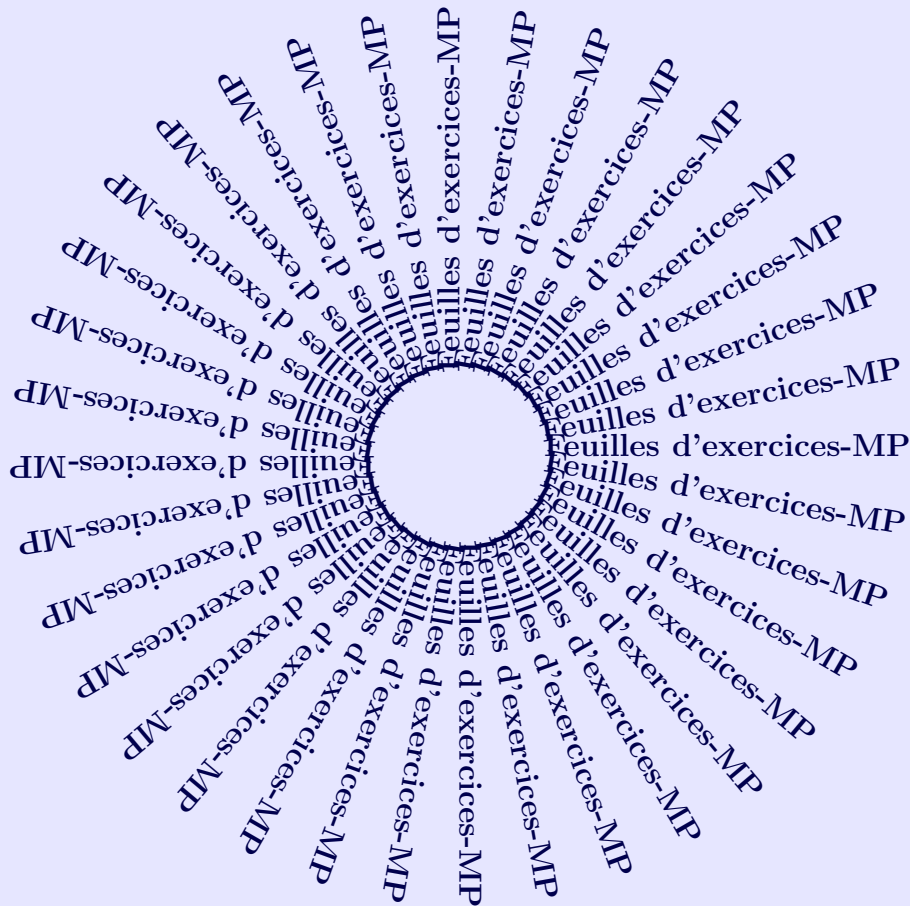


Mamouni My Ismail

- ✉ : Professeur Agrégé (1995)-Docteur (2009) en Math
- ✉ : Master 1 (2011) en Sc de l'éducation, Univ. Rouen
- ✉ : MP-CPGE My Youssef, Rabat
- ✉ : Enseignant en Classes Prépas depuis 1995
- ✉ : mamouni.myismail@gmail.com
- ✉ : mamouni.new.fr



