Justifier que $\varepsilon$ existe.

ii Montrer que la suite $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k\geq \frac{1}{\varepsilon}+1}$ est une suite à valeurs dans $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers $A$.

2 Montrer que l'application $\det: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ A & \longmapsto & \chi_A(X) \end{array}$ est continue.

3 **Application** Soient $A$ et $B$ deux matrices réelles d'ordre $n$.

a On suppose $A$ inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

b Montrer que ce résultat subsiste si on se suppose plus $A$ inversible.

4 Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un compact.

5 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note par $\mathrm{sp}(A)$ le $n$-uplet formé par les valeurs propres de $A$ comptées avec leurs multiplicités.

a Montrer que l'application $\mathrm{Sp}: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ A & \longmapsto & \mathrm{sp}(A) \end{array}$ est continue.

b Soit $A$ matrice carré, on pose $\mathrm{sp}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\varepsilon = \min\{\frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{2}$ tel que $\lambda_i \neq \lambda_j\}$. Montrer que pour tout entier $k$ tel que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$, on a $A - \mathrm{diag}(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+n}$ est à racines simples.

c En déduire que l'ensemble des matrices à racines simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 22 Somme et topologie. Soit $E$ un espace vectoriel normé , et $A$ et $B$ deux parties de $E$. On définit :

$$A+B=\{z\in E;\ \exists x\in A,\ \exists y\in B,\ z=x+y\}.$$

1. Montrer que si $B$ est ouvert, alors $a+B$ est ouvert pour tout $a\in A$.

2. En déduire que la somme de deux ouverts est un ouvert.

3. Montrer qu'en général, la somme d'un ouvert avec une partie quelconque est un ouvert.

4. Si $A$ est fermé et $B$ compact, montrer que $A+B$ est fermé.

5. On rappelle qu'un sous groupe de $(\mathbb{R},+)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a\in\mathbb{R}^*$, soit dense dans $\mathbb{R}$.
   a. On suppose $a\neq 0$. Étudier la continuité en 0 de l'application $x\mapsto E\left(\dfrac{x}{a}\right)$.
   b. En déduire que $a\mathbb{Z}$ est fermé.
   c. Donner un exemple de parties fermés dont la somme n'est pas fermée.

6. Si $A$ est fermé et $B$ complet, montrer que $A+B$ est complet.

Exo 23 Soit $E$ un $\mathbb{R}$—espace vectoriel normé de dimension finie, et $K$ un compact de $E$ tel que $0\in\overset{\circ}{K}$. On note $H$ l'ensemble des $u\in\mathcal{L}(E)$ tels que $u(K)\subset K$. Montrer que pour tout $u\in H$, on a $|\det u|\leq 1$

Exo 24 Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{array}{ll} A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^4=1\} & B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^5=2\}\\ C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+xy+y^2\leq 1\} & D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+8xy+y^2\leq 1\}\\ E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y^2=x(1-2x)\}. & \end{array}$$

Exo 25 Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)$ une suite convergente de $E$ et soit $x$ sa limite. Montrer que l'ensemble : $A=\{x\}\cup\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est compact.

Exo 26 Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}^d$. Pour $n\geq 1$, on pose $A_n=\{u_p;\ p\geq n\}$.

1. démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est : $V=\displaystyle\bigcap_{n\geq 1}\overline{A_n}$.

2. En déduire que si la suite est borne, $V$ (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.

Exo 27 Soit $A$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $(x_n)$ une suite de $A$ n'admettant qu'une seule valeur d'adhrence. Montrer que $(x_n)$ converge.

Exo 28 Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\lim_{\|x\|\to\infty}\|f(x)\|=+\infty$. Montrer que $f$ admet un minimum.

Exo 29 Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M>0,\ \exists R>0$ tel que $\|x\|>R\implies|f(x)|>M$.

2. Pour toute partie bornée $B$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie borne de $\mathbb{R}^n$.

3. Pour toute partie compacte $K$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

**Exo 30** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E$. On suppose que $(x_n)$ est de Cauchy. Montrer qu'elle converge si et seulement si elle admet une sous-suite convergente.

**Exo 31** Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et $A$ une partie non vide de $E$. On définit la distance d'un élément $x_0$ de $E$ à une partie $A$ de $E$, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x\in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons $A$ compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.

2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que $A$ est fermé. (On remarquera que pour toute partie $B$ de $A$ on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)

3. Montrer que l'application qui à $x_0$ associe $d(x_0, A)$ est continue sur $E$ (sans aucune hypothèse sur $A$).

4. En déduire que si $A$ est un fermé de $E$ et $B$ un compact de $E$ tels que $A$ et $B$ sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$

5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que $A$ et $B$ sont deux fermés disjoints.

**Exo 32** Soit $E$ un espace vectoriel normé. Montrer que ($E$ est complet)$\Leftrightarrow$ (toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \|u_{n+1} - u_n\| \leq \dfrac{1}{2^n}$ est convergente).

**Exo 33** Soit $X$ un ensemble. On note $B(X, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornes de $X$ dans $\mathbb{R}$. On munit $B(X, \mathbb{R})$ en posant $\forall f \in B(X, \mathbb{R}), \ \ \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$.
Muni de cette norme, montrer que $B(X, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

**Exo 34** Soit $E$ un espace vectoriel normé, $F$ un espace de Banach, et $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de $E$ dans $F$, muni de la norme des applications linéaires : $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.
Montrer que $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace de Banach.

Exo 35 Problème du point fixe.

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$. On rappelle qu'une application $g$ de $E$ dans $E$ est dite contractante s'il existe $K \in ]0,1[$ tel que

$$\|g(x) - g(y)\| \leq K\|x - y\| \qquad \forall x, y \in E.$$

1. Montrer que toute application contractante admet un unique point fixe.
Soit $f$ une application de $E$ dans $E$ telle qu'il existe un entier $n$ tel que $f^n$ soit contractante. On note $x_0$ le point fixe de $f^n$.

2. Montrer que tout point fixe de $f$ est un point fixe de $f^n$.

3. Montrer que si $x$ est un point fixe de $f^n$, il en est de même pour $f(x)$.

4. En déduire que $x_0$ est l'unique point fixe de $f$.

5. Soit $X$ et $F$ deux parties d'un espace vectoriel normé, $F$ étant une partie complète. On considère une application $F : X \times E \to E$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ continue, et $k$-contractante en la seconde variable, c'est–dire qu'elle existe $k \in ]0,1[$ tel que :

$$\forall \lambda \in X,\ \forall (x, y) \in E^2,\ \|F(\lambda, x) - F(\lambda, y)\| \leq k\|x - y\|.$$

a. Montrer que, pour tout $\lambda \in X$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $F(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$.

b. Montrer ensuite que l'application $X \to E$, $\lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

c. Montrer que le système $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 &= \dfrac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{cases}$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

6. Soit $E$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

a. Montrer que $f$ admet un unique point fixe (que l'on notera $\alpha$).

b. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement $E$ complet ?

7. $\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que

$$\exists \alpha \in ]0; \frac{1}{2}[,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

a. Montrer que $f$ admet au plus un point fixe.

b. On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.

i. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leqslant \dfrac{\alpha}{1 - \alpha}\|u_{n+1} - u_n\|$.

ii. Montrer que la suite $u$ est de Cauchy.

iii. Conclure.

Exo 36

Une fonction $f$ définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite localement lipschitzienne si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage $V_x$ de $x$ et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y,z) \in A \cap V_x, \ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte $K$ de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne

Exo 37

Théorème des fermés emboités

Soit $E$ un espace vectoriel normé complet. Montrer que l'intersection d'une suite décroissante $(F_n)$ de parties fermées non vides et bornées de $E$ dont le diamètre tend vers 0 a une intersection non vide.

Exo 38

Théorème de Baire

Soit $E$ une partie complète d'un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $E$ est dense dans $E$. Attention, ce n'est pas nécessairement un ouvert !

2. Que dire de la réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide ?

Exo 39

1. Montrer que toute forme quadratique en dimension finie est continue.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que l'application $q: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXMX \end{array}$ est continue.

3. En déduire que toute matrice (ou forme quadratique) définie est soit définie positive, soit définie négative.

4. En déduire la forme générale de la signature d'une forme quadratique définie.

Exo 40

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\}, \ \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur $E$. Montrer que

$$\forall f \in E, \ \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty.$$

En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exo 41

Soit $N$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ : $(x,y) \mapsto \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

1. Montrer que $N$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. La comparer la norme euclidienne. Expliquer.

Exo 42

Soit $E$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, de $\mathcal{C}^2$ sur [0,1] et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace les deux normes suivantes :

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \text{ et } N_2(f) = \|f'\|_\infty.$$

1. Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f)$. En déduire que l'application identique de $(E, N_2)$ vers $(E, N_1)$ est continue.

2. A l'aide de la fonction $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$, montrer que l'application identique de $(E, N_1)$ vers $(E, N_2)$ n'est pas continue.

**Exo 43** On note $E$ l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On définit sur $E$ les deux normes suivantes :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [-1,1]\}.$$

On se propose de montrer que les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.

1. Le but de cette question est de démontrer que $(E, \|.\|_\infty)$ est complet. Soit $(f_n)$ une suite de Cauchy $(E, \|.\|_\infty)$.

   a. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, la suite $(f_n(x))$ converge dans $\mathbb{C}$, on note $f(x)$ sa limite. Que peut-on dire de la convergence de $(f_n)$ vers $f$.

   b. Montrer que la convergence de $(f_n)$ vers $f$ est uniforme.

   c. Conclure

2. Le but de cette question est de démontrer que $(E, \|.\|_2)$ n'est pas complet. Pour cela, on définit la suite de fonctions $(f_n)$ en posant :

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

   dont on va montrer que c'est une suite de Cauchy de $(E, \|.\|_2)$ sans que ce soit une suite convergente.

   a. Faire un dessin et vérifier que $f_n \in E$.

   b. Montrer que pour $1 \leq n \leq p$, on a :

$$\|f_n - f_p\|_2 \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

   En déduire que la suite $(f_n)$ est de Cauchy dans $(E, \|.\|_2)$.

   c. Supposons que la suite $(f_n)$ converge vers $f$ dans $(E, \|.\|_2)$. Montrer que pour tout $t \in ]0,1]$, on a $f(t) = 1$. Que doit valoir $f$ sur $[-1,0[$

   d. Conclure.

3. L'application linéaire $T : E \to \mathbb{C},\ f \mapsto f(0)$ est elle continue si on munit $E$ de $\|.\|_\infty$ ? si on munit $E$ de $\|.\|_2$ ?

**Exo 44**

On note $\ell^1$ l'espace vectoriel des suites $x = (x(k))_{k\in\mathbb{N}}$ réelles vérifiant :

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k)| < +\infty.$$

On admettra que l'on définit ainsi une norme sur $\ell^1$. On cherche prouver que $\ell^1$ est un espace de Banach. Soit donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^1$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, l \geq N(\varepsilon)$, alors : $\|x_n - x_l\| \leq \varepsilon$.

1. Montrer qu'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tous $n, l \geq N(\varepsilon)$ $|x_n(k) - x_l(k)| \leq \varepsilon$.

2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n(k)$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{k\geq K} |x_{N(\varepsilon)}(k)| \leq \varepsilon$.

4. Montrer que pour tout $L \geq K$, on a : $\sum\limits_{K\leq k\leq L} |x(k)| \leq 2\varepsilon$.

5. En déduire que l'on a $x \in \ell^1$, et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$.

À la prochaine

.

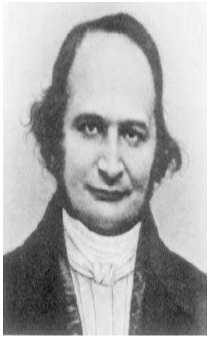
Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices
# Calcul Différentiel

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

C'est l'histoire de deux belles fonctions $f$ et $g$ définies sur un intervalle $I$, telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.
– Regardez-moi, comme je suis belle ! dit $g(x)$.
– Oui mais tu as tout copié sur moi... répond $f(x)$.
– $g$, vexée, revient le lendemain, relookée et habillée en $x+h$.
– Salut, lance $g(x+h)$.
– Mais, qu'est ce que tu as ? demande $f(x)$.
– Bah j'essaie de me différentier...



Charles Gustave Jacob Jacobi, (1804-1851)

Mathématicien du jour

Mathématicien allemand. Il obtient son doctorat l'âge de 21 ans. Jacobi a écrit le traité classique sur les fonctions elliptiques, d'une importance capitale en physique mathématique. Il est l'un des fondateurs de la théorie des déterminants. En particulier, on lui doit le déterminant de la matrice (dite jacobienne) qui est crucial dans le calcul infinitésimal, et qui joue un rôle important dans la résolution de problèmes non-linaires et en robotique.

## 1 Dérivées partielles.

**Exo 1** Différentielle d'une forme quadratique.

1. Soit $q$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et $f$ la forme bilinéaire symétrique associée. Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ dq_{\vec{x}}(\vec{y}) = 2f(\vec{x}, \vec{y})$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en déduire la différentielle de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & {}^tXMX \end{array}$

**Exo 2** Différentielle du déterminant.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det M \end{array}$

1. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que l'on a pour $M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :
$$df_M(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{com}(M).H)$$

2. Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P_M(X) = (-1)^n X^n + \cdots + a_1 X + \det(M)$. Montrer $a_1 = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(A))$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 3** Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré $n$ et à racines réelles simples.

1. Montrer que $\mathcal{U}$ est ouvert dans $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Pour $P \in \mathcal{U}$ on note $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ les racines de $P$.
Montrer que l'application $P \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

**Exo 4** Résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) suivantes, préciser le domaine de validité des solutions :

1. $2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 3\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$ avec la condition aux limites : $f(t,t) = t,\ \forall t \in \mathbb{R})$.
Indication : Étudier $\varphi : t \mapsto f(a+bt, a+ct)$ avec $a, b, c$ bien choisis.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = a$ où $a$ est une constante réelle donne.
Indication : On utilisera le changement de variable : $u = x+y$, $v = x-y$.

3. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, en posant $u = xy,\ v = \dfrac{x}{y}$.

4. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} = -y\dfrac{\partial f}{\partial y}$, en posant $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$.

5. $y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2f$, en posant $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$.

6. $2xy\dfrac{\partial f}{\partial x} + (1+y^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, en utilisant, par exemple, le changement de variable : $x = \dfrac{u^2+v^2}{2}$ et $y = \dfrac{u}{v}$.

7. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = \alpha(\alpha-1)f$ où $\alpha$ est un réel fixé, $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$.
On posera $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$.

8. $x^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 0$.
On utilisera le changement de variables : $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$.

**Exo 5** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ non tous nuls. On considère l'équation aux drives partielles :

$$(*) \quad a\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + b\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 0$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ distincts, fixés. On fait le changement de variable : $u = x+\alpha y$, $v = x+\beta y$.

1. Écrire l'équation déduite de $(*)$ par ce changement de variable.

2. En déduire que l'on peut ramener $(*)$ à l'une des trois formes réduites :

$$(1) : \frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v} = 0, \qquad (2) : \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2} = 0, \qquad (3) : \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2} + \frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2} = 0.$$

**Exo 6** Laplacien.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} \quad \text{laplacien de } f.$$

**1** Laplacien en coordonnes polaires.

On pose $g(\rho, \theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

a) Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial \rho}, \dfrac{\partial g}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 g}{(\partial \rho)^2}, \dfrac{\partial^2 g}{(\partial \theta)^2}$ en fonction des drives partielles de $f$.

b) Exprimer $\Delta f$ en fonction des drives de $g$.

**2** Laplacien en coordonnes sphériques.

Soient $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) & \longmapsto & (x = r\cos\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\cos\varphi, z = r\sin\varphi) \end{array}$$

et $F = f \circ \Phi$. On pose $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial z)^2}$ laplacien de $f$.

vérifier que : $(\Delta f) \circ \Phi = \dfrac{\partial^2 F}{(\partial r)^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 F}{(\partial \varphi)^2} - \dfrac{\tan\varphi}{r^2}\dfrac{\partial F}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{r^2\cos^2\varphi}\dfrac{\partial^2 F}{(\partial \theta)^2}$.

Pour cet exercice, il est conseillé de prendre la feuille dans le sens de la longueur, et d'y aller calmement, en vérifiant ses calculs.

**3** Laplacien en dimension $n$.

Soit $f$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$.
On définit une application $F$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$F(x_1, \ldots, x_n) = f(\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2})$. Calculer le laplacien $(\Delta F = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{(\partial x_i)^2})$ de $F$ en fonction de $f$.

**4** Les isométries conservent le laplacien.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une isométrie pour la norme $\|.\|_2$.

a) Montrer que la matrice jacobienne de $\varphi$ est constante, égale à la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la partie linaire de $\varphi$.

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que $(\Delta f) \circ \varphi = \Delta(f \circ \varphi)$.

**5** Soit $u$ une fonction réelle des variables réelles $x$ et $y$ définie par $u(x, y) = (F \circ r)(x, y)$ o $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $F$ est une fonction réelle d'une variable réelle.

On pose : $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

a) Calculer : $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}$. En dduire que $\Delta u = F''(r) + \dfrac{F'(r)}{r}$.

b) En déduire $\Delta u$ lorsque $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 7** Fonctions harmoniques.

Une fonction $f$ réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U$ est dite harmonique si elle vérifie l'EDP suivantes : $\dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} + \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2} = 0$, i.e. $\Delta f = 0$.

1. Les polynômes complexes sont harmoniques .

   Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que la fonction complexe $f$ définie par $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,y) & \longmapsto & P(x+iy). \end{array}$ est harmonique.

2. Soit $f : ]-1,1[ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère $g : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f\left(\dfrac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right). \end{array}$

   déterminer $f$ pour que $g$ soit harmonique.

3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

   Soit $F \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & F(u,v) \end{array}$ et $f$ définie par : $f(x,y) = F(u,v)$.

   Montrer que $F$ harmonique entraîne que $f$ est harmonique.

**Exo 8** Matrice Hessienne et changement de variables affine.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application affine.

1. Montrer que la matrice jacobienne, $J$, de $\varphi$ est constante.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) & \dfrac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b) \end{pmatrix}$$ matrice Hessienne de $f$ au point $(a,b)$.

   Montrer que : $H_{f\circ\varphi}(a,b)) = {}^tJ.H_f(\varphi(a,b)).J$

**Exo 9** Contre-exemples au théorème de Schwarz.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $\pi$-périodique de classe $\mathcal{C}^2$.

   On pose pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $g(x,y) = r^2 f(\theta)$ avec $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

   a. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,0)$ en fonction de $f$.

   b. En déduire les valeurs de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$.

   c. Construire un exemple précis (donner $g(x,y)$ en fonction de $x$ et $y$) pour lequel ces deux drives sont distinctes.

2. (Centrale MP 2003)

   Soit $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$.

   a. Étudier la continuité de $f$ et de ses dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$.

   b. Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

**Exo 10** Formule de Leibniz.

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$. Montrer que

$$\frac{\partial^n(fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}.\frac{\partial^{n-i-j} g}{\partial x^{k-i}\partial y^{n-k-j}}.$$

**Exo 11** $\mathcal{C}^1$-difféomorphismes.

1. a. Montrer que $f(x,y) = (x+y, xy)$ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $U$ sur $V$ où $U$ et $V$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

   b. Chercher l'expression de $f^{-1}$ et vérifier que le produit des matrices jacobiennes est gal $\mathbf{I}$.

2. Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (e^{2y}+e^{2z}, e^{2x}-e^{2z}, x-y). \end{array}$

   Montrer que $f$ induit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur un ouvert à préciser.

**Exo 12** Inégalités de Taylor-Lagrange.

Soit $U$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont les dérivées secondes sont bornées : $\forall\, i,j,\ \forall\, A \in U,\ \left|\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)\right| \leq M.$

1. Montrer que : $\forall\, A, B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_A(\overrightarrow{AB})\right| \leq \dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{2}.$

2. Montrer que : $\forall\, A, B \in U,\ \left|f(B) - f(A) - df_C(\overrightarrow{AB})\right| \leq \dfrac{M\|\overrightarrow{AB}\|_1^2}{4}$ où $C$ est le milieu de $[A, B]$.

# 2 Étude des extremums.

**Exo 13** Chercher les extremums des fonctions $f(x,y)$ suivantes :

1. $3xy - x^3 - y^3$
2. $-2(x-y)^2 + x^4 + y^4$
3. $x^2y^2(1+3x+2y)$
4. $2x + y - x^4 - y^4$
5. $\dfrac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y \geq 0$
6. $xe^y + ye^x$
7. $x(\ln^2 x + y^2)$, $x > 0$
8. $\sqrt{x^2+(1-y)^2} + \sqrt{y^2+(1-x)^2}$

**Exo 14** Pour $x > 0$ on pose $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $a \in ]0, \frac{1}{e}[$.
2. Sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ on pose $f(x,y) = x(\ln(x) + x + y^2)$ déterminer le point critique.
3. Vérifier que $f$ admet un minimum relatif en ce point et que : $\min f = -a(a+1)$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 15** Soit $\lambda > 1$, on pose $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 0\}$ et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x > 0, y \neq 0\}$, on se propose d'étudier les extremums de la fonction $f(x,y) = x^\lambda y - y^2 - y\ln(x+1) + 1$.

1. Pour $x > 0$ on pose $h(x) = x^\lambda - \ln(x+1)$, montrer que l'équation $h'(x) = 0$ admet une seule solution $b \in ]0,+\infty[$.
2. On pose $h(b) = 2c$, montrer que $c < 0$.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution $a \in ]0,+\infty[$ et que $a > b$.
4. Déterminer les points critiques de $f$, (on les exprimera en fonction de $a, b, c$)
5. Montrer que $f$ admet un seul extremum, que l'on précisera.

**Exo 16** Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes : $g_1(x,y) = f(y,x)$ , $g_3(x,y) = f(y, f(x,x))$.
2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $h_1(x) = f(x,x)$ , $h_2(x) = f(x, f(x,x))$
3. Calculer les dérivées des fonctions suivantes : $h_1(x) = f(u(x), v(x))$ , $h_2(x) = f(u(x), f(v(x), w(x)))$ où $u, v, w$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

**Exo 17** Distances aux sommets d'un triangle.

Soit $A \in \mathbb{R}^p$ fixé, $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM^2 \end{array}$ et $g\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$ (distance euclidienne)

1. Calculer les gradients de $f$ et $g$ en un point $M$.
2. Soient $A, B, C$ trois points non alignés du plan. Trouver les points $M$ du plan réalisant le minimum de :
   - a $MA^2 + MB^2 + MC^2$.
   - b $MA + MB + MC$.
   - c $MA.MB.MC$.

**Exo 18** Aire maximal d'un triangle.

Soit $ABC$ un triangle de cotés $a, b, c$.

1. Calculer l'aire, $S$, de $ABC$ en fonction de $a, b, c$.
2. Montrer que $\dfrac{S}{a^2+b^2+c^2}$ est maximal lorsque $ABC$ est équilatral.

**Exo 19** Loi de réfraction.

Soient dans $\mathbb{R}^2$ : $A = (a,0)$, $B = (b,-c)$ et $M = (x,0)$ $(a,b,c > 0)$. Un rayon lumineux parcourt la ligne brisée $AMB$ à la vitesse $v_1$ de $AM$ et $v_2$ de $MB$. On note $\alpha_1 = \widehat{(\vec{j}, \overrightarrow{MA})}$ $\alpha_2 = \widehat{(-\vec{j}, \overrightarrow{MB})}$.

1. Faire une figure.
2. Montrer que le temps de parcours est minimal lorsque $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

mamouni.new.fr
Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

# 3 Applications du théorème des fonctions implicites.

Exo 20

1. On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1 + 2x + y$. Donner la tangente cette courbe et la position par rapport la tangente au point $(0, 0)$.

2. Montrer que l'équation : $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit au voisinage de $0$ une fonction implicite : $y = \varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.
Donner le DL de $\varphi$ en $0$ l'ordre $3$.

3. Montrer que l'égalité $2e^{x+y} + y - x = 0$ définit $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1, -1)$.
Calculer $\varphi'(1)$ et $\varphi''(1)$.

4. Soit $f(x, y) = x \ln x - y \ln y,\ x, y > 0$.
Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère la courbe $\gamma_k$ d'équation $f(x, y) = k$.
   - a Suivant la position de $(a, b) \in \gamma_k$, préciser l'orientation de la tangente $\gamma_k$ en $(a, b)$.
   - b Dresser le tableau de variations de $\phi(t) = t \ln t$.
   - c Dessiner $\gamma_0$. (Étudier en particulier les points $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\right)$ à l'aide de DL)
   - d Indiquer l'allure générale des courbes $\gamma_k$ suivant le signe de $k$.

5. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de de classe $\mathcal{C}^1$.
   - a Montrer que, sous une condition préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement $z$ fonction implicite de $x$ et $y$.
   - b Montrer que l'on a alors : $\dfrac{\partial z}{\partial x} + z\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

FIN

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Espaces vectoriels euclidiens

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

Alors c'est Logarithme et Exponentielle qui sont dans une fête, Logarithme s'éclate comme une folle, elle se fait des amis, elle est mega sociable et tout. Exponentielle, elle, est toute triste assise dans son coin, alors logarithme va la voir et lui dit : "bah kesta, t'es toute triste, vient t'amuser avec nous... -bof, tu sais moi, que je m'intègre ou que je m'intègre pas, le résultat est le même"

**Jorgen Pedersen Gram (1850-1916)**

Mathématicien du jour

Actuaire et mathématicien danois, très connu à l'aide procède de Gram-Shmidt. Son nom est aussi lié aux travaux sur la fameuse fonction zêta de Riemann.
Gram était le premier mathématicien à une théorie systématique pour l'étude des courbes de fréquence obliques, prouvant que la courbe gaussienne symétrique normale était juste un cas spécial d'une classe plus générale des courbes de fréquence. Il est mort après avoir été heurté en une bicyclette.

**Exo 1** Donner dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la projection orthogonale sur : $F = \mathbf{Vect}(e_1 + 2e_2 + e_3, e_3)$.

**Exo 2** .

1. Reconnaitre les endomorphismes dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Complétez la matrice

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & . \\ -2 & 6 & . \\ 3 & . & . \end{pmatrix}$$

pour que $A$ soit une matrice orthogonale positive.

**Exo 3** Soit $u$ un vecteur unitaire de matrice $U$ dans une base orthonormée $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $U^tU$ est la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur Vect$(u)$.

2. Trouver la matrice de la symétrie associée.

**Exo 4** $E$ désigne un espace euclidien de dimension $n$.
Soit $f : E \to E$ une application non nécessairement linéaire.

1. On suppose que $f$ conserve le produit scalaire.
Démontrer que $f$ est linéaire.

2. On suppose que $f$ conserve les distances.
Démontrer que $f = f(0_E) + g$ , avec $g \in \mathcal{O}(E)$.

Mamouni My Ismail
*mamouni.new.fr*
*mamouni.myismail@gmail.com*

**Exo 5** Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$ : $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.
Déterminer $\lambda$ pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaitre alors $f$.

**Exo 6** Montrer que les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui conservent le produit vectoriel sont exactement les rotations.

**Exo 7** Soit $E$ espace vectoriel euclidien, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'éléments $E$, tous unitaires telle que :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e_i}\right)^2 \quad \forall x \in E$$

Montrer que c'est une base orthonormale directe de $E$.

**Exo 8** Inversion

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. On pose pour $\vec{x} \neq \vec{0}$ : $i(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1. Montrer que $i$ est une involution et conserve les angles de vecteurs.

2. Vérifier que : $\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|i(\vec{x}) - i(\vec{y})\| = \dfrac{\|\vec{x} - \vec{y}\,\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\,\|}$.

**Exo 9** Projection sur un hyperplan

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $H$.

**Exo 10** Formule du produit mixte .

Montrer que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ on a :

$$x \wedge (y \wedge z) = \left(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{z}\right) y - \left(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y}\right) z$$

**Exo 11** Division vectorielle.

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

1. Soient $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs donns, $\vec{a} \neq \vec{0}$.
Étudier l'équation : $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$.
Indication : On cherchera une solution particulière de la forme $\vec{x} = \vec{a} \wedge \vec{y}$.

2. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs donnés Trouver $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tels que

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{a} \wedge \vec{b} \\ \vec{v} &= \vec{b} \wedge \vec{c} \\ \vec{w} &= \vec{c} \wedge \vec{a} \end{aligned}$$

Indication : calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

**Exo 12** Polynômes de Laguerre :

On pose pour entier, $n$ et réel, $x$ : $L_n(x) = (-1)^n e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$

1. Montrer que $L_n$ est un polynôme, préciser son degré, ainsi que son coefficient dominant.

2. Donner $L_0, L_1, L_2$.

3. Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonctions polynomiales, on pose $\left(\overrightarrow{f} | \overrightarrow{g}\right) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$.
Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire.

4. Montrer que si $k < n$ alors $\left[(x^n e^{-x})^{(k)}\right](0) = 0$.

5. En déduire que pour tout $k < n$ on a : $< L_k, L_n >= 0$, puis que $(L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale.

6. Pour tout entier $k$ ,on pose $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt$, justifier l'existence de cet intégrale, puis base orthonormale directe de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. En déduire $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t^2 + at + b)^2 e^{-t}dt$.

**Exo 13** Polynômes de Tchebychev :

On pose pour $n$ entier et $-1 \leq x \leq 1$, $T_n(x) = \cos(n\mathrm{Arccos}(x))$.

1. Montrer que $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.

2. Pour tous $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continues, on pose :

$$\left(\overrightarrow{f} | \overrightarrow{g}\right) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

Montrer que cet intégrale existe et qu'ainsi on muni $\mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire.

3. Montrer que la famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille orthogonale.

**Exo 14** Inégalité de Ptolémée.

Soit $E$ un espace euclidien. Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1. Montrer que $f$ est une involution, $f^2 = \mathrm{id}_E$ et conserve les angles de vecteurs.

2. Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \dfrac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.

3. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que :
$\|\vec{a} - \vec{c}\|\,\|\vec{b} - \vec{d}\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|\,\|\vec{c} - \vec{d}\| + \|\vec{b} - \vec{c}\|\,\|\vec{a} - \vec{d}\|$.
Indication : se ramener au cas $\vec{a} = \vec{0}$ et utiliser l'application $f$.

**Exo 15** Étude de symétries.

1. Soient $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \perp G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales de bases $F$ et $G$.
Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

2. Soient $F, G$ deux sous-espaces de $E$ tels que $F \subset G$. On note $s_F$ et $s_G$ les symétries orthogonales de bases $F$ et $G$.
Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.

3. Soient $H, K$ deux hyperplans de $E$, et $s_H$, $s_K$ les symétries associes.
Démontrer que $s_H$ et $s_K$ commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

**Exo 16** Étude de projections.

1. Caractérisation des projections orthogonales.
Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$ une projection.
Montrer que :
$p$ est une projection orthogonale $\iff \forall\, \vec{x} \in E,\ \|p(\vec{x})\| \leq \|\vec{x}\|$.

2. Composition de projecteurs.
Soient $F$, $G$ deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien $E$ tels que $F^\perp \perp G^\perp$. On note $p_F$ et $p_G$ les projections orthogonales sur $F$ et sur $G$. Montrer que $p_F + p_G - p_{F\cap G} = \mathrm{id}_E$ et $p_F \circ p_G = p_G \circ p_F = p_{F\cap G}$.

3. Projecteurs commutant
Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $p$, $q$ deux projections orthogonales. Montrer que $p$ et $q$ commutent si et seulement si $(\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q)^\perp \cap \mathrm{Im}\ p$ et $(\mathrm{Im}\ p \cap \mathrm{Im}\ q)^\perp \cap \mathrm{Im}\ q$ sont orthogonaux.

**Exo 17** famille de vecteurs unitaires équidistants.

1. Soit $E$ un espace vectoriel euclidien, et $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre. Démontrer qu'il existe une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ vérifiant : $\begin{cases} \vec{u}_i \text{ est unitaire} \\ \|\vec{u}_i - \vec{u}_j\| = 1 \\ \mathrm{vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_i) = \mathrm{vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i). \end{cases}$

2. Démontrer que toute famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ vérifiant les deux premiers propriétés est libre.

**Exo 18** $F + F^\perp \neq E$

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \displaystyle\int_t^1 fg(t)\,dt$, et $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = 0\}$.
Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
Indication : remarquer que $xf \in F,\ \forall f \in E$.

**Exo 19** Propriétés du produit vectoriel.

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Démontrer que :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}).(\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} \mid \vec{w})(\vec{v} \mid \vec{t}) - (\vec{u} \mid \vec{t})(\vec{v} \mid \vec{w})$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{t} + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]\vec{w}$$

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 20

Matrice de Gram.

Soient $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien $E$ de dimension $n$, et $\text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$ leur matrice de Gram de type $p \times p$, dont les coefficients sont $(\overrightarrow{x_i} | \overrightarrow{x_j})$. On pose $\Gamma(x_1, \dots, x_p) = \det(\text{Gram}(x_1, \dots, x_p))$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale directe de $E$, et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

1

a) Comparer $\text{rg}A$ et $\text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

b) Préciser le type de la matrice $A$, ainsi que ses coefficients.

c) Montrer que ${}^tAA = \text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$.

d) Montrer que $\ker {}^tAA = \ker A$, en déduire que $\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg}\, \text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$.

2

a) Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace $x_k$ par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.

b) Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$.
Montrer que $d(x, F)^2 = \dfrac{\Gamma(x_1, \dots, x_n, x)}{\Gamma(x_1, \dots, x_n)}$.

3

On suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une famille quelconque de $E$, vérifiant la relation suivante :

$$\forall\ cx \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2$$

a) Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$.

b) Démontrer que : $\forall\ x, y \in E,\ (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i)$.

c) On note $G$ la matrice de Gram de $e_1, \dots, e_n$.
Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

4

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une base quelconque de $E$.
Montrer que $\Gamma(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (\det u)^2 \Gamma(e_1, \dots, e_n)$.

5

Soit $A \in matn, p\mathbb{R}$. Montrer que $\det({}^tAA) \geq 0$.

6

Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \dfrac{\pi}{4}$, $(AB, AD) \equiv \dfrac{\pi}{3}$, $(AC, AD) \equiv \dfrac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

7

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases quelconques de $E$. On note $P$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ $\mathcal{B}'$, et $G, G'$ les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre $P$, $G$ et $G'$ ?

8

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $E$, $G$ sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.
Montrer que : $\forall\ \vec{x} \in E,\ \sum_{i,j} a_{ij} (\vec{e}_i \mid \vec{x})(\vec{e}_j \mid \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.

9

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base non orthonormée de $E$, $G$ sa matrice de Gram $f \in \mathcal{L}(E)$ et $M$ sa matrice dans $\mathcal{B}$.

a) Montrer que $f$ est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.

b) Montrer que $f$ est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.

**Exo 21**

1. **Décomposition QR :** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, $P$, et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, $T$, uniques telles que $M = PT$.

2. **Inégalité de Hadamard :** Soit $E$ un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ des vecteurs quelconques.
Démontrer que $|\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})| \leq \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'galité.

**Exo 22** **Famille obtusangle**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien et $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ une famille de vecteurs vérifiant : $\forall\, i \neq j,\ (\vec{u}_i \mid \vec{u}_j) < 0$.

1. Démontrer, par récurrence sur $n$ que $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \geq n - 1$.

2. Si $\operatorname{rg}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = n - 1$, démontrer que toute famille de $n - 1$ vecteurs extraite de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre, et que les composantes dans cette famille du vecteur retiré sont strictement négatives.

**Exo 23** **Théorème de Hanh-Banach.**

Soit $E$ un espace pré hilbertien réel

1. Soit $x_0 \in E$ tel que $x_0 \neq 0_E$, montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$.
   **Indication :** Écrire $E = \mathbb{R}x_0 \oplus H$ où $H$ hyperplan.

2. Soit $x, y \in E$ tel que $x \neq y$, montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

3. Soit $B$ une boule ouverte de $E$ ne contenant pas $\vec{0}$. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in E^*$ telle que : $\forall\, \vec{x} \in B,\ f(\vec{x}) > 0$.

**Exo 24** **Calcul de minimums.**

Justifier l'existence des minimums des fonctions réelles suivantes et préciser comment les calculer.

1. $$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} (\sin x - ax^2 - bx)^2 \, dx. \end{array}$$
   Réponse : $a = \dfrac{20}{\pi^3} - \dfrac{320}{\pi^5}$, $b = \dfrac{240}{\pi^4} - \dfrac{12}{\pi^2}$, $\min = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{8}{\pi} + \dfrac{160}{\pi^3} - \dfrac{1280}{\pi^5}$.

2. $$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 (1 + tx_1 + \dots + t^n x_n)^2 \, dt \end{array}.$$
   Réponse : $\min = \dfrac{1}{16}$.

3. $$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}(1 + tx_1 + \dots + t^n x_n)^2 \, dt \end{array}.$$
   Réponse : $\dfrac{1}{4}$.

**Exo 25** **Décomposition de Cholesky.**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

1. Montrer qu'il existe une matrice $T$ triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que $T$ est unique si on impose la condition : $\forall\, i,\ T_{ii} > 0$.

2. Application : Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 26 $F \neq E$ mais $F^{\perp} = \{0_E\}$.

1. Soit $E$ unespace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\longrightarrow|\longrightarrow)$, et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.
   a) Montrer que l'application $(x, y) \mapsto (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$ est continue sur $E^2$.
   b) Soit $x \in E$ fixé, montrer que l'application $y \mapsto (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})$ est continue sur $E$.
   c) En déduire que $\overline{F}^{\perp} = F^{\perp}$.
   d) On suppose que $F$ est dense dans $E$, montrer que $F^{\perp} = \{0_E\}$.
   Si de plus $F \neq E$, montrer que $F$ n'admet pas de supplémentaires orthogonal.

2. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel, $F$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et $g$ la fonction exponentielle sur $[0, 1]$.
   a) Montrer que $g \notin F$.
   b) Montrer qu'il existe une suite $(f_n)$ de fonctions polynomiales convergeant vers $g$ pour la norme euclidienne.
   c) En déduire que $F$ n'a pas de supplémentaire orthogonal.

3. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Pour $f \in E$, on pose $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt$.
   a) Montrer que $\varphi$ est continue.
   b) Montrer que $H = \ker \varphi$ est fermé.
   c) Montrer que $H^{\perp} = \{0\}$.

Exo 27 Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire antisymétrique. Montrer qu'il existe $\varphi \in E^*$, unique, telle que : , $\phi(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{x} \wedge \vec{y})$, $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E$.

Exo 28 Conjugué d'une rotation.

1. Soit $\rho$ une rotation d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, et $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaitre $f \circ \rho \circ f^{-1}$.
   Application : Déterminer le centre de $\mathcal{O}^+(E)$.

2. Soient $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ ayant même polynôme caractéristique. Montrer qu'il existe $h \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.
   Si $f$ et $g$ sont positifs, a-t-on $h$ positif ?
   Application : Montrer que deux matrices orthogonale d'ordre 3 sont semblables si et seulement si elles ont même polynoôme caractéristique.

**Exo 29** Quotients de Rayleigh .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, on se propose d'étudier les extremum du quotient de Rayleigh $R_f(x) = \dfrac{(f(\vec{x}) \mid \vec{x})}{\|\vec{x}\|}$ où $x \neq 0_E$. Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de $f$.

1. Montrer que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leq (f(\vec{x}) \mid \vec{x}) \leq \lambda_n \|\vec{x}\|^2$.

2. Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de $f$.

3. Soit $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de $E$ telle que pour tout $i$ : $(f(\vec{e}_i) \mid \vec{e}_i) = \lambda_i$.
Montrer que : $\forall\, i,\ f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

4. En déduire que le quotient de Rayleigh de $f$ atteint ses extremums, préciser ces extremums et en quels vecteurs ils sont atteints.

**Exo 30** Quelques propriétés des endomorphismes auto-adjoints.

1. Autoadjoint $\Longrightarrow$ linéaire.
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E,\ (u(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid u(\vec{y}))$.
Montrer que $u$ est linéaire.

2. Composée auto-adjointe : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoints. Montrer que $u \circ v$ est auto-adjoint si et seulement si $u \circ v = v \circ u$.

3. Composée de projecteurs :
Soient $p, q$ deux projecteurs orthogonaux.
   a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est auto-adjoint.
   b) Montrer que $(\mathrm{Im}\, p + \ker q) \overset{\perp}{\oplus} (\ker p \cap \mathrm{Im}\, q) = E$.
   c) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable.

4. Endomorphisme auto-adjoint et orthogonal :
Quels sont les endomorphismes de $E$ la fois auto-adjoints et orthogonaux ?

**Exo 31** Théorème de Courant-Fischer

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien.

1. Soit $v \in S(E)$, (i.e : auto-adjoint) tel que $\left(\overrightarrow{v(x)} | \overrightarrow{x}\right) = 0$ pour tout $x$. Montrer que $v = 0$.

2. Soient $u_1, \ldots, u_p \in S(E)$. On suppose que $rg(u_1) + \cdots + rg(u_p) = n$, et que $\forall x \in E$, $\left(\overrightarrow{u_1(x)} | \overrightarrow{x}\right) + \cdots + \left(\overrightarrow{u_p(x)} | \overrightarrow{x}\right) = \left(\overrightarrow{x} | \overrightarrow{x}\right)$.
   a) Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = Id_E$.
   b) Montrer que $E = Im(u_1) \oplus \cdots \oplus Im(u_p)$.
   c) Montrer que pour tout $i$, $u_i$ est la projection orthogonale sur $Im(u_i)$.

**Exo 32** Endomorphismes normaux.

Soit $E$ un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si $u$ et $u^*$ commutent.

1. Soit $u$ normal, montrer que si $F$ est un sous-espace propre de $u$ alors $F^\perp$ est stable par $u$.
En déduire que $u$ est diagonalisable dans base orthonormale.
La réciproque est-elle vraie ?

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
(1) $u$ est normal.
(2) $\forall\, x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
(3) Tout sous-espace vectoriel stable par $u$ est stable par $u^*$.
(4) Si un sous-espace vectoriel $F$ est stable par $u$ alors $F^\perp$ est stable par $u$.
(5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.

3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\text{id}$. Montrer que $f$ est orthogonal.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $AA^* = A^*A \iff \text{tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2$.

**Exo 33** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A$ est symétrique définie positive si et seulement s'il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

**Exo 34** Soit $E$ un espace euclidien et $q$ une forme quadratique positive. Montrer qu'il existe un endomorphisme $u$ auto-adjoint tel que : $\forall\, \vec{x} \in E,\ q(\vec{x}) = \|u(\vec{x})\|^2$.

**Exo 35** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = I$. Montrer que $A^2 = I$.

**Exo 36** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} a_{ij}^2 = \sum_i \lambda_i^2$.

**Exo 37** espace vectoriel normé $\Longrightarrow$ prèhilbertien ?

Il est bien connu que si $E$ est un espace prèhilbertien muni de la norme $\|.\|$, alors l'identité de la médiane (ou du parallélogramme) est vérifiée, à savoir : pour tous $x, y$ de $E$, on a : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$. L'objectif de cet exercice est de montrer une sorte de réciproque de cette propriété, à savoir le résultat suivant : si $E$ est un espace vectoriel normé réel dont la norme vérifie l'identité de la médiane, alors $E$ est nécessairement un espace prèhilbertien (c'est à dire qu'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur $E$ tel que pour tout $x$ de $E$, on a $(x,x) = \|x\|^2$. Il s'agit donc de construire un produit scalaire, et compte tenu des formules de polarisation, on pose : $(x,y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$. Il reste vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

1. Montrer que pour tout $x, y$ de $E$, on a $(x,y) = (y,x)$ et $(x,x) = \|x\|^2$.

2. Montrer que pour $x_1,\ x_2,\ y \in E$, on a $(x_1+x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$
(on utilisera l'identité de la médiane avec les paires $(x_1+y, x_2+y)$ et $(x_1-y, x_2-y)$).

3. Montrer, en utilisant la question précédente, que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a :
$(rx, y) = r(x,y)$.

4. En utilisant un argument de continuité, montrer que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.

5. Conclure !

**Exo 38** Décomposition polaire

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit positif si pour tout $x$ de $E$, $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit défini positif si pour tout $x$ de $E$ non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que $u$ appartient $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.

2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. On définit $v_i$ par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i} x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \cdots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que $v$ est positif.

3. Soit $w$ un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
   a) Montrer que $wu = uw$. En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
   b) Soit $w_i$ l'endomorphisme induit par $w$ sur $E_i$. Vérifier que $w_i$ est symétrique positif, puis diagonaliser $w_i$.
   c) En déduire que $w = v$.

4. Soit $f \in Gl(E)$.
   a) Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.
   b) Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$.

**Exo 39** On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose : $\varphi(P)(X) = (X^2 - X)P''(X) + (2X - 1)P'(X)$ , $s(P)(X) = P(1 - X)$

1. Montrer que $\varphi, s$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$, donner leurs matrices dans la base canonique.

2. En déduire leurs valeurs propres, sont-ils bijectifs ? diagonalisables ?

3. Montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!], \exists! L_k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg(L_k) = k, co(L_k) = 1, \varphi(L_k) = k(k+1)L_k$.

4. Montrer que $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^n$ on a : $\left(\overrightarrow{\varphi(P)}|\overrightarrow{Q}\right) = \left(\overrightarrow{P}|\overrightarrow{\varphi(Q)}\right)$ et $\left(\overrightarrow{s(P)}|\overrightarrow{Q}\right) = \left(\overrightarrow{P}|\overrightarrow{s(Q)}\right)$.

5. En déduire que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. En utilisant c. Dire pourquoi les matrices de $\varphi, s$ dans $(L_0, \dots, L_n)$ sont symétriques, expliciter ensuite ces matrices.

7. Montrer que $s$ est une réflexion, préciser par rapport quel hyperplan.

Mamouni My Ismail
*mamouni.new.fr*
*mamouni.myismail@gmail.com*

**Exo 40** Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques suivantes dans la base canonique :

1. $$\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$$
Réponse : rotation autour de $(1, 0, 1)$ d'angle $-\arccos(1/3)$.

2. $$\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$$
Réponse : rotation autour de $(-3, 1, 1)$ d'angle $-\arccos(7/18)$.

3. $$\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$$
Réponse : demi-tour autour de $(-1, -2, 1)$.

4. $$\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$$
Réponse : rotation autour de $(0, 1, 1)$ d'angle $2\pi/3$.

5. $$\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$$
Réponse : rotation autour de $(-2 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} - \sqrt{3})$ d'angle $\arccos(\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 1}{2\sqrt{6}})$.

6. $$\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$$
Réponse : symétrie % $x = y + z$.

7. $$\begin{cases} 7x' = -2x + 6y - 3z \\ 7y' = 6x + 3y + 2z \\ 7z' = -3x + 2y + 6z \end{cases}$$
Réponse : symétrie % $3x = 2y - z$.

8. $$\begin{cases} 3x' = 2x - 2y + z \\ 3y' = -2x - y + 2z \\ 3z' = x + 2y + 2z \end{cases}$$
Réponse : symétrie % $x + 2y - z = 0$.

9. $$\begin{cases} 3x' = 2x + y + 2z \\ 3y' = 2x - 2y - z \\ 3z' = -x - 2y + 2z \end{cases}$$
Réponse : symétrie-rotation autour de $(1, -3, 1)$ d'angle $-\arccos(5/6)$.

10. $$\begin{cases} 4x' = -x + 3y - z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x - y - z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z \end{cases}$$
Réponse : symétrie-rotation autour de $(1, -1, 0)$ d'angle $\pi/3$.

11. $$\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$$
Réponse : projection sur $2x + 2y + z = 0$ puis rotation d'angle $\arccos(3/5)$.

À la prochaine

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices
# Coniques-Quadriques

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de note et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
- Bien-sùr pourquoi ?
- Alors mets les avant de regarder mon bulletin de note !

**Johannes Kepler (1571-1630)**

Mathématicien, philosophe de la nature, astrologue et astronome allemand célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique (la Terre tourne autour du Soleil) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les plantes ne tournent pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses.
Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des plantes sur leur orbite. Ces relations furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle. Toutefois, Kepler expliquait les mouvements des plantes non pas par la gravité mais par le magnétisme.
Il a enfin accordé une attention majeure à l'optique en étudiant par exemple la nature de la lumière, la chambre obscure, les miroirs (plans et courbes), les lentilles ou la réfraction.

Mathématicien du jour

## 1 Coniques.

**Exo 1** Déterminer la nature et les éléments de la courbe d'équation dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé :

1. $x^2+y^2+2xy-x+y-1=0$.
2. $x^2+2y^2-3xy+2x-3y+1=0$.
3. $16x^2-24xy+9y^2+35x-20y=0$.
4. $5x^2+7y^2+2xy\sqrt{3}-(10+2\sqrt{3})x-(14+2\sqrt{3})y-4+2\sqrt{3}=0$.
5. $x^2+xy+y^2=1$.
6. $x^2+2y^2+4xy\sqrt{3}+x+y\sqrt{3}+1=0$.
7. $mx^2+4mx+(m-1)y^2+2=0$ $(m\in\mathbb{R})$.
8. $x^2+4xy+6y^2-a^2$. $(a\in\mathbb{R})$.

**Exo 2** Montrer que le support de la courbe paramétrée : $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\cos t+\sin t\end{cases}$ est une ellipse, et en préciser les éléments caractéristiques.

**Exo 3** Soit $\mathcal{C}$ une conique de foyer $F$, directrice $D$, excentricité $e$. On considère deux points de $\mathcal{C}$, $M\neq M'$ alignés avec $F$. Montrer que les tangentes $\mathcal{C}$ en $M$ et $M'$ se coupent sur $D$ ou sont parallèles.
Indication : Donner l'équation cartésienne de la coniques ainsi que de ses tangentes dans un repère orthonormé dont l'axe des ordonnés est parallèle à la directrice.

**Exo 4** Soit $\mathcal{P}$ une parabole de paramètre $p$ et $A \in \mathcal{P}$. Soit $B$ le point où la normale $\mathcal{P}$ en $A$ recoupe $\mathcal{P}$. Déterminer la longueur minimale de $AB$.

Indication : Utiliser le paramétrage de la parabole pour exprimer cette longueur à l'aide d'une fonction à deux variables.

**Exo 5** Oral Centrale.

On considère une parabole d'équation $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormé dans le plan euclidien.

1. .
   a. Exprimer l'équation d'une droite passant par deux points $A(x_A, a)$ et $B(x_B, b)$ de la parabole l'aide d'un déterminant d'ordre 3.
   b. Soient $A(x_A, a)$, $B(x_B, b)$ et $C(x_C, c)$ trois points sur la parabole,montrer que $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires si et seulement si $a^2 + ab + ac + bc + 1 = 0$.
   c. On fixe $A$ sur la parabole, $B$ et $C$ sont deux points de la parabole variables tels que $(AB)$ et $(AC)$ sont perpendiculaires. Montrer que $(BC)$ passe par un point fixe $M$.
   d. Quel est le lieu de $M$ quand $A$ varie ?
2. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point fixe de la parabole.
   a. Discuter l'existence et le nombre de points $M \in \mathcal{P}$ distincts de $M_0$ tels que la normale $\mathcal{P}$ en $M$ passe par $M_0$.
   b. Dans le cas où il y a deux solutions, $M_1$ et $M_2$, trouver le lieu géométrique du centre de gravité du triangle $(M_0M_1M_2)$.

**Exo 6** Tangentes à une ellipse

Soient $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$, et $\mathcal{E}' : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1. Montrer qu'une CNS sur $u, v, w$ pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente $\mathcal{E}'$ est $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$.
2. Soient $(MP)$, $(MQ)$ deux tangentes $\mathcal{E}'$ avec $M, P, Q \in \mathcal{E}$. Montrer que $(PQ)$ est aussi tangente $\mathcal{E}$.

**Exo 7** Courbe orthoptique.

1. Quel est l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à la conique d'équation $x^2 + 4xy + 6y^2 - a^2$. $(a \in \mathbb{R})$.
2. Que signifie le vocabulaire courbe orthoptique.

**Exo 8** Soient $P$ un point mobile sur $Ox$, et $Q$ un point mobile sur $Oy$ tels que $PQ$ reste constante.

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer le lieu, $\mathcal{C}_\alpha$, de $\mathrm{Bar}(P(1-\alpha), Q(\alpha))$.
2. Soit $R$ le quatrième point du rectangle $OPQR$. Démontrer que la tangente $\mathcal{C}_\alpha$ en un point $M$ est perpendiculaire $(RM)$.

**Exo 9** Reconnaître l'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M$ du plan d'où l'on peut mener deux tangentes à la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 = 2px$ telles que le segment joignant les deux points de contact soit vu du foyer sous un angle droit.

# 2 Quadriques.

**Exo 10** Déterminer les natures des surfaces d'équation :

1. $z - xy = 1$.
2. $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz+3x-y+z+1=0$.
3. $(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)+(x-y)=0$.
4. $x^2+9y^2+4z^2-6xy-12yz+4zx+4=0$.
5. $x^2-2y^2-z^2+2xz-4yz+3=0$.
6. $2x^2+2y^2+z^2+2xz-2yz+4x-2y-z+3=0$.
7. $xy+xz+yz+1=0$.
8. $2x^2+2y^2-z^2+5xy-yz+xz=0$.
9. $xy+yz=1$.
10. $x^2+4y^2+5z^2-4xy-2x+4y=0$.
On fera le minimum de calculs nécessaires pour pouvoir conclure.

**Exo 11** Soit $\mathcal{Q}$ la courbe d'équations : $\begin{cases} x^2-y^2-4x+2=0 \\ x+z=1. \end{cases}$.
Déterminer la nature et les éléments remarquables de $\mathcal{Q}$.

**Exo 12** Soit $\mathcal{E}$ la surface d'équation $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{3z^2}{4}+xz=1$. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ellipsoïde et en calculer le volume intérieur.

**Exo 13** Plan tangent à un ellipsoïde

Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ et $P$ un plan d'équation $ux+vy+wz=1$. Montrer que $P$ est tangent $E$ si et seulement si $a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1$.

**Exo 14** Points équidistants de deux droites.

Soient $D, D'$ deux droites non coplanaires et $\mathcal{S}$ l'ensemble des points équidistants de $D$ et $D'$. Montrer que $\mathcal{S}$ est un paraboloïde hyperbolique. (Utiliser un repère judicieux)

**Exo 15** Montrer que la surface $\mathcal{C}$ d'équation $xy+yz=1$, donner en une directrice et la direction de ses génératrices.

**Exo 16** Déterminer une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}$ de sommet $S(1,1,1)$ et de directrice $\gamma$ : $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

FIN FIN

À la prochaine

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Intégration vectorielle

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

● Quelle différence y a-t-il entre Windows et un clou ?
Réponse : Aucune : tous deux sont destinés à se planter.
● Quelle est la différence entre Windows et un virus ?
Réponse : Le virus lui, il fonctionne.

**Ibn al-Haytham (965-1039)**

Mathématicien du jour

Mathématicien et un physicien perse. Il est l'un des pères de la physique quantitative et de l'optique physiologique.
Craignant de possibles sanctions du calife d'Egypte, qui lui confie le projet d'arrêter les inondations du Nil, il fait semblant de folie et fût assigné à résidence. Il profita de ce loisir forcé pour écrire plusieurs livres (environ 200)
Il a été le premier à expliquer pourquoi le soleil et la lune semblent plus gros (on a cru longtemps que c'était Ptolémée). C'est aussi lui qui a contredit Ptolémée sur le fait que l'œil émettrait de la lumière. Selon lui, si l'œil était conçue de cette façon on pourrait voir la nuit. Il a compris que la lumière du soleil se reflétait sur les objets et ensuite entrait dans l'œil.
Il fut également le premier illustrer l'anatomie de l'œil avec un diagramme. Il dit qu'un objet en mouvement continue de bouger aussi longtemps qu'aucune force ne l'arrête : c'est le principe d'inertie que Galilée redécouvrira longtemps après.
On lui doit l'invention de la chambre noire, instrument optique qui permet d'obtenir une projection en deux dimensions très proche de la vision humaine.

## 1 Intégration sur un segment.

**Exo 1** Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}$.
Montrer que $f$ possède un point fixe sur $[0,1]$.

**Exo 2** Soit $f$ une fonction , continue, positive sur $[a,b]$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_a^b f(x)^n dx\right)^{1/n} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Interpréter ce résultat à l'aide des normes.

**Exo 3** Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue. On pose $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)\,dt$. Montrer que $g^{(n)} = f$. Penser à utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 4** Sommes de Riemann.

1. Inégalité de Jensen.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe.

Démontrer que $g\left(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right) \leq \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(f(t))\,dt$.

2. Moyenne géométrique.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}f\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\Big(\frac{2}{n}\Big)\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}f\Big(\frac{n}{n}\Big)\right) = \exp\left(\int_0^1 f(t)\,dt\right)$$

On pourra utiliser : $\forall\, x \geq -\dfrac{1}{2},\ x - x^2 \leq \ln x \leq x$.

3. Déterminer les limites des suites suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$.

b) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.

c) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{1}{n+k}}\right)-n$,

on pourra utiliser l'inégalité :

$x \leq e^x - 1 \leq x + \dfrac{ex^2}{2}$, $\forall x \in [0,1]$.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$

On pourra s'inspirer de l'exemple précédent.

e) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{kn}$

pour $k \geq 2$ fixé.

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$.

g) $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{k}{n}\Big)}$.

h) $\displaystyle\ln\left(1+\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2+\cos(\frac{3k\pi}{n})}$.

i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$. Donner un équivalent simple.

j) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}A_1A_k$.

Où $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets d'un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre 0 et rayon 1.

**Exo 5** Densité des fonctions en escalier

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt = 0$.

Démontrer que $f = 0$.

**Exo 6** Lemme de Riemann-Lebesgue .

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, montrer que : $\displaystyle\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt = 0$ dans les cas suivants :

1. $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

2. $f$ en escalier sur $[a,b]$.

3. $f$ continue par morceaux sur $[a,b]$

**Exo 7** Intégrales de Wallis.

On note $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1. Comparer $I_n$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, dt$.

2. En coupant $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en $[0, \alpha]$ et $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

3. Chercher une relation de récurrence entre $I_n$ et $I_{n+2}$.
En déduire $I_{2k}$ et $I_{2k+1}$ en fonction de $k$.

4. Démontrer que $nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

5. Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante

6. Démontrer que $I_n \sim I_{n-1}$ et en déduire un équivalent simple de $I_n$

7. En déduire un équivalent simple de $\binom{2n}{n}$ quand $n \to \infty$.

**Exo 8** Irrationalité de $\pi$ et de $e$.

Soit $(p, q, n) \in \mathbb{N}^{*3}$, on pose $P_n(X) = \dfrac{X^n(qX-p)^n}{n!}$.

1. Préciser les racines de $P_n$ ainsi que leurs multiplicités .

2. Montrer que $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}, \quad \forall 0 \leq k \leq 2n$.

3. En déduire que $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Z}, \quad \forall 0 \leq k \leq 2n$.
Penser un changement de variable.

4. On suppose $\pi \in \mathbb{Q}$ et on pose $\pi = \frac{p}{q}$.
   a. En déduire de ce qui précède que $\int_0^{\pi} P_n(t) \sin t dt \in \mathbb{Z}$.
   b. Montrer que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{\pi} P_n(t) \sin t dt = 0$.
   c. Conclure que la suite $\left(\int_0^{\pi} P_n(t) \sin t dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire en 0.
   d. Déduire une contradiction, puis conclure.

5. En raisonnant cette fois sur $\int_0^1 P_n(t) e^t dt$, montrer que $e \notin \mathbb{Q}$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

# 2 Intégration sur un intervalle quelconque.

**Exo 9**

Étudier l'existence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}$
2. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,dt$
3. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,dt$
4. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)(\ln\ln t)}$
5. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^3}\right)dt$
6. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(2 + (t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)dt$
7. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\,dt$
8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{1-\sqrt{t}}$
9. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,dt$
10. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \sin(t^2)\,dt$
11. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dt}{\arccos t}$
12. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\ln(\arctan t)}{t^\alpha}\,dt$
13. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+1/t)\,dt}{(t^2-1)^\alpha}$
14. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{|\ln t|^\beta}{(1-t)^\alpha}\,dt$
15. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^\alpha\left(1 - e^{-1/\sqrt{t}}\right)dt$
16. $\displaystyle\int_{0}^{1} \sin\left(\frac{1}{t}\right)e^{-1/t}t^{-k}\,dt$

**Exo 10**

La fonction $f : t \longrightarrow \dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x} + \cos x}$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$ ?

**Exo 11**

Soient $a$ et $b$ dans $\mathbb{R}$. Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin ax \sin bx|}{x^2}dx$

**Exo 12**

Soient $a$ et $b$ deux réels. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x \frac{\cos ax - \cos bx}{x}dx$

**Exo 13**

Existence de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} (1 + \frac{1}{x^2})^x dx$

**Exo 14**

Soit $a > 0$.

1. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{e^{at} - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{at} - 1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a^2n^2 + 1}$
3. En déduire un équivalent de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^{at} - 1}dt$ quand $a \to +\infty$

**Exo 15**

Pour tout entier positif $n$, on considère $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{e^x - 1}dx$.

1. Montrer que $I_n$ est bien définie et déterminer la limite de $I_n$ lorsque $n \to +\infty$.
2. Donner un équivalent de $I_n$ en $+\infty$.

**Exo 16**

Soient $a > b > 0$. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}dt$

**Exo 17**

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + 2}$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 18** Soient $a, b$ deux nombres réels tels que $b < a$ et $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x \to +\infty} f = l$ et $\lim_{x \to -\infty} f = l'$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))dx$ a un sens et la calculer.

Application : calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ch(a+x)ch(b+x)}$.

**Exo 19** Soit $z$ un nombre complexe tel que $|z| \neq 1$.
Justifier que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{e^{ipx}}{z - e^{ix}} dx$ existe et la calculer.

**Exo 20** Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur les intervalles cités.

1. $f(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^2}$, sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
2. $f(x) = \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}$, sur $]0,1[$.
3. $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$, sur $]0,+\infty[$, o $\alpha$ paramètre rel.
4. Intégrales de Bertrand. $f(x) = x^\alpha |\ln x|^\beta$, sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$, où $\alpha, \beta$ paramètres réels.
5. $f(x) = \frac{\ln x}{1-x}$ et $g(x) = \frac{1-x}{\ln x}$ sur $]0,1[$.
6. $g : x \mapsto \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x^2 - 1}$ et $h : x \mapsto \frac{\ln(x+1) - x\ln 2}{x^2 - 1}$.

**Exo 21** Calcul de $\int_0^\infty \sin t/t \, dt$

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.
2. Montrer que $I_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^2} dt$ est comprise entre $A_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin^2 t} dt$ et $B_n = \int_{t=0}^{\pi/2} \text{cotan}^2 t \sin^2 nt \, dt$.
3. Calculer $A_n + A_{n+2} - 2A_{n+1}$ et $A_n - B_n$. En déduire les valeurs de $A_n$ et $B_n$ en fonction de $n$.
4. Montrer que $\frac{I_n}{n} - n \to \infty - > J = \int_{t=0}^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et donner la valeur de cette dernière intégrale.

**Exo 22** Soit $f : [0,+\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f^2$ intégrable. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt = 0$. Interpréter ce résultat à l'aide de la moyenne.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 23** Intégrale de Gauss.

1. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$, pour tout rel $x > -1$.

2. En déduire que $\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \leq \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$, $\forall x \in [0, n[$.

3. Montrer que, $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
Indication : On pourra utiliser l'encadrement :
$\left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2} \leq \left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}[$.

4. en déduire la la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{2n}dt$.

**Exo 24** Étude d'une suite d'intégrales .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$.

2. Donner une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}dt$.
   a. Montrer que $J_n$ est bien définie.
   b. Donner une relation entre $J_n$ et $J_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   c. Exprimer $J_n$ en fonction de $n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   d. Donner un équivalent simple de $J_n$, quand $n \longrightarrow +\infty$.
   On pourra utiliser la relation de Stirling :
$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$
   e. Montrer que $0 \leq J_n - I_n \leq \dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.
   f. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

**Exo 25** Intégrales de Wallis .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $w_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

1. Donner une relation entre $w_n$ et $w_{n-1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Exprimer $w_n$ en fonction de $n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Donner un équivalent simple de $w_n$, quand $n \longrightarrow +\infty$.
On pourra utiliser la relation de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$

4. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 26** La constante d'Euler .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone borne entre 0 et 1, donc converge, on notera $\gamma$ sa limite, appelée constante d'Euler.
Indication : Penser utiliser le TAF, ou bien l'inégalité : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$, pour tout $k \geq 2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $J_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt$.
Montrer que $J_n$ est bien définie.
On admet dans la suite que $\lim_{n\to+\infty} J_n = -\gamma$, qu'il est possible de montrer à l'aide d'une intégration par parties ou changement variable.

3. On pose $K = \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx$.
   a. Montrer que $K$ est bien définie.
   b. Montrer que $\ln(1+x) \leq x$, pour tout rel $x > -1$.
   c. En déduire que $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$, pour tout $x \in [0, n[$.
   d. Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, on a : $x - x^2 \leq \ln(1+x)$.
   e. En déduire que pour tout

$$\begin{array}{lll}
n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] & \text{on a :} & t + n\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \geq -\frac{t^2}{n} \\
n \geq 4, t \in [0, \sqrt{n}] & \text{on a :} & -\frac{t^2}{n} \geq \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \\
n \geq 4, t \in [0, n] & \text{on a :} & \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \geq e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \\
n \geq 4, t \in [0, n] & \text{on a :} & 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}
\end{array}$$

   f. En déduire que $K = -\gamma$.

Fin

À la prochaine

mamouni.new.fr
Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Séries dans un Banach

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

- Pourquoi les israéliens veulent que Netscape et Yahoo fusionnent ?

Réponse : Pour l'appeler Netanyaho (lire Net and Yahoo)

- Quelle est la différence entre Jurassik Park et Microsoft ?

Réponse : L'un est un parc de milliardaire ou des gros monstres bouffent tout se qui se trouve sur leur passage. L'autre est un film.

**Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)**

Mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle. On lui doit entre autres les notion de Surface de Riemann, Sphère de Riemann, , Intégrale de Riemann, Hypothèse de Riemann, Somme de Riemann, Théorème de représentation de Riemann, Fonction zêta de Riemann, Théorème de réarrangement de Riemann,...

Mathématicien du jour

## 1 Séries numériques

**Exo 1** On considère les deux suites $a$ et $b$ définies par $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \geqslant 0$ :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $a$ converge vers une limite $l$ que l'on explicitera

2. On pose $u_n = a_n - b_n$.
   a. Majorer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$. En déduire la vitesse de convergence de $u$.
   b. Nature de la série $\sum\limits_n (a_n - l)$

**Exo 2** Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ existe et donner sa valeur. Que dire de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ ?

**Exo 3** On pose $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$ converge.

2. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} C(\dfrac{n}{e})^n\sqrt{n}$.

3. A l'aide des intégrales de Wallis, Déterminer $C$.

**Exo 4** On pose $R_k = \sum\limits_{n\geq k+1} \dfrac{(-1)^n}{n}$

1. Justifier l'existence de $R_k$.

2. Étudier la convergence absolue de la série $\sum\limits_{k\geq 1} R_k$.

3. Quel est le signe de $R_k$ ? Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{k\geq 1} R_k$.

**Exo 5** Soient $a, b, c$ trois nombres entiers positifs et $z$ un nombre complexe de module strictement inférieur $1$. Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{cn}}{1-z^{an+b}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{bn}}{1-z^{an+c}}$.

**Exo 6** Pour $s \in \mathbb{R}$, posons $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^s}$ et $\zeta_a(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^s}$. Soient $2 = p_1 < p_2 < .. < p_n < ..$ la suite des nombres premiers.

1. Exprimer $\zeta_a(s)$ en fonction de $\zeta(s)$ pour $s > 1$.

2. Donner un développement asymptotique deux termes de $\zeta(s)$ lorsque $s \to 1^+$.

3. Montrer que $\forall s > 1,\ \zeta(s) = \prod\limits_{n=1}^{+\infty}(1-p_n^{-s})^{-1}$.

4. Pour $s > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} p_n^{-s}$ est-elle convergente ? La série $\sum\limits_{n\geq 1} p_n^{-1}$ est-elle convergente ?

**Exo 7** .

1. Montrer qu'il existe un rel $A$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\ln(k)}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{2}\ln^2(n) + A + o(1)$.

2. En déduire qu'il existe un rel $C$ tel que $\prod\limits_{k=1}^{n} k^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} Cn^{\frac{\ln(n)}{2}}$

**Exo 8** Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n-1)!(n+1)}$

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 9**

1. Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ (on pourra calculer $\int_0^1 t^{2k} dt$)

2. Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \ln(\tan(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}))$

**Exo 10**

Soit $\alpha > 0$, on pose $R_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha}$.
Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} R_n$ lorsque $\alpha \geqslant 1$ puis lorsque $0 < \alpha < 1$.

**Exo 11**

On considère la suite $x$ définie par $x_{n+1} = 2x_n + \sqrt{x_n}$ avec $x_0 > 0$.

1. Déterminer la limite de $x$.

2. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{x_n}}$.

3. Déterminer un équivalent de $x_n$ lorsque $n \to +\infty$ (on pourra introduire $v_n = \ln x_n$)

**Exo 12**

Soient deux entiers $p, q > 0$. On pose $u_n = \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{q(q+1)\cdots(q+n-1)}$.

1. Montrer que : $\sum u_n$ converge $\Leftrightarrow p+1 < q$

2. Montrer que dans ce cas $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{q-1}{q-p-1}$

**Exo 13**

Soit un rel $\beta > 0$. On considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n+\beta}$. On note $S_n$ les sommes partielles de cette dernière.

1. Montrer que $S_n = \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+\beta}}{1+t} dt$

2. Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme est $\int_0^1 \frac{t^{\beta-1}}{1+t} dt$

3. Traiter les cas où $\beta = 1, 1/2, 1/3$. Donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

**Exo 14**

Soit $s > 1$. Exprimer après avoir justifié son existence, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

**Exo 15**

On considère la fonction $f$ définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f$ atteint un et un seul extremum local sur $]n\pi, (n+1)\pi[$ en un point qu'on notera $a_n$. On pose en outre $m_n = f(a_n)$.

2. Montrer que $a_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \theta_n$ où $\theta_n$ tend vers 0 en décroissant.

3. Monter que la série $\sum m_n$ converge.

**Exo 16** Soit un rel $a > 1$, $d(n)$ désignera le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de l'entier $n$. étudier la série $\sum a^{d(n)}$

**Exo 17** Convergence et calcul de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} E(\log_2(n))$

**Exo 18** Soit $s > 1$. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \frac{sE(x)}{x^{s+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

**Exo 19** On pose $A_n = 1 + \sqrt{2} + \cdots \sqrt{n}$.

1. Montrer en utilisant la croissance de la racine carrée que : $A_n = \frac{2}{3}n^{3/2} + O(\sqrt{n})$.
2. Utiliser la concavité de la racine carrée pour montrer que :
$$\sqrt{n} \leq \int_{n-1/2}^{n+1/2} \sqrt{t}\ dt \quad \text{et} \quad \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leq 2\int_n^{n+1} \sqrt{t}\ dt$$
3. En déduire que $A_n = \frac{2}{3}n^{3/2} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + O(1)$

**Exo 20** Soient $\sum u_n$ une série de nombres complexes dont la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est bornée et $(a_n)_n$ une suite réelle décroissante et convergeant vers 0.
En utilisant la relation, dite transformation d'Abel :
$$\sum_{k=m}^{n} a_k u_k = a_{n+1}S_n - a_m S_{m-1} - \sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k)S_k$$
montrer que la série $\sum a_n u_n$ est convergente.

Application : Étudier la convergence de la série $\sum \frac{e^{ian}}{n^\alpha}$ o $a, \alpha \in \mathbb{R}$.

**Exo 21** Règle de Raabe-Duhamel

Soit une suite réelle $(a_n)$ termes strictement positifs. On suppose que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{s}{n} + o(\frac{1}{n})$

1. En considérant la suite $b_n = \ln\left(\frac{(n+1)^s u_{n+1}}{n^s u_n}\right)$, montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n^s}$
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de $\sum u_n$

Exemple : étudier la série de terme général $u_n = \frac{\binom{n}{2n}}{2^{2n}}$

**Exo 22** Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1. Montrer que pour toute matrice inversible $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$
2. Montrer que $\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$
3. Justifier que ce dernier résultat reste valable dans le cas où $A$ est une matrice réelle.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 23** Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

1. On suppose que $A$ est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p$. Soit $P$ un polynôme vérifiant : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ P(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$.
Justifier l'existence d'un tel polynôme.
Montrer que $e^A = P(A)$.

2. $A$ tant quelconque, montrer qu'il existe un polynôme $P$ tel que $e^A = P(A)$.

**Exo 24** Soit $E$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$. Pour tout $f \in E$ on pose $T(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(1/n)$

1. Montrer que $T$ définit une forme linaire continue de $E$. Calculer sa norme et montrer qu'elle n'est pas atteinte.

2. On considère l'hyperplan affine $H$ de $E$ d'équation : $T(f) = 1$. Montrer que $d(0,H)$ n'est pas atteinte dans $H$.

**Exo 25** $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est muni d'une norme d'algèbre $\|.\|$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$, montrer que la série $\sum (-1)^n A^n$ converge et donner sa somme.

2. Montrer que $GL_p(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$

**Exo 26** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ soit convergente mais non absolument convergente.
On veut montrer que pour tout rel $x$ il existe une suite $(\varepsilon_n)$ valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n u_n = x$

1. a. On pose $v_n = |u_n|$ , Construire une suite $(\alpha_n)$ valeurs dans $\{-1,1\}$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\ , |S_{n+1}| \leq \max\left(|S_n|, v_{n+1}\right) \quad \text{où } S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k v_k$$
b. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n v_n = 0$

2. Conclure

**Exo 27** Calculer les sommes de séries suivantes après en avoir prouvé la convergence :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ;

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$ ;

3. $\sum u_n$ où $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$, et $0 < a < b$ ; il faut déterminer $a$ et $b$ pour que la série converge ;

4. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n})}$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 28** Soit $(a_n)_n$ une suite de réels strictement positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^n = a > 0$.

Étudier la série $\sum\limits_n \dfrac{1-a_n}{n}$.

**Exo 29** On se donne $p \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série du terme général :

$$u_n = n^\alpha \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln k}{\ln(k+p)}$$

**Exo 30** Nature des séries de termes général :

1. $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{e^{n-x}}{n+x} dx$.

2. $J_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)dt$

**Exo 31** Soit $f$ de classe $C^1$ sur l'intervalle $[0, a]$, $(a \geqslant 1)$. On suppose que $f$ n'est pas identiquement nulle au voisinage de $a$.

Ètudier la convergence de $\sum u_n$, o : $u_n = \displaystyle\int_0^a t^n f(t)dt$.

**Exo 32** Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\dfrac{e^{x_n}-1}{x_n} = \dfrac{n+1}{n}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, et la nature de la série $\sum x_n$.

**Exo 33** Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note $r_n = \displaystyle\sum_{n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$. Étude de la série $\sum r_n$.

**Exo 34** On pose $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Nature de la série $A_n B_n - 1$.

**Exo 35** On définit la suite $(u_n)$ de réels par $u_0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

1. Pour quelles valeurs de $u_0$ la série de terme général $u_n$ converge-t-elle ?

2. Montrer que, dans ce cas, si la suite $(2^n u_n)$ n'est pas la suite nulle, elle converge vers une limite $l \neq 0$. Trouver alors un développement asymptotique deux termes de $u_n$.

**Exo 36** Soit $f$ une application continue de $[0, a]$ dans lui même admettant un développement limité $f(x) = x - \lambda x^\alpha + o(x^\alpha)$ droite de 0, avec $\lambda > 0$ et $alpha > 1$.

Pour simplifier, nous supposerons que, pour tout $x > 0, 0 < f(x) < x$ (ce qui est de toute manière vraie localement droite de 0).

On considère la suite définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
Donner un équivalent de $u_n$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra chercher un réel $\beta$ tel que la suite de terme général $v_n = u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ ait une limite non nulle.

2. Pour quelles valeurs de $\lambda, \alpha$ et $\gamma$ la série $\sum n^\gamma u_n$ converge-elle ?

3. Application numérique : nature de la série $\sum u_n$ où $u_0 \in ]0, \dfrac{\pi}{0}[$, et $u_{n+1} = \sin(u_n)$

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 37** Soit une série terme général $u_n$ positif, divergente, de somme partielle $S_n$, avec $u_0 > 0$. Étudier, pour $\alpha > 0$, la nature de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

**Exo 38** Cauchy-Schwarz. Soient $(u_n)$, $(v_n)$ deux suites réelles telles que $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent.

1. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge.
2. Montrer que $\sum (u_n + v_n)^2$ converge et : $\sqrt{\sum (u_n+v_n)^2} \leq \sqrt{\sum u_n^2} + \sqrt{\sum v_n^2}$.

**Exo 39** Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $b_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a_k$

1. Montrer que la convergence de la suite $(a_n)$ entraine celle de $(b_n)$.
2. Montrer que la convergence de la série $\sum a_n$ donne celle de $\sum b_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ .
3. indication : vérifier que $B_n = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1}\, A_k$ $\quad (A_n, B_n$ les sommes partielles de $(a_n)$ et $(b_n)$ )

**Exo 40** Étudier la nature de la série de terme général. Calculer sa somme (dans le cas possible)

1. $u_n = \ln(1 + \frac{2}{n(n+3)})$
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$.
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{(\ln n)^\alpha + (-1)^n}$, où $\alpha$ un nombre réel,
4. $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$
5. $u_n = \frac{\sqrt{n}\ln(n)}{n^2+1}\sin(n\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est fixe.
6. $u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ où $\alpha > 1$.
7. $u_n = \sin(\sqrt{n^2 + a^2}\pi)$ avec $a$ un réel positif donné.
8. $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}} dx$.
9. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$. où $\alpha, \beta$ deux nombres réels tels que $\alpha \neq \beta$.
10. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sin(n) + \sqrt{n}}$.
11. $u_n = \ln(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}})$, où $a$ réel positif.
12. $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
13. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$
14. $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$

mamouni.new.fr
Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 41 **Calcul de sommes**

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$.

   Réponse : $\frac{3}{4}$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

   Réponse : $\frac{1}{4}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.

   Réponse : $S_p-(p+1)S_{p+1}=S_p-\frac{1}{(p+1)!} \Longrightarrow S_p=\frac{1}{pp!}$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^3+8k^2+17k+10}$.

   Réponse : $\frac{23}{144}$.

5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{k(k+3)}\right)$.

   Réponse : $\ln 3$.

6. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

   Réponse : $-\ln 2$.

7. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\alpha}{2^k}\right)$.

   Réponse : $\ln\left(\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}\right)$.

8. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\tan(2^{-k}\alpha)$.

   Réponse : $\frac{1}{\alpha}-2\text{cotan}(2\alpha)$.

9. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{2k^3-3k^2+1}{(k+3)!}$.

   Réponse : $109-40e$.

10. $\sum\limits_{n=p}^{\infty} C_n^p x^n$.

    Réponse : $\frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}$ pour $|x|<1$ par récurrence.

11. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1-x^k)(1-x^{k+1})}$.

    Réponse : $\frac{x}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$, $\frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|>1$.

12. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k-n[k/n]}{k(k+1)}$.

    Réponse : $S_n=\sum\limits_{q=0}^{\infty}\sum\limits_{r=1}^{n-1}\frac{r}{(qn+r)(qn+r+1)}=$

    $\sum\limits_{q=0}^{\infty}\sum\limits_{r=1}^{n-1}\frac{r}{qn+r}-\frac{r}{qn+r+1}$.

    $S_n=\sum\limits_{q=0}^{\infty}\left(\frac{1}{qn+1}+\frac{1}{qn+2}+\dots+\frac{1}{qn+n}-\frac{1}{q+\dots}\right.$

    $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{(N+1)n}\frac{1}{k}-\sum\limits_{k=1}^{N+1}\frac{1}{k}\right)=\ln n$.

# 2 Familles sommables

**Exo 42** Étudier la sommabilité dans les cas suivants :

1. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(i+j)^{\alpha}}$.

   Réponse : Regroupement $i+j$ constant $\Longrightarrow$ CV ssi $\alpha > 2$.

2. $\displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{i^{\alpha}+j^{\alpha}}$.

   Réponse : Pour $\alpha \geq 1$ on a par convexité : $2^{1-\alpha}(i+j)^{\alpha} \leq i^{\alpha}+j^{\alpha} \leq (i+j)^{\alpha}$ donc il y a convergence ssi $\alpha > 2$.

3. $\displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[1,+\infty[} \frac{1}{x^2}$.

   Réponse : Il y a une infinité de termes supérieurs $1/4$.

4. $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p+b^q}$, $a>1, b>1$.

   Réponse : $\dfrac{1}{a^p+b^q} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{a}^p\sqrt{b}^q} \Longrightarrow$ sommable.

**Exo 43** Série des restes.

1. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

   Réponse : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} = 2e$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.

   Réponse : $-\dfrac{7}{8}\zeta(3)$.

**Exo 44** On pose $a_{n,p} = \dfrac{1}{n^2-p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

1. Expliquer simplement pourquoi la suite double $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable.

   Indication : Étudier $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n-1}$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

   Réponse : $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = \frac{1}{4n^2}$ si $n \neq 0$, $-\dfrac{\pi^2}{6}$ si $n=0$. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} = -\frac{\pi^2}{8} = -\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,p}$.

**Exo 45** Soit $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| < 1$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

**Exo 46** La fonction $\zeta$ de Riemann est définie pour tous réel $x > 1$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Calculer les sommes suivantes :

1. $A = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2q^2}$

   Réponse : $A = \zeta(2)^2$

2. $B = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p|q} \frac{1}{p^2q^2}$

   Réponse : $B = \zeta(2)\zeta(4)$.

3. $C = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2, p\wedge q=1} \frac{1}{p^2q^2}$.

   Réponse : $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

Mamouni My Ismail
*mamouni.new.fr*
*mamouni.myismail@gmail.com*

**Exo 47** Série harmonique alternée.

On réordonne les termes de la série harmonique alterne en prenant tour tour $p$ termes positifs puis $q$ termes négatifs, $p, q \geq 1$. Calculer la somme de la série correspondante.

Réponse : $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln(p/q)$.

**Exo 48** La fonction dzêta de Riemann

La fonction $\zeta$ de Riemann est définie pour tous réel $x > 1$ par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

Pour tout entier naturel $n$ on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels plus petits que $n$ et premiers avec $n$.

1. Montrer que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$

2. Montrer que pour tous rel $x > 1$ :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$$

3. Soit $u$ définie par $u_{p,q} = \frac{1}{p^q}$ pour tout $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$.
   - a. Montrer que la suite $u$ est sommable et calculer sa somme.
   - b. Prouver l'identité suivante : $\sum_{q=2}^{+\infty}(\zeta(q) - 1) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} - 1\right) = 1$.

**Exo 49** Familles de carrés sommables

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Vérifier que : $\int_{t=-1}^{1} P(t)\, dt + i\int_{\theta=0}^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}\, d\theta = 0$.

   En déduire : $\int_{t=0}^{1} P^2(t)\, dt \leq \frac{1}{2}\int_{\theta=-\pi}^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2\, d\theta$.

2. Soient $2n$ réels positifs $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$.

   Montrer que $\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{a_k b_\ell}{k+\ell} \leq \pi\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{\ell=1}^{n} b_\ell^2}$.

3. Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes de carrés sommables.

   Montrer que la suite double $\left(\frac{a_k b_\ell}{k+\ell}\right)_{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.

FIN : FIN

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices
# Suites et séries de fonctions

MP-CPGE Rabat

## Blague du jour

- Ce sont deux suisses qui se promènent. Tout à coup, il y en a un qui se retourne et qui écrase un escargot : Il m'énervait, celui-là ! Ca fait une demi-heure qu'il nous suivait.
- Pourquoi les blagues Belges sont-elles si courtes ? Pour que les Français puissent s'en souvenir


## Marshall Harvey Stone (1903-1989)

American mathematician who contributed to real analysis, functional analysis, and the study of Boolean algebras. His family expected him to become a lawyer like his father, but he became enamored of mathematics while he was a Harvard University where he obtains his thesis on differential equations that was supervised by George David Birkhoff

Mathématicien du jour

**Exo 1** Étude de convergence.

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)$ dans les cas suivant :
   a. $f_n(x) = x^n(1-x)^n, \qquad I = [0,1]$.
   b. $f_n(x) = nx^n(1-x^2), \qquad I = [0,1]$.
   c. $f_n(x) = (\sin x)^n, \qquad I = [0, \frac{\pi}{2}]$.
   d. $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}, I = \mathbb{R}_+$

2. Étudier la convergence simple et uniforme sur tout compact de la suite de fonctions : $f_n : x \mapsto \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$.
   a. Montrer que $\forall r \in ]0,1[$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} nr^n = 0$.
   b. Trouver la limite simple des fonctions $f_n$.
   c. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de chaque fonction $f_n$.
   d. Y a-t-il convergence uniforme ?

4. On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.
   a. Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.
   b. En déduire qu'il en est de même pour la suite $(g_n)$.

   (On utilisera la concavité de sinus sur $[0,\pi]$)

**Exo 2** Soient $f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant vers une fonction continue $f$ et $(x_n)$ une suite d'éléments de $I$ convergeant vers $x \in I$, où $I$ intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Si les fonctions $f_n$ convergent uniformément, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

2. Donner un contre-exemple lorsqu'il y a seulement convergence simple.

**Exo 3** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout entier $k$ on a $\displaystyle\int_a^b f(t)t^k\,dt = 0$. Montrer $f = 0$ sur $[a, b]$.

**Exo 4** Convergence et composée.

1. Soit $f_n$ convergeant uniformément vers $f$, et $g$ une fonction continue. Démontrer que $g \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$

2. Soit $f_n : [a, b] \longrightarrow [c, d]$ et $g_n : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues convergeant uniformément vers les fonctions $f$ et $g$. Montrer que $g_n \circ f_n$ converge uniformément vers $g \circ f$.

**Exo 5** Soit $p \in \mathbb{N}$ fixe et $(P_n)$ une suite de fonctions polynomiales toutes de degrés inférieurs ou égaux $p$ convergeant simplement vers $f$ sur un intervalle $[a, b]$.

1. Démontrer que $f$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à $p$, et que les coefficients des $P_n$ convergent vers ceux de $f$.

2. Montrer que la convergence est uniforme.

**Exo 6** Théorèmes de Dini

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue $f$.

1. On suppose que chaque fonction $f_n$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

2. On suppose que pour tout $x$ fixé, la suite $(f_n(x))$ est croissante. Montrer qu'il y a convergence uniforme.

**Exo 7** Théorème d'Ascoli

Soit $(f_n)$ une suite de fonctions de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers $f$. On suppose que toutes les fonctions $f_n$ sont $k$-Lipschitziennes (avec le même $k$).

1. Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_N)$ une subdivision régulière de $[a, b]$. On note $M_n = \max\{|f_n(a_i) - f(a_i)| \text{ tq } 0 \leq i \leq N\}$. Encadrer $\|f_n - f\|_\infty$ l'aide de $M_n$.

2. Montrer que $f_n$ converge uniformément vers $f$.

**Exo 8** Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $f$ sur un intervalle $I$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :

1. Si les $f_n$ sont croissantes, alors $f$ aussi.

2. Si les $f_n$ sont strictement croissantes, alors $f$ aussi.

3. Si les $f_n$ sont périodiques, alors $f$ aussi.

4. Si les $f_n$ sont continues en $a$, alors $f$ aussi.

**Exo 9** Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de :

1. $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ sur $]-1,1[$, puis sur $[-a,a]$ avec $0 \leq a < 1$.
2. $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, sur $[0,1]$.
3. $f_n(x) = e^{-nx}\sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a,+\infty[$.
4. $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$.
5. $f_n(x) = n\sin(x)(\cos x)^n$.
6. $f_n(t) = \dfrac{2^n t}{1+n2^n t^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
7. $f_n(t) = \dfrac{\sin^2(nt)}{n\sin^2(t)}$ sur $[0;\pi]$.

**Exo 10** Soit $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues convexes convergeant simplement vers une fonction continue $f$. Montrer que la convergence est uniforme.
Indication : Prendre une subdivision régulière de $[a,b]$ et encadrer $f_n$ par les cordes associées.

**Exo 11** Soit $f_n(x) = e^{\frac{(n-1)x}{n}}$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle $]-\infty,b]$.
3. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$ ?

**Exo 12** Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite $(f_n)$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in [0,n]$, et $0$ ailleurs.

**Exo 13** Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, mais que la convergence n'y est pas uniforme.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$, mais que la convergence n'est pas normale.

**Exo 14** Pour $x > -1$, on pose $u(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

1. Montrer que $u$ est définie et continue sur $]-1,+\infty[$.
2. Donner son sens de variations.

**Exo 15** Soit la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$, avec $f_n(x)=\dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$. On note $S$ sa somme.

1. Étudier la convergence simple, normale, uniforme de cette série sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que $S$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que $S$ n'est pas dérivable droite en 0.
4. Montrer que, pour tout $k$, $S(x)=o(x^{-k})$ en $+\infty$.

**Exo 16** On pose $u_n(x)=(1+\dfrac{x}{n})^n$.

1. Étudier la convergence simple de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ sur tout compact
3. Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

**Exo 17** On pose $u_n(x)=(1+\dfrac{x}{n})^n e^{-x}1_{[0;n]}(x)$. Étudier les différents types de convergence de cette suite.

**Exo 18** Étudier la suite de fonctions définies de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x)}{x(1+nx)} & \text{si } x\neq 0\\ 1 & \text{sinon}\end{cases}$

**Exo 19** Étudier la convergence de la suite de fonctions définies sur $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ par :
$f_0(x)=x$ et $f_n(x)=\sin(f_{n-1}(x))$.

**Exo 20** On pose $u_n(x)=x^{2n}\ln x$ pour tout $x\in[0,1]$.

1. Étudier la convergence simple de la série de terme général $u_n$ et calculer la somme de cette série.
   - a. Étudier la convergence uniforme de cette série.
   - b. Montrer l'intégrabilité terme terme sur $[0,1]$ de cette série et obtenir une égalité remarquable.

**Exo 21** Effectuer l'étude complète de la fonction $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

**Exo 22** considérons les fonctions $R_k(x)=\sum\limits_{n\geq k+1}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ et $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}R_k(x)$.

1. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^-$.
2. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}_+$ (monotonie, limite en $+\infty$ et $0$ ainsi qu'un équivalent en $0$ de $f$).
3. Montrer que $f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Exo 23** Soit $a$ un nombre rel strictement positif et $f$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+a}$.

1. Déterminer le domaine définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.

2. Déterminer une autre expression de $f$ l'aide de fonctions élémentaires

**Exo 24** On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de la série de terme général $u_n$.

2. Montrer que la convergence uniforme de la série de terme général $u_n$ sur tout segment $[-a, a]$. Qu'en déduit-on ?

3. Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de terme général $u_n$.

**Exo 25** On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}$. Montrer que $f$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ puis que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{x}$ pour une certaine constante $C$

**Exo 26** Étudier les différents types de convergence de $\sum_{n\geq 0} nx^\alpha e^{-n^2x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

**Exo 27** Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$. On pose $\| f \|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} | f(x) |$.

1. On définit la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ par $f_0 = f$ et $\forall n \geqslant 0$, $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

   a. Montrer que $| f_n(x) | \leqslant \frac{x^n \| f \|_\infty}{n!}$ $\forall n \geqslant 0$.

   b. En déduire la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(f_n)$.

2. On définit une autre suite de fonctions par $g_0 = f$ et $\forall n \geqslant 0$, $g_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x g_n(t)dt$.

   a. On suppose que la suite $(g_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $g$. Déterminer $g$.

   b. Étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite $(g_n)$ (on pourra considérer $g_n - g$).

**Exo 28** Sur $]0,+\infty[$, on considère la suite de fonctions définies par :

$$f_0 = Id \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0,+\infty[, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right).$$

1. Montrer que, pour tout $n$, $f_n$ est bien définie.

2. Étudier sa convergence simple

3. Étudier sa convergence uniforme

**Exo 29** Soit une fonction $f : [a,b] \to [a,b]$ de classe $C^1$ sur son domaine, $(f_n)_n$ la suite des fonctions définie par : $f_0(x) = x$, $f_1 = f$, et $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ $\forall n \geqslant 1$.

1. Montrer que si $\sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| < 1$ $\sum_{k=1}^{+\infty}(f_k(x) - f_{k-1}(x))$ converge uniformément. sur $[a,b]$.

2. En déduire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction constante $C$, que $f(C) = C$ et que $C$ est unique.

**Exo 30** Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ une série convergente de complexes.Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+$, telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \leqslant B_n$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n B_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ (on pourra introduite $A_{p,n} = \sum_{k=p}^{n} a_k$).

2. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(1) = 1$. Montrer que $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n B_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

**Exo 31** Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$ on pose $u_n(x) = \dfrac{x^n \sin(nx)}{n}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction continue, $f$.

   Réponse : Transformation d'Abel.

2. Justifier la dérivabilité de $f$ sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$. En déduire $f(x)$. Réponse : $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$. Réponse : $\dfrac{\pi - 1}{2}$.

**Exo 32** Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

1. Établir l'existence et la continuité de $f$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

   Réponse : $f(x+1) = xf(x) - 1$.

3. Tracer la courbe de $f$.

**Exo 33** Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \dfrac{n(n+1)}{x^{n+1}} \int_0^x (x-t)^{n-1} \sin t \, dt$.

Réponse : Poser $t = xu$ puis intégrer deux fois par parties : $f_n(x) = 1 - \int_0^1 (1-u)^{n+1} x \sin(xu)\, du$ donc $(f_n)$ converge simplement vers la fonction constante $1$, et la convergence est uniforme sur tout intervalle borné.

**Exo 34** Soit $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $f_n = f^{(n)}$ (dérivée $n$-ème). On suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers $\varphi$. Que peut-on dire de $\varphi$ ?

**Exo 35** Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \cos^n x}{n+1}$.

1. Étudier la convergence de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Réponse : Convergence absolue si $|\cos x| < 1$, Semi-convergence si $\cos x = 1$, divergence si $\cos x = -1$.

2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,dx$.

   Réponse : Théorème de convergence monotone en regroupant les termes deux par deux.

3. En déduire $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ sous forme d'une intégrale.

   Réponse : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} -\ln(1-\cos x)\,dx$.

**Exo 36** Soit $f_n(x) = \dfrac{n^x}{(1+x)(1+x/2)\dots(1+x/n)}$.

1. Étudier la convergence simple des fonctions $f_n$.

   Réponse : $\dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 - \dfrac{x(x+1)}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2. On note $f = \lim f_n$. Calculer $f(x)$ en fonction de $f(x-1)$ lorsque ces deux quantités existent.

3. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition (on calculera $f_n'(x)/f_n(x)$).

**Exo 37** Montrer, pour $x > 0$ : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt$.

Réponse : $\dfrac{1}{t+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$.

**Exo 38**

1. Étudier la convergence simple, uniforme, de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \big(\arctan(x+n) - \arctan(n)\big)$.

   Réponse : Convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Chercher une relation simple entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

   Réponse : $f(x+1) = f(x) + \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.

4. Trouver $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   Réponse : $f(x+1) - f(x) \sim \dfrac{1}{x}$ donc la suite $(f(n))$ diverge et $f$ est croissante $\Longrightarrow \lim = +\infty$.

**Exo 39**

Étudier la convergence de la suite de fonctions définies par : $f_n(x) = \dfrac{n(n+1)}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x (x-t)^{n-1} \sin t \, dt$.

Réponse : Poser $t = xu$ puis intégrer deux fois par parties

**Exo 40**

Fonction $\zeta$ et $\eta$ de Riemann et constante d'Euler

Soit $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $\zeta$.

2. Montrer que $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

3. Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$

   Indication : majorer $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ par comparaison une intégrale.

4. Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$

5. Soit $\gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$.

   Montrer que $\gamma = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)$ puis que $\gamma = 1 - \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k)-1}{k}$.

6. a. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \dfrac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.

   b. En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$ : $\coth x = \dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{e^{-2x}-1} = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2\pi^2}$.

   c. En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

7. pour $x > 0$ : $\eta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

   a. Établir pour $x > 1$ : $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

   b. En déduire $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ pour $x \longrightarrow 1^+$.

   c. Montrer que $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + ø(1)$. On remarquera que $\dfrac{1}{x-1} = \displaystyle\int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.

   c. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

**Exo 41** Non interversion limite-intégrale.

1) Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

a) Chercher la limite simple, $f$, des fonctions $f_n$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) Vérifier que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(t)\,dt$.

2) a) Déterminer la limite simple des fonctions $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'il y a convergence uniforme.

(Utiliser la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$) b) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

**Exo 42** Soit $(u_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par : $u_0(x) = x$ pour tout réel $x$ strictement positif.
$u_n(x) = \dfrac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}$ pour tout entier naturel $n$ , pour tout rel $x$ strictement positif.

1) Étude de la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ :

a) Soit $u : \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & u(x) = 1 \end{array}$ Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $u$ sur $]0,+\infty[$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, 0 < u_n(x) \leqslant 1$

a) Soit $(U_n)$ la suite de fonctions définies pour tout entier naturel $n$ sur $]0,+\infty[$ par : $U_n = \dfrac{1}{u_n}$.

i) Montrer que : $U_n = \dfrac{1+U_n(x)}{2\sqrt{U_n(x)}}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0,+\infty[$.

ii) En déduire que : $|U_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|U_n(x) - 1|, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0,+\infty[$.

iii) Montrer que la suite de fonctions $(U_n)$ converge simplement vers $u$ sur $]0,+\infty[$ et que la suite de fonctions $(U_n)$ converge uniformément vers $u$ sur tout compact de $]0,+\infty[$ .

iv) En déduire que la suite de fonctions $(u_n)$ converge uniformément vers $u$ sur tout compact de .

2) Soit $(v_n)$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in ]0,+\infty[, \begin{cases} v_0(x) = 1 \\ v_n(x) = v_n(x)\dfrac{1+v_n(x)}{2} \end{cases}$$

a) Soit $x$ un rel strictement positif Montrer que les suites $(u_n(x)v_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ sont adjacentes.

On définit alors : $f$ : $\begin{array}{ccl} ]0,+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n(x) \end{array}$ .

b) Montrer que les suites de fonctions $(u_n v_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent uniformément vers $f$ sur tout compact de $]0,+\infty[$ .

c) En déduire que $f$ est continue sur $]0,+\infty[$.

**Exo 43**

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \dfrac{x}{n(1+x)}\right)$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que la fonction $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. Majorer convenablement le reste de la série, et montrer qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

   Réponse : $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$.

3. Y a-t-il convergence normale ?

   Réponse : Non, $\|u_n\|_\infty = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Fin

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Courbes et Surfaces

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

- Avec Windows XP, on était au bord du ravin.
Avec Windows Vista, on a fait un grand pas en avant
- La nouvelle version de Windows 7 est presque terminée, il ne reste plus qu'à y incorporer les erreurs.
.

**Frenet-Serret**

Mathématicien du jour

- Jean Frédéric Frenet (1816-1900) était un mathématicien, astronome et météorologue français. Il est connu pour avoir découvert (indépendamment) les formules de Serret-Frenet. Il fait ses études à l'École Normale Supérieure.
- Joseph Serret (1819-1885) (photo ci-dessus) est un mathématicien et astronome français, spécialement connu pour les formules de géométrie différentielle associées au trièdre de Serret-Frenet. Polytechnicien en 1840.

# 1 Courbes.

## 1.1 Courbes planes.

**Exo 1**

On considère les deux ellipses : $(\xi) : \dfrac{x^2}{4a^2} + \dfrac{y^2}{4b^2} = 1$
$(\xi') : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

1. A quelle condition une droite d'ééquation : $ux + vy + w = 0$ est tangente $(\xi')$

2. Pour tout point $M$ de $(\xi)$ on mène les deux tangentes a $(\xi')$ qui recoupent $(\xi)$ en $P$ et $Q$ montrer que la droite $(PQ)$ est tangente $(\xi')$
Utiliser les coordonnées polaires )

**Exo 2**

Soit $D_\alpha$ la droite passant par $O$ d'angle polaire $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

1. Montrer que $D_\alpha$ recoupe $(\Gamma)$ en deux points $M_\alpha, M'_\alpha$

2. Calculer la longueur du segment $[M_\alpha, M'_\alpha]$

3. Déterminer le lieu $H$ des milieux de $[M_\alpha, M'_\alpha]$ quand $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

4. En déduire une construction géomterique des points $M_\alpha, M'_\alpha$

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 3** Soit P la parabole d'ééquation : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

1. Quel est l'ensemble $(\xi)$ des points du plan par lesquels passent trois normales la parabole

2. Quel est l'ensemble $(\xi') \subset (\xi)$ des points tel que deux parmi ces trois droites sont perpendiculaires

**Exo 4** Soit $(\gamma)$ la courbe de représentation paramétrique définie par :

$$\begin{cases} x(t) = a(1 + \cos(t)) \\ y(t) = a\sin(t) \end{cases} \quad \text{tel que } a > 0$$

1. Reconnaitre la nature géometrique de $(\gamma)$

2. Soit $(\Gamma)$ l'ensemble des projections orthogonales de O sur la tangentes a $(\gamma)$. Donner une repésentation paramétrique de $(\Gamma)$ .

3. En déduire une ééquation polaire de $(\Gamma)$

4. Soit $M$ un point de $(\Gamma)$ d'angle polaire $\theta$, $\overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent en $M$ à $(\Gamma)$ orienté dans le sens des $\theta$ croissants,exprimer l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{\tau}}\right)$
   En déduire les poins de $(\Gamma)$ où la tangente est verticale ou horizontale

**Exo 5** Soit $(\gamma)$ arc géométrique plan tel que : $\forall M \in (\gamma)$ on a : l'angle $\widehat{MOC}$ est droit où $C$ est le centre de courbure de $(\gamma)$ au point $M$

1. Si $\alpha$ désigne l'ange entre l'axe $(Ox)$ et la tangente à $(\gamma)$ au point $M$ montrer que :

$$x^2 + y^2 = \left(x\frac{dy}{d\alpha} - y\frac{dx}{d\alpha}\right)$$

2. Si $\theta$ désigne l'ange entre la droite $(OM)$ et l'axe $(Ox)$. Montrer que : $\dfrac{d\theta}{d\alpha} = 1$
   On pourra utiliser les coordonnées polaires avec $r = OM$.

3. Soit $\beta$ l'angle entre la droite $(OM)$ et la tangente a $(\gamma)$ au point $M$, justifiez que $\tan(\beta) = \dfrac{r}{r'}$.

4. En déduire que $(\gamma)$ est une spirale.

**Exo 6** Soit $(\gamma)$ l'arc géométrique plan définie par l'ééquation polaire :

$$r(\theta) = \sin^n\left(\frac{\theta}{n}\right) \quad \text{tel que } n \in \mathbb{N}^*, 0 < \theta < n\pi$$

1. calculer $||\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}||$.

2. En déduire que si $\beta$ est l'angle entre la droite $(OM)$ et la tangente $(\gamma)$ au point $M$ alors : $\beta = \dfrac{\theta}{n}$.

3. En déduire l'angle $\alpha$ entre l'axe $(Ox)$ et la tangente $(\gamma)$ au point $M$, puis $R$ le rayon de courbure.

4. Soit $M'e$ la projection orthogonale de $C$, centre de courbure de $(\gamma)$ au point $M$, sur la droite $(OM)$, montrer que $M'$ est l'image de $M$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\dfrac{1}{n+1}$

**Exo 7** Construire les courbes d'ééquation polaire :

1. $\rho(\theta) = \dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta) - 1}$
2. $\rho(\theta) = 1 + \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
3. $\rho(\theta) = \theta \sin(\theta)$
4. $\rho(\theta) = 4\cos(\theta)\cos(2\theta)$
5. $\rho(\theta) = 2\cos(\theta) - \cos(2\theta)$
6. $\rho(\theta) = 1 - \tan(2\theta)$

**Exo 8** Soit $(\gamma)$ la courbe de représentation paramétrique définie par :
$\begin{cases} x(t) = \sqrt{\cos(t)} \\ y(t) = \sqrt{\sin(t)} \end{cases}$ tel que $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$
Quels sont les points pour lesquels le centre de courbure coïncide avec l'origine

**Exo 9** Déterminer les courbes pour lesquelles
$\widehat{MOC} = \dfrac{\pi}{2}$ tel que $C$ centre de courbure de la courbe au point $M$

**Exo 10** Soit $(\gamma)$ courbe plane parametrée de classe $\mathcal{C}^3$, $(\gamma_1)$ l'ensemble des points, $C$ centres de courbure de $(\gamma)$, et $(\gamma_2)$ l'ensemble des milieux $I$ des segments $[M, C_1]$
Montrer que la tangente $(\gamma_2)$ au point $I$ est orthogonal $\overrightarrow{MC_1}$

**Exo 11** Soit $(\gamma)$ une courbe plane parametrée de classe $\mathcal{C}^1$, tout point $M$ de $(\gamma)$ on associé $H$ la projection orthogonale de O sur la tangente en M $(\gamma)$, et soit $(\gamma_1)$ l'ensemble de ces projections.
Montrer que la normale $(\gamma_1)$ au point $H$ passe par le milieu de $[O, M]$

**Exo 12** Déterminer les coordonnées du centre de courbure au point $M$ pour les courbes suivantes :

1. Cycloïde : $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.
2. Astéroïde : $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.
3. Hyperbole : $xy = 1$.
4. Ellipse : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
5. Spirale : $\rho = e^{\theta}$.
6. Cardioïde : $\rho = 1 + \cos\theta$.

## 1.2 Courbes gauches.

**Exo 13** On considère la courbe $\gamma$ définie par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^4}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{t^3}{1+t^2} \\ z(t) = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

On suppose qu'ils existent quatre points $M_1, M_2, M_3, M_4$ de $\gamma$ de paramètres respectifs $t_1, t_2, t_3, t_4$ qui sont coplanaires. Soit le plan $P$ d'équation $ax + by + cz - d = 0$ passe par ces points.

1. Montrer que $t_1, t_2, t_3, t_4$ sont les racines (distinctes) du polynôme $at^4 + bt^3 + ct^2 - d$.
2. En déduire que $t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 = 0$
3. En déduire que $\dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} + \dfrac{1}{t_3} + \dfrac{1}{t_4} = 0$ si aucun des $t_i$ n'est nul.

**Exo 14** Soit $\gamma$ une courbe de l'espace, et $\gamma_1$ la courbe décrite par le centre de courbure, $I$, en un point $M$ de $\gamma$. On suppose que la courbure de $\gamma$ est constante et sa torsion non nulle. On note par $\tau, \tau_1, c, c_1$ les torsions et courbure respectives de $\gamma$ et $\gamma_1$. $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ et $(\vec{T}_1, \vec{N}_1, \vec{B}_1)$ les repères de Serret-Frenet associés respectivement à $\gamma$ et $\gamma_1$ et enfin $s$ et $s_1$ les abscisses curvilignes relatives aux deux courbes $\gamma$ et $\gamma_1$

1. Justifier les formules suivantes ;
$$\frac{d\vec{I}}{ds} = -\frac{\tau}{c}\vec{B},\ \vec{T}_1 = \vec{B},\ \frac{ds_1}{ds} = -\frac{\tau}{c},\ \vec{N}_1 = -\vec{N}$$
2. En déduire que que la courbure de $\gamma_1$ est aussi constante, préciser cette constante.
3. En déduire que $\tau_1 = -\dfrac{c^2}{\tau}$.

## 2 Surfaces.

**Exo 15** Soient $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ les surfaces d'équations $x^2 + y^2 + xy = 1$ et $y^2 + z^2 + yz = 1$, et $\gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

1. Donner en tout point de $\gamma$ le vecteur tangent..
2. Montrer que tout point $M(x, y, z)$ de $\gamma$ vérifie $(x - z)(x + y + z) = 0$.
3. En déduire que $\gamma$ est la réunion de deux courbes planes.
4. Quelle est la projection de $\gamma$ sur $Oxz$ ?

**Exo 16** Soit $\gamma$ le cercle intersection de la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et du plan d'équation $x + y = 1$, et $S = (1, 1, 1)$. Déterminer l'équation cartésienne du cône $\Sigma$ de sommet $S$ s'appuyant sur $\gamma$.

Réponse : $\forall M \in \Sigma\ \exists t \in \mathbb{R}, \exists P \in \gamma$ tel que $\overrightarrow{SP} = t\overrightarrow{MP}$, on trouve alors : $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + 2z = 1$.

**Exo 17** Soit $\gamma$ la courbe d'équations dans $\mathbb{R}^3$ :
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x + 2 & = 0 \\ x + z & = 1. \end{cases}$$
et $\Sigma$ la surface engendrée par la rotation de $(\Gamma)$ autour de $Oz$.

1. Dire pourquoi $\gamma$ est un courbe plane, préciser sa nature.
2. Pour $M(x, y, z) \in \Gamma$, on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Montrer que $2z^2 = r^2$.
3. En déduire que $\Gamma$ est incluse dans l'hyperboloïde de révolution d'équation $2z^2 = x^2 + y^2$.
4. Conclure que cette hyperboloïde de révolution n'est autre que $\Sigma$.

**Exo 18**

Soit $(\Gamma)$ : $\begin{cases} x(t) = a\cos(t)/\cosh(mt) \\ y(t) = a\sin(t)/\cosh(mt) \\ z(t) = a\tanh(mt). \end{cases}$

1. Montrer que $(\Gamma)$ est tracée sur $(\Sigma)$, la surface de révolution autour de $Oz$ et d'équation : $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2. Donner un paramétrage de $\Sigma$ : $(u,v) \mapsto M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

3. Montrer que la tangente à la méridienne passant par $M(u,v)$ est dirigée par $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}$ et la tangente $(\Gamma)$ passant par $M(t,mt)$ est dirige par $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial u} + m\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial v}$.

4. Vérifier que le cosinus de ces deux vecteurs est constant.

5. En déduire que $(\Gamma)$ coupe les méridiennes de $(\Sigma)$ suivant un angle constant (loxodromie).

6. Réciproquement, soit une loxodromie de $(\Sigma)$ : une courbe $\gamma = \{u(t), v(t),\ t \in I\}$ tracée sur $(\Sigma)$ tel que le cosinus de l'angle entre cette courbe et une méridienne de $(\Sigma)$.
   - a. Montrer que ce cosinus vaut : $\dfrac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}$.
   - b. En déduire que $\dfrac{v'}{u'} = m$ est constant.
   - c. En prenant $u(t) = t$, en déduire que $\gamma$ est déduite de $(\Gamma)$ par rotation autour de $Oz$.
   - d. Donner l'équation polaire de la projection de $(\Gamma)$ sur $xOy$, dessiner cette projection.

FIN

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Séries entières
# Fonctions holomorphes

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Un chef d'entreprise cherche un ingénieur. Un polytechnicien (ou un centralien, voire pire : un normalien) se présente :
« Bien monsieur, demande le patron, j'aimerais que vous comptiez jusqu'à dix.
- Si vous voulez. Mais dans quelle corps dois-je compter ?
- Ben vous comptez, voilà !
- Oui, mais dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{R}^*$ ? Doit-on considérer ce corps comme commutatif ou pas ? La loi de composition interne est-elle + ou . ?
- Bon, okay, laissez tomber... »

Mathématicien du jour

Brook Taylor (1685-1731)

est un éclectique homme de sciences anglais . Il s'intéressa aux mathématiques, à la musique, la peinture et la philosophie. Il ajouta aux mathématiques une nouvelle branche appelée « calcul de différences finies », inventa l'intégration par partie, et découvrit les séries appelées « développement de Taylor ».

## 1 Séries Entières

Exo 1

Exercices d'oral.

1 Oral Mines MP 2003 :

Quel est le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{k=0}^{\infty} \cos^k\left(\frac{2k\pi}{5}+\alpha\right)x^k$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

Réponse : La suite $\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{5}+\alpha\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est périodique de période $5$, donc prend au plus cinq valeurs distinctes. soit $a$ celle de plus grande valeur absolue. Montrer que $R = \frac{1}{|a|}$.

2 Ensi MP 2003 : Rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}}$ et étude pour $x = \pm R$.

Réponse : Trouver un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{n} k^{-\alpha}$

**Exo 2** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Déterminer les rayons de convergence des séries :

1. $\sum a_n^2 z^n$.
   Réponse : $R' = R^2$.
2. $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$.
   Réponse : $R' = \infty$.
3. $\sum \frac{n!\, a_n}{n^n} z^n$.
   Réponse : $R' = eR$.

**Exo 3** On suppose que les séries $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence $R$ et $R'$. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est égal à $\min(\sqrt{R}, \sqrt{R'})$.

**Exo 4** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = \left(\frac{x(1-x)}{2}\right)^{4^n}$.

1. Montrer que $]-1, 2[$ est le domaine de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$.
2. On développe $u_n(x)$ par la formule du binôme : $u_n(x) = \sum_{4^n \leq k \leq 2.4^n} a_k x^k$. (en convenant que les $a_k$ non définis valent zéro).
   Montrer que pour $0 \leq k \leq 4^n$, on a $|a_k| \leq C_{4^n}^{4^n/2} \Big/ 2^{4^n}$ avec égalité pour $k = 4^n/2$.
   En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 1} a_k x^k$ est égal $1$
   Que doit-on retenir de cet exercice

**Exo 5** Développer en série entière les fonctions suivantes :

1. $\ln(1 + x + x^2)$.
   Réponse : $\ln(1 + x + x^2) = \ln(1 - x^3) - \ln(1 - x)$
2. $(x - 1)\ln(x^2 - 5x + 6)$.
   Réponse : Factoriser : $x^2 - 5x + 6$.
3. $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
   Réponse : Dériver
4. $\frac{x-2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
   Réponse : $\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{2n + 5 + 3(-1)^n}{4} x^n$.
5. $\frac{1}{1 + x - 2x^3}$.
   Réponse : Décomposer en éléments simples.
6. $\frac{1 - x}{(1 + 2x - x^2)^2}$.
   Réponse : Intégrer.
7. $e^{-2x^2} \int_0^x e^{2t^2}\, dt$.
   Réponse : Dériver

**Exo 6** Développement en série entière de $\zeta(1 + x) - 1/x$

1. Vérifier que pour $x \in ]0, +\infty[$ on a : $\zeta(1 + x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{1+x}} - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)\right)$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}$ on pose $\gamma_p = \lim_{k \to +\infty} \left(\frac{\ln^p(1)}{1} + \cdots + \frac{\ln^p(k)}{k} - \frac{\ln^{p+1}(k+1)}{p+1}\right)$. Justifier l'existence de $\gamma_p$ et montrer que $|\gamma_p| \leq (p/e)^p$.
3. Montrer alors que pour $x \in ]0, 1[$ on a : $\zeta(1 + x) - \frac{1}{x} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \gamma_p}{p!} x^p$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 7**

Calculer les sommes des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

   Réponse : $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$.

   Réponse : $\dfrac{x(1+4x+x^2)}{(1-x)^4}$.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+3)}$.

   Réponse : $\dfrac{2(1-x^2)\ln(1-x)+x^2+2x}{4x^3}$ (décomposer en éléments simples).

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\cosh(na)$.

   Réponse : $-\dfrac{1}{2}\ln(1-2x\cosh a+x^2)$.

6. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\sin^2(n\theta)}{2^n}$.

   Réponse : $1 - \dfrac{5\cos 2\theta-4}{(5-4\cos 2\theta)^2}$ (linéariser).

7. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n+1}x^n$.

   Réponse : $\dfrac{2x-1}{(1-x)^2} - \dfrac{2\ln(1-x)}{x}$.

8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

   Réponse : $\cosh\sqrt{x}$ pour $x \geq 0$ et $\cos\sqrt{-x}$ pour $x \leq 0$.

9. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2(n\theta)}{n!}x^{2n}$.

   Réponse : $\dfrac{e^{x^2}}{2} - \dfrac{e^{x^2\cos 2\theta}}{2}\cos(x^2\sin 2\theta)$.

10. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 x^n}{n!}$.

    Réponse : $(x+15x^2+25x^3+10x^4+x^5)e^x$.

11. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

    Réponse : $\dfrac{e^x+2e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)}{3}$, $(f'''=f)$.

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}^{n+1}x^n$.

    Réponse : $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}-2x}{2x\sqrt{1-4x}}$.

13. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_1^x \ln^n t\,dt$.

    Réponse : $\dfrac{x^2-1}{2}$.

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$.

    Réponse : $-\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

**Exo 8**

Fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ non DSE

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n+n^2 ix}$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas développable en série entière autour de $0$.

Réponse : $|f^{(k)}(0)| = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}e^{-n} \geq k^{2k}e^{-k}$ et $R=0$.

**Exo 9**

On note $T_n$ le nombre de partitions d'un ensemble $n$ éléments.

1. Montrer que $T_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T_k$. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n x^n}{n!}$

2. Préciser le rayon de convergence, puis calculer $f'$. En déduire que $f(x) = e^{e^x - 1}$.

**Exo 10**

Calcul d'intégrales.

Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leurs existences.

1. $\int_0^1 t^t \, dt$

2. $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t) \, dt$

3. $\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2} \, dt$.

4. $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t} \, dt$.

**Exo 11**

Produit de Cauchy.

1. Soit $(c_n)$ le produit de Cauchy de la suite $(a_n)$ par la suite $(b_n)$. Montrer que si les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent vers $A,B,C$, alors $C = AB$

   Réponse : considérer les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ puis utiliser le principe de la continuité radiale.

2. Soit $(c_n)$ le produit de Cauchy de la suite $(a_n)$ par la suite $(b_n)$. On suppose que la série $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon $R > 0$ et que $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lambda$ avec $|\lambda| < R$.

   Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{b_n} = A(\lambda)$.

   Réponse : $\frac{c_n}{b_n} = a_0 + a_1 \frac{b_{n-1}}{b_n} + \cdots + a_n \frac{b_0}{b_n} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_{n,k}$ puis appliquer le théorème de convergence dominée.

**Exo 12**

Étude sur le cercle de convergence

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

   a. Montrer que le rayon de convergence est égal à 1.

   b. Étudier la convergence de $f$ pour $x = \pm 1$.

   c. Montrer que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

2. Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites de réels strictement positifs telles que $b_n \sim a_n$. On suppose que le rayon de convergence de la série entière $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est 1 et que la série diverge pour $x = 1$.

   a. Montrer que $\lim_{x\to 1^-} A(x) = +\infty$.

   b. On pose $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer que $B(x) \sim A(x)$ pour $x \longrightarrow 1^-$.

   Réponse : Démonstration de type Césaro.

Exo 13

Équations différentielles.

1 Montrer que l'équation $3xy' + (2-5x)y = x$ admet une solution développable en série entière autour de $0$.

2 DSE de tan

a En utilisant la relation : $\tan' = 1 + \tan^2$, montrer que $\tan^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-1-k)}$.

b Montrer que la série de Taylor de tan en 0 converge absolument sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

c Soit $f$ la somme de la série précédente. Montrer que $f' = 1 + f^2$ et en déduire que $f = \tan$.

d Prouver que le rayon de convergence est exactement $\pi/2$.

3 On pose $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

a Montrer que $f$ admet un développement en série entière au voisinage de $0$ et préciser le rayon de convergence.

b Chercher une équation différentielle d'ordre 1 vérifie par $f$. En déduire les coefficients du développement en série entière de $f$.

c Donner le développement en série entière de $\arcsin^2 x$.

Exo 14

Fonction $\zeta$

Pour $|x| < 1$ on pose : $Z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^n$.

1 Justifier minutieusement que $$\begin{cases} Z(x) = \sum_{p\geq 1} \dfrac{x}{p^2 - x} \\ Z'(x) = \sum_{p\geq 1} \dfrac{1}{p^2-x} + \sum_{p\geq 1} \dfrac{x}{(p^2-x)^2} \\ Z^2(x) = \sum_{p\neq q} \dfrac{x^2}{q^2-p^2}\left(\dfrac{1}{p^2-x} - \dfrac{1}{q^2-x}\right) + \sum_{p\geq 1} \dfrac{x^2}{(p^2-x)^2} \end{cases}$$

2 Pour $p$ fixé, montrer que $\sum_{q\neq p} \dfrac{1}{q^2-p^2} = \dfrac{3}{4p^2}$.

3 En déduire que $Z$ vérifie l'équation différentielle : $2xZ'(x) - 2Z^2(x) + Z(x) = 3x\zeta(2)$

4 En déduire la relation de récurrence : $\forall\, n \geq 2,\ (n + \frac{1}{2})\zeta(2n) = \sum_{p=1}^{n-1} \zeta(2p)\zeta(2n-2p)$.

5 Sachant que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$, en déduire $\zeta(4)$ et dire comment calculer $\zeta(2n)$, $\forall n \geq 3$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 15** Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ :

1. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \neq 0$.
   Réponse : $R = 1$.

2. $(a_n)$ est périodique non nulle.
   Réponse : $R = 1$.

3. $a_n = \sum_{d|n} d^2$.
   Réponse : $R = 1$.

4. $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$.
   Réponse : $R = \dfrac{1}{e}$.

5. $a_{2n} = a^n$, $a_{2n+1} = b^n$, $0 < a < b$.
   Réponse : $R = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

6. $a_{n^2} = n!$, $a_k = 0$ si $\sqrt{k} \notin \mathbb{N}$.
   Réponse : $R = 1$.

7. $a_n = (\ln n)^{-\ln n}$.
   Réponse : $R = 1$.

8. $a_n = e^{\sqrt{n}}$.
   Réponse : $R = 1$.

9. $a_n = \dfrac{1.4.7\ldots(3n-2)}{n!}$.
   Réponse : $R = \dfrac{1}{3}$.

10. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}^{\sqrt{n}}}$.
    Réponse : $R = 1$.

11. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^{\ln n}$.
    Réponse : $R = 1$.

12. $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$.
    Réponse : $R = \sqrt{2} - 1$.

13. $a_n = C_{kn}^n$.
    Réponse : $R = \dfrac{(k-1)^{k-1}}{k^k}$.

14. $a_n = e^{(n+1)^2} - e^{(n-1)^2}$.
    Réponse : $R = 0$.

15. $a_n = \displaystyle\int_{t=0}^{1} (1+t^2)^n \, dt$.
    Réponse : $R = \dfrac{1}{2}$, $2t \leq 1 + t^2 \leq 2$.

16. $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}$.
    Réponse : $R = 1$, $a_n \sim \dfrac{\ln n}{n^2}$.

17. $a_n = \dfrac{\cos n\theta}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.
    Réponse : $R = 1$.

# 2 Fonctions holomorphes

**Exo 16** Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série de rayon $R > 0$ telle que pour tout $z \in \mathring{D}(0, R)$ on a $f(z) \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est constante.

**Exo 17** Soit $U$ un ouvert connexe non vide de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $f$ est constante,
(b) $\mathrm{Re}(f)$ est constante,
(c) $\mathrm{Im}(f)$ est constante,
(d) $\overline{f}$ est holomorphe sur $U$,
(e) $|f|$ est constante.

**Exo 18** Soit $U$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions holomorphes dans $U$, convergeant uniformément sur tout compact de $U$. On note $f$ la limite des $f_n$.

1. On suppose que $f_n(z) \neq 0$, $\forall z \in U$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Prouver que, ou $f = 0$, ou bien $f(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

2. On suppose que $f_n$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f$ est constante ou injective.

3. Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que l'équation $f(z) = 0$ a au moins $q+1$ racines (comptées avec leur multiplicité) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(z) = 0$ a au plus $q$ racines. Prouver que $f = 0$.

**Exo 19** Étudier les zéros de la fonction $f(z) = \dfrac{\pi}{1-z}$ . Est-ce contradictoire avec le principe des zéros isolés ?

**Exo 20** Soit $f$ holomorphe dans le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| > R\}$ et $f$ non constante. Nous supposons aussi que $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z) < 1$ et que $|f|$ est continue sur $\overline{D}$. Montrer que :

1. $|f(z)|$ admet son maximum sur $C_R = \{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z| = R\}$,

2. la fonction $M(r) = \sup\limits_{z\in C_r} |f(z)|$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]R, +\infty[$.

**Exo 21** Soit $f$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On suppose que Re$f$ est bornée. Montrer que $f$ est constante.

**Exo 22** Soit $f$ une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $U$ de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que si $|f|$ possède un minimum local en $a \in U$, alors $f(a) = 0$.

2. Utiliser ce résultat pour prouver le théorème de D'Alembert-Gauss.

**Exo 23** Soit $U$ le disque unité ouvert et $f : U \longrightarrow U$ une fonction holomorphe. Montrer que si f possède deux points fixes distincts, alors $f(z) = z, \forall z \in U$.

**Exo 24** Soit $f$ entière telle que Ima$f(x) = 0$ et Re$f(ix) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f$ est impaire.

Fin

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Espaces de Hilbert
# Séries de Fourier

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

Un vieux milliardaire téléphone à son conseiller psychologue : J'ai 60 ans et je veux me marier avec une jeune fille de 20 ans. Pensez-vous que j'aie plus de chance de l'amener à m'épouser si je lui dis que j'ai juste 50 ans ?
Le conseiller : A mon avis, vous feriez mieux de lui dire que vous approchez des 80 ans !

**Joseph Fourier (1768-1830)**

Mathématicien et physicien français, connu pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques convergentes appelées séries de Fourier et leur application au problème de la propagation de la chaleur. Il participe à la Révolution, manquant de peu de se faire guillotiner, il prend part à la campagne d'Égypte de Napoléon et occupe un haut poste de diplomate.

Mathématicien du jour

## 1 Espaces de Hilbert.

**Exo 1** Projection sur un sous-espace.

Pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, on note $F_N$ le sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ formé des suites $(x_n)_{n\geq 0}$ telles que $\sum_{n=0}^{N} x_n = 0$.

1. Montrer que l'application $(x_n)_{n\geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{N} x_n$ est linéaire continue de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Que peut-on déduire sur $F_N$ ? Conclure que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = F_N \bigoplus (F_N)^{\perp}$.

2. Soit $E = \{(y_n)_{n\geq 0}$ ; **pout tous** $1 \leq i < j \leq N$ **on ait** $y_i = y_j$ **et** $y_n = 0$ **pour tout** $n > N\}$.
   a. Montrer que l'orthogonal $E \subset (F_N)^{\perp}$.
   b. Montrer que $E = (F_N)^{\perp}$ (remarquer que, pour tous $0 \leq i < j \leq N$, la suite $(x_n)$ telle que $x_i = 1$, $x_j = -1$ et $x_n = 0$ si $n \notin \{i, j\}$, appartient à $F_N$ ).

**Exo 2** Calcul de la projection.

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ (espace de Hilbert réel). On note $C = \{x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in H\ ;\ \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \geq 0\}$.

1. Démontrer que $C$ est convexe fermé.
2. Déterminer la projection sur ce convexe $C$.
3. Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

**Exo 3** Calcul de la projection.

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, espace de Hilbert réel. On note $C = \{x = (x_n)_{n\geqslant 0} \in H\ ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \geqslant 0\}$.

1. Démontrer que $C$ est convexe fermé.
2. Déterminer la projection sur ce convexe $C$.
3. Reprendre la question précédente avec $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

**Exo 4** Projection sur un sous-espace fermé.

Soit $H$ un espace de Hilbert, et $F$ un sous-espace fermé de $H$, non réduit à $\{0\}$. On note $p$ la projection orthogonale de $H$ sur $F$. Démontrer que :

1. $p \circ p = p$.
2. $\forall (x, y) \in H, < p(x), y > = < x, p(y) >$.
3. $\|p\| = 1$.

**Exo 5** L'espace $\ell^2(I)$ et $\ell^2(\mathbb{N})$.

On rappelle que l'espace $\ell^2(I, \mathbb{C})$ est l'ensemble des familles $x = (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ , indexées par $I$, et telles que :

$$\|x\| = \sup \left\{ \left( \sum_{\alpha \in F} |x_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; F \subset I \text{ et } F \text{ est un ensemble fini} \right\} < +\infty.$$

Montrer que dans le cas où $I = \mathbb{N}$, on a en fait : $\|x\| = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

**Exo 6** Compacité .

Prouver que la boule unité fermée de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ n'est pas compacte.

**Exo 7** Quelques suites de suites.

Dire si les suites suivantes sont convergentes dans $\ell^2$, et si c'est le cas, calculer leur limite.

1. $X_n = (\frac{1}{n}, 0, 0, 0, \cdots),$
2. $X_n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, 0, 0, \cdots),$
3. $X_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, \cdots),$
4. $X_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$
5. $X_n = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{nm^3}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$
6. $X_n = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{nm^{\frac{1}{3}}}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}.$

**Exo 8** Distance à un sous-espace fermé.

Soit $H$ un espace de Hilbert, et $F$ un sous-espace fermé de $H$, non réduit à $\{0\}$. On note $p$ la projection orthogonale de $H$ sur $F$. Si $x$ est un élément de $H$, on appelle distance de $x$ à $F$ la quantité $d(x, F) = \inf(\|x - y\| ; y \in F)$.

1. Montrer que $d(x, F) = \|x - p(x)\|$.
2. Montrer que $d(x, F) = \max\left(\{ |<x, z>| ; z \in F^\perp \text{ et } \|z\| = 1\}\right)$.
3. On suppose dans cette question que $F$ est un sous-espace de dimension finie, et on note $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de $F$.
   a. Quel résultat du cours assure l'existence d'une telle base orthonormale ?
   b. Déterminer en fonction de $e_1, \cdots, e_n$, l'expression de $p(x)$.
   c. En déduire la valeur de :
   $$\inf\left(\left\{\int_0^1 |t^2 - at - b|^2 dt ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}\right).$$
4. On suppose désormais que $F$ est un sous-espace de dimension infinie. Justifier que $F$ posséde une base hilbertienne, puis exprimer $p(x)$ en fonction de cette base.
5. On suppose désormais que $H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$. Pour $n$ un entier fixé, on pose
   $$M = \{x \in H ; \sum_{k=0}^{n} x_k = 0\}$$
   Vérifier que $M$ est un sous-espace fermé de $H$. Chercher un sous-espace $N$ tel que $M \bigoplus N = H$. Donner la distance de l'élément $(1, 0, 0, \cdots)$ à $M$.

**Exo 9** Complétude.

On se propose de démontrer que l'espace $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ est complet pour la norme usuelle issue du produit scalaire, $\|x\| = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $(v(n))_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe donc $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, si $n, l \geqslant N(\varepsilon)$, alors : $\|v(n) - v(l)\| \leqslant \varepsilon$.

1. Montrer que l'on a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $n, l \geq N(\varepsilon)$, $|v(n)_k - v(l)_k| \leqslant \varepsilon$.

2. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} v(n)_k = v_k$ existe pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\sum_{k\geqslant K} v(N(\varepsilon))_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$.

4. Montrer que pour tout $L \geqslant K$, on a $\left(\sum_{L\geqslant k\geqslant K} v_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\varepsilon$.

5. En déduire que l'on a $v \in \ell^2(\mathbb{N})$, que $\lim_{n\to+\infty} \|v(n) - v\| = 0$, et donc que l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|.\|$.

**Exo 10** Opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Soit $H$ un espace de Hilbert de dimension infinie, $(e_n)_{n\geqslant 0}$, $(f_n)_{n\geqslant 0}$, $(g_n)_{n\geqslant 0}$ trois bases hilbertiennes de $H$, et $T$ un opérateur linéaire continu sur $H$.

1. Montrer que, dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{p=0}^{+\infty} \|T^* g_p\|^2$.

2. En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|T^* f_n\|^2$.

   On fixe désormais une base hilbertienne $(e_n)_{n\geqslant 0}$ de $H$. On dira que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt si $\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2 < +\infty$.

   Par la question précédente, cette propriété ne dépend pas de la base hilbertienne choisie. On note $HS(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur $H$, et pour $T \in HS(H)$, on note $\|T\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \|Te_n\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

3. Montrer que $\|T\| \leq \|T\|_2$, et que $HS(H) \neq \mathcal{L}(H)$.

4. Montrer que $HS(H)$ muni de la norme $\|.\|_2$ est un espace de Hilbert (on précisera le produit scalaire associé). Pour démontrer la complétude, on remarquera qu'une suite de Cauchy pour $HS(H)$ muni de $\|.\|_2$ est aussi une suite de Cauchy pour L(H) muni de $\|.\|$. On rappelle que $\mathcal{L}(H)$ muni de $\|.\|$ est complet.

5. Soit $T \in HS(H)$. On note $P_n$ le projecteur orthogonal sur $\mathrm{vect}(e_0, \cdots, e_n)$. Montrer que, pour tout $n$, $T \circ P_n \in HS(H)$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|T - T\circ P_n\|_2 = 0$. En déduire que les opérateurs de rang fini sont denses dans $HS(H)$.

mamouni.new.fr
Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

## 2 Séries de Fourier.

**Exo 11** Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques des fonctions $f$, $2\pi$-périodiques telles que :

1. $f(x) = \pi - |x|$ sur $]-\pi, \pi[$.

   Réponse : $a_0 = \pi,\ a_{2p} = 0,\ a_{2p+1} = \dfrac{4}{\pi(2p+1)^2},\ b_n = 0.$

2. $f(x) = \pi - x$ sur $]0, 2\pi[$.

   Réponse : $a_n = 0,\ b_n = \dfrac{2}{n}.$

3. $f(x) = x^2$ sur $]0, 2\pi[$.

   Réponse : $a_0 = \dfrac{8\pi^2}{3},\ a_n = \dfrac{4}{n^2},\ b_n = -\dfrac{4\pi}{n}.$

4. $f(x) = \max(0, \sin x)$.

   Réponse : $a_0 = \dfrac{2}{\pi},\ a_{2p} = \dfrac{-2}{\pi(4p^2-1)},\ a_{2p+1} = 0,\ b_1 = \dfrac{1}{2},\ b_p = 0.$

5. $f(x) = |\sin x|^3$.

   Réponse : $a_{2p} = \dfrac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)},\ a_{2p+1} = 0,\ b_p = 0.$

**Exo 12** Soient $f, g\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues $2\pi$-périodiques. On pose pour $x \in \mathbb{R}$ :

$$f * g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)\,dt.$$

1. Montrer que $h$ est $2\pi$-périodique, continue, puis que $c_n(f*g) = c_n(f)c_n(g)$.

2. Pour $g$ fixe, montrer que l'application $f \mapsto f * g$ est linéaire, puis déterminer ses valeurs et vecteurs propres.

**Exo 13** Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique telle que :

$$\forall\, x \in [-\pi, \pi[,\ f(x) = e^x.$$

1. Chercher le développement en série de Fourier de $f$.

   Réponse : $a_0 = \dfrac{2\operatorname{sh}\pi}{\pi},\ a_n = \dfrac{2(-1)^n\operatorname{sh}\pi}{\pi(1+n^2)},\ b_n = -na_n.$

2. En déduire les sommes des séries :

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} \text{ et } S' = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

   Réponse : $S = \dfrac{\pi - \operatorname{th}\pi}{2\operatorname{th}\pi},\ S' = \dfrac{\pi - \operatorname{sh}\pi}{2\operatorname{sh}\pi}.$

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 14**

1. Donner le développement en série de Fourier de la fonction $2\pi$-périodique définie sur $]0, 2\pi[$ par

$$f(x) = e^{ax} \text{ avec } a \neq 0.$$

Réponse : $c_n(f) = \dfrac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi(a - in)}$.

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$. En déduire $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Réponse : Parseval + convergence dominée.

**Exo 15**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, impaire et $2$-périodique telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que :

$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{2\zeta(4)}{\pi^4} \|f''\|_2^2.$$

Réponse : Décomposer $f$ en série de Fourier, exprimer $c_n(f)$ à l'aide de $c_n(f'')$ utiliser Cauchy-Scwharz et Parseval.

**Exo 16**

Inégalité de Wirtinger .

Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\displaystyle\int_{t=0}^{2\pi} f(t)\,dt = 0$ et $f(0) = f(2\pi)$.

1. Montrer que

$$\int_{t=0}^{2\pi} f^2(t)\,dt \leq \int_{t=0}^{2\pi} f'^2(t)\,dt.$$

Réponse : Parseval pour $f$ et $f'$.

2. Montrer qu'on a égalité si et seulement si $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

**Exo 17**

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $2\pi$-périodiques, continues par morceaux. On note $c_n(f)$ et $c_n(g)$ les coefficients de Fourier exponentiels de $f$ et $g$. Montrer que :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n(f)} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,dt.$$

**Exo 18**

Phénomène de Gibbs pour $\dfrac{\sin kx}{k}$

Soit $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$.

1. Calculer l'abscisse, $x_n$, du premier maximum positif de $f_n$.

Réponse : $\dfrac{\pi}{n+1}$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x_n) = \int_{t=0}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

Réponse : Somme de Riemann.

3. Interpréter

Mamouni My Ismail
*mamouni.new.fr*
*mamouni.myismail@gmail.com*

**Exo 19** Noyau de Féjer

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $2\pi$-périodique continue, $f_n$ sa $n$-ème somme de Fourier et $g_n = \dfrac{f_0 + \cdots + f_n}{n+1}$.

1. Exprimer $g_n$ l'aide d'un produit de convolution, $g_n = f * k_n$.

   Réponse : $k_n(x) = \dfrac{1-\cos((n+1)x)}{(n+1)(1-\cos x)} = \dfrac{\sin^2((n+1)x/2)}{(n+1)\sin^2(x/2)}$.

2. Montrer que la suite $(k_n)$ constitue une suite d'approximations de la mesure de Dirac sur $]-\pi, \pi[$, définie par : $\begin{cases} \delta(x) & = & 1 & \text{si } x \in ]-\pi, \pi[ \\ & = & 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3. En déduire que la moyenne des sommes partielles de la série de Fourier de $f$ converge uniformément vers $f$ pour toute $f$ continue.

**Exo 20** Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0$.

2. Développer en série de Fourier la fonction $: x \mapsto |\sin x|$.

   Réponse : $|\sin x| = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}$.

3. En déduire que $\displaystyle\int_{t=a}^b f(t)|\sin nt| \, dt = \frac{2}{\pi} \int_a^b f(t) \, dt$.

Fin !

À la prochaine

Mamouni My Ismail
*mamouni.myismail@gmail.com*

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Intégrales à paramètre

MP-CPGE Rabat

## Blague du jour

Une maman à sa jeune fille :
- Je te conseille d'épouser un archéologue.
- Ah bon ? Et pourquoi ?
- Parce que plus on vieillit, plus il vous aime.


## Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

Mathématicien du jour

Mathématicien, astronome et physicien français, nommé ministre, comte et marquis. Il a contribué à l'émergence des théories de probabilité, d'astronomie mathématique. Il a transformé l'approche géométrique de la mécanique développée par Newton en une approche fondée sur l'analyse mathématique.

**Exo 1**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2+1}\,dt$.

1. Montrer que $f$ et $g$ sont définies et de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[$.

2. Montrer que $f$ et $g$ sont solutions de l'équation : $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.

3. Étudier les limites de $f$ et $g$ en $+\infty$.

4. Trouver une relation entre $f$ et $g$.

**Exo 2**

On pose $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt}\,dt$

1. Montrer que la fonctions $H$ est bien définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $H$ est une solution de l'équation différentielle :
$$(E) \quad (x+i)y' + \frac{1}{2}y = 0.$$

3. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ : $\Phi(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt.$
Montrer que $\Phi$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$, préciser la valeur de cette constante.
En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, puis celle de $H(0)$.

4. Résoudre l'équation $(E)$ et donner l'expression de $H(x)$.

**Exo 3** On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+x^2}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Etudier l'ensemble de définition de $f$. Calculer $f(0)$.

2. Montrer que $f$ est $C^\infty$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\cos(bt)\, dt$.

3. En déduire que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+e^t}\, dt$.

4. Développer $f$ en $+\infty$ sous la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x^4} + o(\dfrac{1}{x^4})$.

**Exo 4** Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 1$ et $f(0) = 1$.

On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\left(\frac{\sin xt}{t}\right)^2 dt$ et $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de $\phi$ ? Exprimer la limite $L$ en $0^+$ de $\dfrac{\phi(x)}{x}$ à l'aide d'une intégrale.

2. Prouver que l'on a $L = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t} dt$.

3. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $H$.

4. Calculer $H'$ puis expliciter $H$.

**Exo 5** On pose pour tout $x \in ]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$

1. Montrer rapidement que : $\forall u \in ]-1,+\infty[$, $\ln(1+u) \leq u$.

2. Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

3. En déduire que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}$.

4. On pose pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \ln\left(\dfrac{n^x n!}{x(x+1)..(x+n)}\right)$

   Montrer en utilisant la série de fonctions $\sum f_n - f_{n-1}$ que :
$$\forall x \in ]0,+\infty[,\ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} - \gamma - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}.$$
   Où $\gamma$ désigne la constante d'Euler.

5. Formule de Stirling : Montrer que $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ pour $x$ réel tendant vers $+\infty$.

   Réponse : $\ln\Gamma$ est convexe, encadrer $\ln\Gamma(x)$ par les cordes passant par $(\lfloor x\rfloor, \ln\Gamma(\lfloor x\rfloor))$.

6. Calculer $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et comparer.

**Exo 6** Fonction définie par une intégrale.

1. On pose pour $x \geq 0$ : $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,dt$.
Calculer explicitement $f'(x)$ et en déduire $f(x)$ (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/t$).

2. On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2 \sin^2 t)\,dt$. Montrer que $I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $I'(x)$ puis en déduire $I(x)$.

3. Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{e^x - 1}\,dx$.
   a. Justifier l'existence de $I(\alpha)$.
   b. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que : $I(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{b+n^2}$.
   Réponse : $a = \alpha$, $b = \alpha^2$.
   c. Donner un équivalent de $I(\alpha)$ quand $\alpha \longrightarrow \infty$.
   Réponse : comparaison série-intégrale.

**Exo 7** Intégrale de Gauss

On considère les fonctions définies par :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

1. Montrer que $f$ et $g$ sont dérivables et calculer $f'$ et $g'$.

2. Montrer que $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} e^{-(t^2+a^2/t^2)}\,dt$. Réponse : $u = \dfrac{a}{t}$.

5. Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,dt$. Prouver que $I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

6. Chercher une relation simple entre $I$ et $I'$.
   Réponse : $I'(x) = -2xI(x)$.

7. En déduire la valeur de $I(x)$

**Exo 8** Considérons $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}e^{ixt}}{\sqrt{t}}\,dt$.

1. Vérifier que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa drive.

2. En déduire une autre expression de $f$.

**Exo 9**

Posons $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x dt$.

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$ ?
2. Montrer que $f$ est une fonction continue sur $\mathcal{D}_f$.
3. Établir une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$, puis montrer que $xf(x)f(x+1)$ est une fonction constante.
4. Déterminer un équivalent de $f$ en $+\infty$.

**Exo 10**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2. Étudier la régularité de $f$.
3. Déterminer un équivalent de $f$ en $+\infty$.

**Exo 11**

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

1. Déterminer le domaine définition $\mathcal{D}_f$ de $f$.
2. Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\mathcal{D}_f$
3. Montrer que $f$ satisfait une équation différentielle du premier ordre sur $\mathcal{D}_f$.
4. En déduire une autre écriture pour $f$.

**Exo 12**

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}$

1. Quel est le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de $f$ ?
2. Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\overset{\circ}{\mathcal{D}}_f$.
3. En déduire une autre écriture de $f$.

**Exo 13**

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{\times}$ et calculer $f'$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f = 0$.
3. En déduire une autre écriture de $f$.

**Exo 14** $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t}dt$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$.
2. Montrer que $f$ est $C^1$ sur $\mathcal{D}_f$ et calculer $f'$
3. Limites de $f$ aux bornes

**Exo 15** Étude et graphe de $x \mapsto \int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$.

**Exo 16** Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$
2. Montrer que $f$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\lim\limits_{0^+} f$
3. Calculer $f + f''$ puis montrer que $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}dt$
4. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$

**Exo 17** On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, dt$ et $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2+1}\, dt$.

1. Montrer que $f$ et $g$ sont définies et $C^2$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que $f$ et $g$ sont solutions de : $y'' + y = \frac{1}{x}$.
3. Étudier les limites de $f$ et $g$ en $+\infty$.
4. Trouver une relation entre $f$ et $g$.

**Exo 18** On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin at}{1+t^2}$

1. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $f$.
2. Calculer $f$ et $f''$. En déduire une équation différentielle satisfaite par $f$.
3. Expliciter $f$ l'aide de fonctions usuelles.
4. Limite en $+\infty$ de $f$ et $f'$ En déduire $f$.

**Exo 19** Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}dt$.

Domaine de définition, continuité, dérivabilité, calcul de $f'$ puis de $f$. Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 20** On pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + x^2}$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Étudier l'ensemble de définition de $f$.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que $f$ est $C^\infty$.
4. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt)\ dt$.
5. En déduire que $f(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\cos xt}{1 + e^t}\ dt$.
6. Développer $f$ en $+\infty$ sous la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x^4} + o(\dfrac{1}{x^4})$.

**Exo 21** Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ continue tendant vers $1$ en $+\infty$ et $f(0) = 1$.
On pose $\phi(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \left(\dfrac{\sin xt}{t}\right)^2 dt$ ainsi que $H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \dfrac{\sin t}{t} dt$.

1. Quel est le domaine de définition de $\phi$ ? Exprimer la limite $L$ en $0^+$ de $\dfrac{\phi(x)}{x}$ l'aide d'une intégrale.
2. Prouver que l'on a $L = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t} dt$.
3. Domaine de définition, continuité et dérivabilité de $H$.
4. Calculer $H'$ puis expliciter $H$.

mamouni.new.fr
Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

Exo 22

Calcul de limite.

1. a. Prouver l'existence pour $x > 0$ de $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\,dt$.

   b. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} I(x)$.

   Réponse : Développer $\sin(t - x)$.

2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Chercher $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,dt$.

   Réponse : $\dfrac{\pi}{2} f(0)$.

3. Donner un équivalent pour $x \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x^2+t^2}\,dt$.

   Réponse : $t = ux$ puis intégration par parties.

4. Soit $a > 0$. Donner le DL en $x = 1$ l'ordre 3 de $f(x) = \displaystyle\int_{t=a/x}^{ax} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,dt$.

   Réponse : Calculer $f'(x)$.

5. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On pose $\varphi(x) = \left(\displaystyle\int_{t=a}^{b} (f(t))^x\,dt\right)^{1/x}$.

   a. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to++\infty} \varphi(x) = \max(f)$.

   b. On suppose $f > 0$ et $b - a = 1$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to++\infty} \varphi(x) \exp\left(\int_{t=a}^{b} \ln(f(t))\,dt\right)$.

   Réponse : Montrer que pour $\varepsilon > 0$ et $x$ assez petit, $\left|f(t)^x - 1 - x\ln(f(t))\right| \leq \varepsilon x$ puis intégrer.

6. a. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt = f(0)$.

   Réponse : Couper en $\displaystyle\int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1-\varepsilon}^{1}$

   b. Chercher un équivalent pour $n \longrightarrow +\infty$ de $\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{t^n\,dt}{1+t^n}$.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices

# Intégrales à paramètre

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

- Dans la maison de retraite, deux grand-pères discutent : Mon cardiologue m'a dit que j'avais le cœur d'une personne de 30 ans... il m'a même dit où le gars était enterré.
- Un vieux dont les mains tremblent, assis sur un banc, voit un jeune homme en-casqué d'un Walkman s'asseoir près de lui et dont les mains tremblent aussi.

Le vieux : Parkinson ? Le jeune : Non, Michael Jackson.

**Augustin Louis, baron Cauchy (1789-1857)**

Mathématicien du jour

Mathématicien français Sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des séries et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques. Toute fois la négligence dont fit preuve Cauchy envers les travaux de Galois et d'Abel, perdant leurs manuscrits, a cependant entaché son prestige.

# 1 Équations différentielles linéaires.

## 1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

**Exo 1** Résoudre les équations suivantes, étudier la possibilité de raccordements :

1. $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.

   Réponse : $y = -\cos x + \dfrac{\sin x + \lambda}{1+x}$.

2. $y' + y = \sin x + 3\sin 2x$.

   Réponse : $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \dfrac{3\sin 2x - 6\cos 2x}{5} + \lambda e^{-x}$.

3. $2x(1-x)y' + (1-2x)y = 1$.

   Réponse : $y = \dfrac{\operatorname{argch}(1-2x)+\lambda}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $x < 0$

   $y = \dfrac{\arcsin(2x-1)+\mu}{2\sqrt{x-x^2}}$ pour $0 < x < 1$

   $y = \dfrac{-\operatorname{argch}(2x-1)+\nu}{2\sqrt{x^2-x}}$ pour $1 < x$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 2** Résoudre les équations suivantes, étudier la possibilité de raccordements :

1. $(2+x)y' = 2-y$.
   Réponse : $y = 2 + \dfrac{\lambda}{x+2}$.
2. $xy' + y = \cos x$.
   Réponse : $y = \dfrac{C+\sin x}{x}$.
3. $x^3y' - x^2y = 1$.
   Réponse : $y = \lambda x - \dfrac{1}{3x^2}$.
4. $3xy' - 4y = x$.
   Réponse : $y = \lambda x^{4/3} - x$.

## 1.2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2.

**Exo 3** Équations d'Euler .

Ce sont les équations de la forme : $at^2y''(t) + bty'(t) + cy(t) = 0$ où $a, b, c$ trois réels avec $a \neq 0$ et $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit

1. On se place dans le cas où $I = \mathbb{R}_+^*$. Poser $z(t) = y(e^t)$, montrer qu'on se ramène à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants que l'on précisera.
2. Dire comment résoudre $E$ dans le cas où $I = \mathbb{R}_-^*$.
3. Résoudre l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad t^2y''(t) - ty'(t) + y(t) = 0$$

**Exo 4** Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).
   Réponse : $y = -e^x + \lambda e^{e^x} + \mu e^{-e^x}$.
2. $y'' - \left(6x + \dfrac{1}{x}\right) y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).
   Réponse : $y = \lambda e^{x^2} + \mu e^{2x^2} + \dfrac{2x^2+3}{16}$.
3. $x(1-2\ln x)y'' + (1+2\ln x)y' - \dfrac{4}{x}y = 0$ (chercher une solution de la forme $y = x^\alpha$).
   Réponse : $y = \lambda x^2 + \mu \ln x$.
4. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin x$ (poser $u = \ln x$).
   Réponse : $y = ax + bx^2 + 1 - 2x\sin x$.
5. $x(x+1)y'' - y' - 2y = 3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y = x^\alpha$).
   Réponse : $y = x^2 \ln|x+1| + \lambda\left(x^2 \ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right| + x - \dfrac{1}{2}\right) + \mu x^2$.
6. $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y = 1$ $\left(\text{poser } y = \dfrac{u}{x^2}\right)$.
   Réponse : $y = \dfrac{-1 + a\mathrm{ch}x + b\mathrm{sh}x}{x^2}$.
7. $(x^2+3)y'' + xy' - y = 1$ (chercher les solutions polynomiales).
   Réponse : $y = \lambda\sqrt{x^2+3} + \mu x - 1$.

**Exo 5** Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.

1. $4xy''-2y'+9x^2y=0$.
   Réponse : $2n(2n-3)a_n=-9a_{n-3}$
2. $xy''+2y'-xy=0$.
   Réponse : $n(n+1)a_n=a_{n-2}$
3. $4xy''+2y'-y=0$.
   Réponse : $(2n+1)(2n+2)a_{n+1}=a_n$.
4. $y''+xy'+3y=0$.
   Réponse : $n(n-1)a_n+(n+1)a_{n-2}=0$.
5. $x^2y''+6xy'+(6-x^2)y=-1$.
   Réponse : $(n+2)(n+3)a_n=a_{n-2}$.
6. $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.
   Réponse : $na_{n+1}=(n+1)a_n$.

**Exo 6** Résoudre les équations suivantes :

1. $y''-2y'+2y=xe^x$.
   Réponse : $y=(x+a\cos x+b\sin x)e^x$.
2. $y''-4y'+4y=2(x-2)e^x$.
   Réponse : $y=(ax+b)e^{2x}+2xe^x$.
3. $y''-4y'+13y=10\cos 2x+25\sin 2x$.
   Réponse : $y=e^{2x}(a\cos 3x+b\sin 3x)+2\cos 2x+\sin 2x$.
4. $y''+y=\text{cotan}x$.
   Réponse : $y=\sin x\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\lambda\cos x+\mu\sin x$ (variation de la constante avec sin).
5. $y''+3y'+2y=\dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.
   Réponse : $y=(\lambda+\ln|x|)e^{-x}+\mu e^{-2x}$.
6. $y''+y=P(x)$ où $P$ est un polynôme.
   Réponse : $y=\lambda\cos x+\mu\sin x+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nP^{(2n)}(x)$.

**Exo 7** On considère l'équation différentielle :

$$(*)\quad y''+\frac{2y'}{\text{sh}x}+y=0.$$

1. On pose $z(x)=y'(x)+\dfrac{y(x)}{\text{sh}x}$. Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur $z$ déduite de $(*)$.
   Réponse : $z'+\dfrac{z}{\text{sh}x}=0$.
2. Résoudre sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ l'équation en $z$, puis $(*)$.
   Réponse : $y=\dfrac{ax+b}{\text{sh}x}$.
3. Parmi les solutions trouves, quelles sont celles prolongeables en 0 ?
   On note $y_0$ la solution de $(*)$ telle que $\lim\limits_{x\to 0}y_0(x)=1$.
4. Démontrer que $y_0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\dfrac{y_0'(x)}{\text{sh}x}$ admet une limite finie en $0$.
   En déduire que $y_0$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
5. Est-ce que l'aire comprise entre la courbe de $y_0$ et l'axe des abscisses est finie ?

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 8** Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & g : t \mapsto f'(t) + tf(t). \end{array}$

1. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Phi$.

   Réponse : spectre $= \mathbb{C}$, $f_\lambda(t) = e^{-t^2/2}e^{\lambda t}$.

2. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Phi^2$.

   Réponse : Pour $\lambda \neq 0$, $\Phi^2(f) = \lambda^2 f \iff f = af_\lambda + bf_{-\lambda}$.

   Pour $\lambda = 0$, $\Phi^2(f) = 0 \iff f(t) = (at+b)e^{-t^2/2}$.

3. Résoudre l'équation : $y'' + 2xy' + (x^2-1)y = 0$.

   Réponse : $\Phi^2(y) = -2y \iff y = e^{-t^2/2}\left(a\cos(t\sqrt{2}) + b\sin(t\sqrt{2})\right)$.

**Exo 9** On désigne par $y$ la solution de l'équation différentielle $y'' + x\,y' + y = 0$, avec les conditions de Cauchy $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

1. Montrer que les drives de $y$ vérifient $y^{(n)} + x\,y^{(n-1)} + (n-1)\,y^{(n-2)} = 0, \quad \forall n \geq 2$.

2. Calculer par récurrence les drives successives de $y$ en zéro.

3. Montrer que $y$ admet le développement limité l'origine

$$y(x) = x - \frac{2x^3}{3!} + \frac{8x^5}{5!} + \cdots + \frac{(-2)^k k!\,x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2}).$$

**Exo 10** Lemme de Gronwall.

Soient $f, g$ deux fonctions continues et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, t \geq 0,\ g(t) \geq 0$ et $f(t) \leq a + \int_0^t f(u)g(u)\,du$. Montrer : $\forall\, t \geq 0,\ f(t) \leq a\exp\left(\int_0^t g(u)\,du\right)$.

Réponse : Considérer $h(t) = a + \int_0^t f(u)g(u)\,du$ et résoudre l'inéquation différentielle $h'(t) \leq g(t)h(t)$ par la formule de Duhamel qui permet de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1, scalaire : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$.

**Exo 11** Équations de la forme $y" + a(x)y = b(x)$ .

les questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geq 0$.

   Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

   Réponse : $f(x) = \int_{t=0}^x g(t)\sin(x-t)\,dt + \lambda\cos x + \mu\sin x$ avec $g = f + f''$.

2. Soit $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout $x$ : $f''(x) \geq f(x) + \dfrac{2}{\operatorname{ch}(x)^3}$.

   Montrer pour tout $x$ : $f(x) \geq \dfrac{\operatorname{sh}(x)^2}{\operatorname{ch}(x)}$.

Exo 12 Équations de la forme $y" + a(x)y = b(x)$

les questions sont indépendantes.

1 Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une fonction continue.

a Soit $y$ une solution de l'équation $y'' + a(x)y = 0$. Montrer que $y$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Réponse : la convexité de $y$.

b Soit $z$ une solution de l'équation $z'' - a(x)z = 0$. Montrer que $z = 0$ ou bien $z$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$.

Réponse : la convexité de $z$.

2 Soit $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ croissante strictement positive et $y$ une solution de l'équation : $y'' + a(t)y = 0$. Montrer que $y$ est bornée au voisinage de $+\infty$

Réponse : on étudiera $z = y^2 + y'^2/a$.

3 Soit $a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue intégrable. Montrer l'équation $y'' + a(t)y = 0$ admet des solutions non bornées sur $[0, +\infty[$

Réponse : on commencera par prouver que si $y_1, y_2$ sont deux solutions alors le déterminant Wronskien de $y_1$ et $y_2$ est constant.

4 Zéros entrelacés :

Soient $r$ et $q$ deux fonctions continues définies sur $I = [a, b]$ telles que : $\forall\, x \in I,\ r(x) \geq q(x)$. On considère les équations différentielles :

$$(E_1) :\ y'' + qy = 0, \qquad (E_2) :\ z'' + rz = 0.$$

a Soit $y$ une solution de $(E_1)$ et $x_0, x_1$ deux zéros consécutifs de $y$. $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent-ils être nuls ? Que dire de leurs signes ?

Réponse : On suppose $y \neq 0$ sinon $y$ n'a pas de zéros consécutifs. Comme $y(x_0) = 0$, on a $y'(x_0) \neq 0$ sinon $y = 0$. Ceci implique que chaque zéro de $y$ est isolé.

5 Soit $z$ une solution de $(E_2)$. On considère $W(x) = \begin{vmatrix} y(x) & z(x) \\ y'(x) & z'(x) \end{vmatrix}$. Calculer $W'(x)$ et $W(x_1) - W(x_0)$.

Réponse : $W' = (q - r)yz$. $W(x_1) - W(x_0) = y'(x_0)z(x_0) - y'(x_1)z(x_1)$.

6 Montrer que $z$ a un zéro dans $]x_0, x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.

Réponse : Si $z$ ne s'annule pas dans $]x_0, x_1[$ alors $W'$ est de signe constant sur cet intervalle. L'examen des différents cas possibles de signe apporte une contradiction entre les signes de $W'$ et de $W(x_1) - W(x_0)$.

7 Soit $u$ une solution de $(E_1)$. Montrer que $u$ est soit proportionnelle $y$, soit admet un unique zéro dans $]x_0, x_1[$.

Réponse : On prend $r = q$, $z = u$. Si $u(x_0) \neq 0$ alors $u$ admet un zéro dans $]x_0, x_1[$ et en permutant les rôles de $u$ et $y$, le prochain zéro éventuel de $u$ vient après $y_1$. Sinon, $u = \dfrac{u'(x_0)}{y'(x_0)}y$.

Mamouni My Ismail
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 13** Équations de la forme $y" + a(x)y = b(x)$ .

Soit $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ a(x) \geq 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 0$.

1. Montrer que toute solution de l'équation : $y' + ay = b$ tend vers $0$ en $+\infty$.

   Réponse : $y = \displaystyle\int_{t=\alpha}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt + y(\alpha)e^{-A(x)}$ avec $A' = a$ et $A(\alpha) = 0$.
   Comme $a \geq 1$, on a $A(x) \geq x - \alpha$ et $A(t) - A(x) \leq t - x$ pour $t \leq x$.
   On choisit $z$ tel que $z \longrightarrow +\infty$ et $x - z \longrightarrow +\infty$.

2. On suppose $\lim\limits_{x\to-\infty} b(x) = 0$. Montrer qu'il y a une unique solution $y$ qui tend vers $0$ en $-\infty$.

   Réponse : l'intégrale $\displaystyle\int_{t=-\infty}^{x} b(t)e^{A(t)-A(x)}\,dt$ converge et fournit une solution nulle en $-\infty$.

## 1.3 systèmes différentiels linéaires.

**Exo 14** $x, y, z$ sont des fonctions de $t$. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} y' = y + z + \sin t \\ z' = -y + 3z. \end{cases}$

   Réponse :
   $y = \dfrac{-3\cos t - 13\sin t}{25} + (at + b)e^{2t}$,
   $z = \dfrac{-4\cos t - 3\sin t}{25} + (at + a + b)e^{2t}$.

2. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z. \end{cases}$

   Réponse :
   $x = (a + bt + ct^2)e^t$,
   $y = \left(a + \dfrac{b-c}{2} + (b+c)t + ct^2\right)e^t$,
   $z = \left(a - \dfrac{b+c}{2} + (b-c)t + ct^2\right)e^t$.

3. $\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z. \end{cases}$

   Réponse : $x = -(b+c)e^t + (a + b + c)e^{2t}$,
   $y = \dfrac{1}{2}(-a + 5b + 3c) - 2(b+c)e^t + \dfrac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$,
   $z = \dfrac{1}{2}(a - 5b - 3c) + 3(b+c)e^t - \dfrac{1}{2}(a+b+c)e^{2t}$.

4. $\begin{cases} x' = 2x + z + \operatorname{sh} t \\ y' = x - y - z + \operatorname{ch} t \\ z' = -x + 2y + 2z - \operatorname{ch} t. \end{cases}$

   Réponse : $x = (at^2 + (a + b + \frac{1}{2})t + a + b + c)e^t$,
   $y = (at^2 + (b - a + \frac{1}{2})t + a + c)e^t - \dfrac{1}{2}e^{-t}$,
   $z = (-at^2 + (a - b - \frac{1}{2})t - c)e^t + \dfrac{1}{2}e^{-t}$.

**Exo 15** $x, y, z$ sont des fonctions de $t$. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (t^2+1)x' = tx + y + 2t^2 - 1 \\ (t^2+1)y' = x - ty + 3t. \end{cases}$$

Réponse : $y = (t^2+1)x' - tx - 2t^2 + 1 \Longrightarrow (t^2+1)x'' + 2tx' - 2x = 6t$.
Résolution par DSE : $x = a(1 + t\arctan t) + bt + t\ln(1+t^2)$, $y = a\arctan t + b + 1 + \ln(1+t^2)$.

**Exo 16**

$x, y, z$ sont des fonctions de $t$. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z. \end{cases}$

   Réponse : $x = 2\alpha e^t + (2\gamma t + 2\beta - \gamma)e^{2t}$, $y = (\gamma t + \beta)e^{2t}$, $z = \alpha e^t + (\gamma t + \beta)e^{2t}$.

2. $\begin{cases} y' + y = z \\ z' + 2z = y - 1. \end{cases}$

   Réponse : $y = -1 + \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$, $z = -1 + \lambda(1+\alpha)e^{\alpha t} + \mu(1+\beta)e^{\beta t}$, $\alpha = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

# 2 Équations différentielles non linéaires.

**Exo 17**

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ strictement positive et $y$ la solution maximale définie sur $]\alpha, \beta[$ du problème de Cauchy : $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. Montrer que $\beta = x_0 + \displaystyle\int_{t=y_0}^{+\infty} \frac{dt}{f(t)}$ et que $\displaystyle\lim_{x \to beta^-} y(x) = +\infty$.

**Exo 18**

Équations variables séparables

1. $y' = y(1+y)$.

   Réponse : $y = -1 + \dfrac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y = -1$.

2. $y' = \sin x \cos y$.

   Réponse : $y \equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x}) - \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$.

3. $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.

   Réponse : $y = \pm\sqrt{1 + (\sqrt{x}+\lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.

4. $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.

   Réponse : $y = -\ln\big(1 - x(1 - 1/e)\big)$.

5. $y' = \sqrt{|y|}$ : étudier les problèmes de raccordements.

   Réponse : $y = \left(\lambda + \dfrac{x}{2}\right)\left|\lambda + \dfrac{x}{2}\right|$ ou $y = 0$.

**Exo 19**

Équations homogènes

Ce sont les équations de la forme $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. On cherche la solution générale sous la forme $y(x) = x\lambda(x)$. Résoudre :

1. $y - xy' = \sqrt{x^2+y^2}$.

   Réponse : $y = \dfrac{1-\lambda^2x^2}{2\lambda}$, $\lambda > 0$.

2. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

   Réponse : $y = -x \pm \sqrt{2x^2 - \lambda}$ ou $y = x(-1 \pm \sqrt{2})$.

3. $(x^2+y^2)y' = 2xy$.

   Réponse : $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\lambda^2x^2}}{2\lambda}$ ou $y = \pm x$ ou $y = 0$.

4. $(x+y)y' = 2x - y$.

   Réponse : $y = -x \pm \sqrt{\lambda + 3x^2}$ et $y = x(-1 \pm \sqrt{3})$.

**Exo 20** Équations de Bernouilli

Elles sont de la forme : $y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$, pour résoudre ce type déquation on utilise le changement de fonction : $z = y^{1-\alpha}$. on se raméne alors une équation linéaire du $1^{er}$ ordre. Résoudre :

1. $x^2y' + y + y^2 = 0$.
2. $y' + xy = x^3y^3$.
3. $xy' + y = xy^3$.

   Réponse : $y = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{\lambda x^2 + 2x}}$ ou $y = 0$.
4. $2xy' + y = \dfrac{2x^2}{y^3}$.

   Réponse : $y = \pm\sqrt[4]{x^2 + \dfrac{\lambda}{x^2}}$.
5. $\sqrt{x}y' - y + (x + 2\sqrt{x})\sqrt{y} = 0$.

   Réponse : $y = ((\sqrt{x} + 2)^2 + \lambda e^{\sqrt{x}})^2$.
6. $xy' + y = (xy)^{3/2}$.

   Réponse : $y = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2}{\lambda - x}\right)^2$ ou $y = 0$.
7. $x^3y' = y(3x^2 + y^2)$.

   Réponse : $y = \pm\dfrac{\sqrt{2}x^3}{\sqrt{2\lambda - x^4}}$ ou $y = 0$.

**Exo 21** Équations de Riccati

Elles sont de la forme : $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ ; pour résoudre ce type déquation on utilise le changement de fonctions : $y = y_0 + z$ où $y_0$ une solution particuliére à trouver, et on se raméne ainsi à une équation de Bernouilli. Résoudre :

1. $\left(1 + x^3\right)y' = y^2 + x^2y + 2x$.
2. $y' + y^2 - \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2} = 0$.
3. $x^2(y' + y^2) = xy - 1$.

   Réponse : $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x\ln|x| + \lambda x}$ ou $y = \dfrac{1}{x}$.

**Exo 22** Étude qualitative.

Soit $x$ la solution maximale du problème de Cauchy : $x' = \cos(t) + \cos(x)$, $x(0) = x_0 \in ]0, \pi[$.
Montrer que $x$ est définie sur $\mathbb{R}$ et : $\forall\, t > 0,\ 0 < x(t) < \pi$.

**Exo 23** Étude qualitative.

1. Justifier l'existence de $y$ la solution maximale de l'équation $y' = x^3 + y^3$ telle que $y(0) = a > 0$, et $I = ]\alpha, \beta[$ son intervalle de définition.
2. Montrer que $y$ est strictement croissante au voisinage de $0$.

   Réponse : $y(0) > 0 \Longrightarrow y'(0) > 0$.
3. Montrer que $y$ est strictement croissante sur $[0, \beta[$.

   Réponse : Si $y' > 0$ sur $]0, \gamma[$, alors $y(\gamma) > 0$ donc $y'(\gamma) > 0$ et reprendre le même raisonnement précédent.
4. Montrer que $\beta$ est fini.

   Réponse : $y' \geq y^3 \Longrightarrow 1 \leq \dfrac{y'}{y^3}$, puis intégrer.
5. En déduire que $\lim\limits_{x\beta^- \to y}(x) = +\infty$.

**Exo 24** Étude qualitative.

1. Justifier l'existence des solutions maximales de l'équation $y' = x - e^y$. Soit $]\alpha, \beta[$ l'intervalle de validité d'une solution fixe $y$.

2. Montrer que $y$ est décroissante puis croissante.

3. Montrer que $y$ est définie jusqu'en $+\infty$ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.

4. Montrer que $\alpha \neq -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to \alpha^-} y(x) = \infty$.

   Réponse : Pour $x < 0$, $y' < -e^y \Longrightarrow -y'e^{-y} > 1$.

**Exo 25** Étude qualitative.

On considère l'équation : $y' = 2ty + y^2$, $y(t_0) = y_0$. Soit $y$ une solution maximale.

1. Montrer que $y = 0$ ou bien $y$ ne s'annule pas.

2. On choisit $y_0 > 0, t_0 < 0$. Soit $]t_1, t_2[$ le domaine d'existence de $y$.
   a. Montrer que si $y_0 \geq -2t_0$, alors $y$ est strictement croissante sur $[t_0, t_2[$.
   b. Montrer que $t_1 = -\infty$. (sinon, $y$ et $y'$ seraient bornes sur $]t_1, t_0]$.)
   c. Donner l'allure générale de la courbe de $y$.
   d. Résoudre l'équation en posant $z(t) = \dfrac{\exp(t^2)}{y(t)}$.

**Exo 26** Étude de l'équation $\begin{cases} y'' + \sin y = 0 \\ y(0) = 0, \; y'(0) = \alpha \geq 0. \end{cases}$

1. Soit $y$ la solution maximale. Justifier son existence et unicité, puis que $\dfrac{y'^2}{2} - \cos y = C = \alpha^2 - 1$.

2. a. Montrer que $y$ est définie sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que $y$ est impaire.

3. On suppose ici que $C > 1$.
   a. Montrer qu'il existe un plus petit $T > 0$ tel que $y(T) = 2\pi$.
   b. Montrer que : $\forall \, t \in \mathbb{R}, \; y(t+T) = y(t) + 2\pi$.

4. On suppose ici que $-1 < C < 1$ : On pose $C = -\cos\theta$, et $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(\cos u - \cos\theta)}}$.
   a. Soit $a$ maximal tel que $y'(t) > 0$ sur $[0, a[$. Montrer que $y(a) = \theta$ et $F(\theta) = a$.
   b. Montrer que $y$ est $4a$-périodique.

5. Étudier les cas $C = 1$, $C = -1$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 27**

**Résolution approchée de $y' = f(y,t)$, $y(a) = y_0$ sur $[a,b]$ par la méthode d'Euler.**

**Principe :** On suppose que $f$ est bornée par $M$ et $|f(y,s) - f(z,t)| \leq K(|y-z| + |s-t|)$. On divise $[a,b]$ en $n$ intervalles $[a_k, a_{k+1}]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ et on approche la solution $y$ par la fonction $z$, continue affine par morceaux définie par :

$$\begin{cases} z(a_0) = y_0 \\ \text{sur } ]a_k, a_{k+1}[,\ z' = f(z(a_k), a_k). \end{cases}$$

1. Soit $\varepsilon_k = |z(a_k) - y(a_k)|$. Montrer que : $\forall\ t \in [a_k, a_{k+1}]$, $\quad |y(t) - z(t)| \leq kh^2(M+1) + (1+Kh)\varepsilon_k \left(h = \dfrac{b-a}{n}\right)$.

2. En déduire que $\sup|y-z| \leq (M+1)(e^{K(b-a)} - 1)\dfrac{b-a}{n}$.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Feuille d'exercices
# Intégrales doubles
# Formes différentielles

MP-CPGE Rabat

**Blague du jour**

Un jeune ingénieur vient d'être engagé dans une grosse entreprise multinationale. Dès son premier jour, il appelle la cafétéria et crie "Apportez-moi un café ! Et en vitesse !!!" De l'autre côté, une voix répond : " Je pense que vous avez composé une mauvaise extension. Savez-vous à qui vous parlez, espèce de crétin ? " " Non" répond le jeune engagé. " Je suis le PDG, pauvre imbécile " Le type lui répond alors en hurlant deux fois plus fort : " Et vous, vous savez à qui vous parlez, espèce de gros bâtard ??? " " Non " répond le Directeur. " Parfait !!! " répond notre jeune ingénieur intelligent et il raccroche son téléphone !

**Guido Fubini (1879-1943)**

Mathématicien italien célèbre notamment pour ses travaux sur les intégrales, mais aussi les équations différentielles, l'analyse fonctionnelle et complexe, le calcul des variations, la théorie des groupes, la géométrie non euclidienne et la géométrie projective. Lors de la première guerre mondiale, il s'intéressa à des sujets plus appliqués, comme la précision de l'artillerie ; après la guerre il continua dans cette optique, appliquant les résultats de ces études précédentes, notamment en électronique et en acoustique.

Mathématicien du jour

# 1 Intégrales doubles.

**Exo 1**

Calculer les intégrales doubles suivants :

1. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ où $\left\{D=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0\le x\le 1-\dfrac{y^2}{4}\right\}$.

2. $\iint_D x^2y\,dxdy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0\le x^2+y^2\le 1\right\}$.

3. $\iint_U xy\,dxdy \qquad U=\{(x,y) \text{ tel que } x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 1\}$

4. $\iint_U |xy|dxdy \qquad U=\{(x,y) \text{ tel que } \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1\}$

5. $\iint_U (x^2+y^2)^2dxdy \qquad U=\{(x,y) \text{ tel que } x\ge 1, y\ge 1, x+y\le 3\}$

6. $\iint_U (1+x^2+y^2)dxdy \qquad U==\{(x,y) \text{ tel que } x^2+y^2\le 1\}$

**Exo 2**

Calculer $I = \iint_\Delta xy\,dxdy$ o $\Delta = \{(x,y)$ tq $y \geq 0$ et $(x+y)^2 \leq 2x/3\}$.

Réponse : Poser $u = x, v = x+y$. On obtient $I = \dfrac{2}{1701}$.

**Exo 3**

Calculer $I = \iint_\Delta (x^2+xy+y^2)\,dxdy$ où
$\Delta = \{(x,y)$ tq $y \geq 0$ et $x^2+y^2-2x \leq 0$ et $x^2+y^2-2y \leq 0\}$.

Réponse : symétrie + passage en polaires. $I = \dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{11}{6}$.

**Exo 4**

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ dans les cas suivants :

1. $D = \{y \geq 0, x+y \leq 1, y-x \leq 1\}$, $f(x,y) = x^2y$.
   Réponse : $\dfrac{1}{30}$.
2. $D = \{x^2+y^2 \leq R^2\}$, $f(x,y) = x^2y$.
   Réponse : $0$.
3. $D = \{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.
   Réponse : $\dfrac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$.
4. $D = \{0 \leq x \leq 1-\dfrac{y^2}{4}\}$, $f(x,y) = x^2+y^2$.
   Réponse : $\dfrac{96}{35}$.

**Exo 5**

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ dans les cas suivants :

1. $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = (x+y)^2$.
   Réponse : $\dfrac{\pi}{2}$.
2. $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$.
   Réponse : $\pi(1-\ln 2)$.
3. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, $f(x,y) = x+y+1$.
   Réponse : $\dfrac{5}{6}$.
4. $D = \{|x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1\}$, $f(x,y) = \ln(x+y+1)$.
   Réponse : $2(\ln 2 - 1)$.
5. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq \pi\}$, $f(x,y) = (x+y)\sin x \sin y$.
   Réponse : $\dfrac{3\pi}{2}$.
6. $D = \{|x| \leq x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = (1+x^2+y^2)^2$.
   Réponse : $\dfrac{65\pi}{48}$.
7. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a\}$, $f(x,y) = x+y+\sqrt{a^2+(x+y)^2}$.
   Réponse : $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a^3$.
8. $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = xy\sqrt{x^2+4y^2}$.
   Réponse : $\dfrac{7}{45}$.
9. $D = \{x^2+y^2-2y \leq 0\}$, $f(x,y) = y\exp(x^2+y^2-2y)$.
   Réponse : $\pi(1-\dfrac{1}{e})$.
10. $D = \{y^2 \leq 2px, x^2 \leq 2py\}$, $f(x,y) = \exp\left(\dfrac{x^3+y^3}{xy}\right)$.
    Réponse : $\dfrac{(e^{2p}-1)^2}{3}$ $(x = u^2v, y = uv^2)$.
11. $D = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\}$, $f(x,y) = 1/(1+x^2\tan^2 y)$.
    Réponse : $-\displaystyle\int_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,dt = \dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

**Exo 6**

1. Calculer $A = \iint_{0\le y\le x\le 1} \dfrac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$.

   Réponse : $2A = \left(\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{1+t^2}\right)^2 \Longrightarrow A = \dfrac{\pi^2}{32}$.

2. Démontrer la convergence des intégrales : $B = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2\cos^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta$, $C = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/4} \frac{\ln(2\sin^2\theta)}{2\cos 2\theta} d\theta$, et $D = \displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{\ln t}{1-t^2} dt$.

3. Démontrer que $A = B$ (passer en coordonnes polaires dans $A$).

4. Calculer $B + C$ et $B - C$ en fonction de $D$.

   Réponse : $B + C = \dfrac{D}{2}$, $B - C = -D$.

5. En déduire les valeurs de $C$ et $D$.

   Réponse : $C = -\dfrac{3\pi^2}{32}$, $D = -\dfrac{\pi^2}{8}$.

**Exo 7**

Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$. En calculant $J = \displaystyle\iint_D \frac{x\,dx\,dy}{(1+x^2)(1+xy)}$ avec $D = \{(x, y)$ tq $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ de deux façons différentes, trouver que $I = \dfrac{\pi \ln 2}{8}$.

**Exo 8**

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$, et $E$ le domaine limité par $\mathcal{E}$ et $F, F'$ les foyers de $\mathcal{E}$. Calculer $I = \displaystyle\iint_{M\in E} (MF + MF')\, dxdy$.

Réponse : On effectuera le changement de variable : $x = \sqrt{u^2 + c^2}\cos v$, $y = u \sin v$ où $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. $2\pi b\left(a^2 - \dfrac{b^2}{3}\right)$.

**Exo 9**

1. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_{x=0}^{\pi/2} \frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} dx$.

2. Montrer que $I = \displaystyle\iint_D \frac{\sin y}{1+\cos x \cos y} dxdy$ o $D = [0, \dfrac{\pi}{2}]^2$.

3. En déduire la valeur de $I$.

   Réponse : Fubini, on trouve $I = \dfrac{\pi^2}{8}$.

**Exo 10**

Intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Justifier la convergence de cette intégrale.

2. Pour $a > 0$ on note $\Delta_a = [0, a] \times [0, a]$ et $C_a$ le quart de disque d'équations : $x^2 + y^2 \le a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

   a) Encadrer l'intégrale sur $\Delta_a$ de $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ par les intégrales de $f$ sur des domaines du type $C_b$.

   b) Calculer $\displaystyle\iint_{C_b} f(x, y)\, dxdy$ en polaires et en déduire la valeur de $I$.

## 2 Intégrales triples.

**Exo 11** Calculer le volume des domaines suivants :

1. $D$ est l'intersection du cylindre de révolution d'axe $Oz$ de rayon $a$ et de la boule de centre $O$ de rayon 1 $(0 < a < 1)$.

   Réponse : $V = \dfrac{4\pi}{3}\left(1 - \sqrt{1-a^2}^{\,3}\right)$.

2. $D$ est l'intersection de la boule de centre $O$ de rayon 1 et du cône de révolution d'axe $Oz$ et de demi-angle $\dfrac{\pi}{4}$.

   Réponse : $V = \dfrac{2\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$.

3. $D$ est le volume engendré par la rotation d'un disque de rayon $r$ autour d'une droite coplanaire avec le disque, situe la distance $R > r$ du centre du disque (tore de révolution ou chambre air).

   Réponse : $V = 2\pi^2 R r^2$.

**Exo 12** Calculer les intégrales triples suivants :

1. $\displaystyle\iiint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$ où D est le tétraèdre de sommets $A(2,1,0); B(2,-1,0); C(0,0,3), D(0,0,-3)$.

2. $\displaystyle\iiint_D z^2 y\,dx\,dy\,dz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

**Exo 13** Soit $T$ un tore plein d'axe $Oz$ et de rayons $R$, $r$ $(R > r)$.
Calculer $\displaystyle\iiint_T (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$.

Réponse : Passer aux coordonnées sphériques, on obtient $\dfrac{1}{2}\pi^2 R r^2 (4R^2 + 3r^2)$.

Mamouni My Ismail
mamouni.new.fr
mamouni.myismail@gmail.com

**Exo 14** Calculer $\iiint_D f(x,y)\,dxdydz$ dans les cas suivants :

1. $D=\{0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1, 0\leq z\leq 1\}$,
$f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$.
Réponse : $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{32}{27}\right)$.

2. $D=\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$,
$f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ $(a>R>0)$.
Réponse : $2\pi a^2\arcsin\dfrac{R}{a}-2\pi R\sqrt{a^2-R^2}$.

3. $D=\{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$,
$f(x,y,z)=xyz$.
Réponse : $\dfrac{1}{720}$.

4. $D=\{x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0, x+y+z\leq 1\}$,
$f(x,y,z)=\dfrac{1}{(x+y+z+1)^2}$.
Réponse : $\dfrac{3}{4}-\ln 2$.

5. $D=\{x^2+y^2\leq R^2, 0\leq z\leq a\}$,
$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3z(x^2+y^2)$.
Réponse : $\dfrac{\pi R^2a^2}{4}(a^2+3R^2)$.

6. $D=\{x^2+y^2\leq z^2, 0\leq z\leq 1\}$,
$f(x,y,z)=\dfrac{z}{(x^2+y^2+1)^2}$.
Réponse : $\dfrac{\pi}{2}(1-\ln 2)$.

7. $D=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leq 1\right\}$,
$f(x,y,z)=x^2+y^2$.
Réponse : $\dfrac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2)$.

**Exo 15**

1. Calculer $I=\displaystyle\iiint_D\frac{dx\,dy\,dz}{(1+x^2z^2)(1+y^2z^2)}$
avec $D=\{(x,y,z)$ tq $0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1,\ 0\leq z\}$.
Réponse : Intégrer en $z$ d'abord, on obtient $I=\pi\ln 2$.

2. En déduire $\displaystyle\int_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.
Réponse : Intégrer $I$ en $x$ et $y$ d'abord. On obtient $I=\displaystyle\int_{z=0}^{+\infty}\left(\frac{\arctan z}{z}\right)^2 dz$.

**Exo 16** Calculer le volume intérieur au paraboloïde d'équation $x^2+y^2=2pz$ et extérieur au cône d'équation $x^2+y^2=\lambda^2z^2$ $(p>0,\ \lambda>0)$.
Réponse : $V=\dfrac{4\pi p^3}{3\lambda^4}$.

**Exo 17** Dans le plan $Oxy$ on considère la courbe $\gamma$ d'équation polaire $\rho=a\sqrt{\cos 2\theta}$ $(a>0,\ -\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4})$. En tournant autour de $Ox$, $\gamma$ engendre une surface dont on calculera le volume qu'elle limite
Réponse : on posera $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta\cos\phi$, $z=\rho\sin\theta\sin\phi$. On trouve $\dfrac{\pi a^3}{12\sqrt{2}}(3\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2})$.

**Exo 18** On coupe une demi-boule par un plan $P$ parallèle sa base. Quelle doit être la position de $P$ pour que les deux morceaux aient même volume ?
Réponse : hauteur $=\alpha R$ avec $\alpha^3-3\alpha+1=0$.

# 3 Intégrales curvilignes.

**Exo 19** Soit $\mathcal{P}$ le plan rapport au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Réponse : Formule de Green : $\mathcal{A}=\dfrac{3\pi a^2}{8}$.

**Exo 20** On considère les courbes planes : $\mathcal{Q}_i\ : x^2=2q_iy$ et $\mathcal{P}_i\ : y^2=2p_ix$. On suppose $0<q_1<q_2$ et $0<p_1<p_2$. Calculer l'aire du quadrilatère limité par $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2,\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$.

Réponse : Formule de Green. $A=\dfrac{4}{3}(p_2-p_1)(q_2-q_1)$.

**Exo 21** Calculer l'aire délimitée par la courbe d'équation $(y-x)^2=a^2-x^2$.

Réponse : Formule de Green. $A=\pi a^2$.

À la prochaine