Sommaire

1	Autour de la Comatrice.	1
1.1	Énoncé	1
2	Endomorphismes nilpotents.	3
2.1	Énoncé (cnc 2005, TSI)	3
2.2	Corrigé (Pr. Mamouni, CPGE My Youssef, Rabat)	5
3	Endomorphismes cycliques.	7
3.1	Énoncé (extrait cnc 99, MP)	7
1	Endomorphismes nilpotents d'indice n et $n-1$	10
1.1	Énoncé	11
1.2	Corrigé, Pr. Mamouni, CPGE My Youssef, Rabat	13
4	Matrices Stochastiques	16
4.1	Énoncé (extrait cnc 2002, TSI)	17
5	Décomposition Spectrale et racine carrée d'un endomorphisme	19
5.1	Énoncé (extrait CCP PC 2010)	19
5.2	Corrigé (Pr. Blache, CPGE France)	23
1	Recherche de quelques polynômes minimaux	31
1.1	Énoncé : (extrait e3a 2008, MP)	31
1.2	Corrigé Pr. Dufait, CPGE France	35
6	Commutant d'une matrice	41
6.1	Énoncé : (extrait e3a 2011, MP)	41
6.2	Corrigé, Pr. Stainer, Lycée Clemenceau, Nantes	43
1	Diagonalisation du crochet de Lie	45
1.1	Énoncé : CNC 2000, MP	45
1.2	Corrigé, Pr. Mamouni, CPGE My Youssef, Rabat	49
7	Topologie des matrices	56
7.1	Énoncé (extrait CNC)	56

8	Problème du point fixe.	60
2	Topologie des racines carrés d'une matrice	62
2.1	Énoncé : CCP 2005, MP	62
2.2	Corrigé, Pr. Devulder, CPGE France	66
9	Algèbres de dimension 2	71
9.1	Énoncé : CNC 96	71
9.2	Corrigé, Pr. Med. El Fatemi, CPGE CPR Tanger	76
10	matrices positives et décomposition de Cholesky	82
10.1	Énoncé : CCP 2003, PSI	82
10.2	Corrigé, Pr. J. DEBARBIEUX, Lycée Faidherbe, Lille	88
3	Espaces d'Artin et applications	95
3.1	Énoncé : Extrait Centrale 2010, MP	96
3.2	Corrigé : Pr. Boujaida, CPGE Rabat	102
11	Coniques-Quadriques	116
11.1	Exercice 1 : Extrait e3a 2009, MP	117
11.2	Exercice 2 : Extrait e3a 2004, MP	118
11.3	Corrigé Exercice 1, Pr. Dufait	121
11.4	Corrigé Exercice 2, Mma Gayout	123
12	Fonctions harmoniques	125
12.1	Énoncé : Mines-Ponts 2004, MP	125
13	Courbes & Surfaces	130
13.1	Énoncé : e3a 2009, PSI	130
13.2	Corrigé : Pr Skler, CPGE France	132
14	Calcul Différentiel, Courbes & Surfaces	136
14.1	Problème : extrait X 2004, MP	136
14.2	Problème : Mines-Ponts 2004, MP	138
14.3	Corrige Problème I : Pr. Duval, CPGE France	141
14.4	Corrigé Problème II : Pr. Patte, CPGE France	143



15	Calcul Différentiel, Courbes & Surfaces	145
15.	Problème : extrait cnc 2007, PSI	145
15.	Exercice I : extrait e3a 2007, MP	147
15.	Exercice II : extrait e3a 2008, MP	149
15.	Corrigé Problème : Pr. Chabchi, CPGE Marrakech	150
15.	Corrigé Exercice I : Pr. Deyris, CPGE France	152
15.	Corrigé Exercice II : Pr. Lemaire, CPGE France	153
16	Valeur moyenne d'une fonction	156
16.	Énoncé : CNC 2006, MP	156
16.	Corrigé : Pr. Mamouni, CPGE Rabat, Maroc	160
17	Transformée de Fourier, de Lebesgue. Séries de Dirichlet	169
17.	Énoncé : CCP 2011, PSI	169
17.	Pr. Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes	173
18	Suites et séries de fonctions	182
18.	Problème I : Exemple d'étude	182
18.	Problème II : Fonction ζ et η de Riemann.	183
18.	Corrigé : Pr. Deyris, CPGE France	190
19	Équations de Bessel et la fonction Gamma	194
19.	Énoncé : CNC 2007, MP	194
19.	Corrigé : Pr. Taibi, CPGE Rabat, Maroc	198
20	Fonction Gamma et Psi d'Euler	207
20.	Problème I : Extrait CCP 2006, MP	207
20.	Problème II : Extrait e3a 2011, MP	210
20.	Corrigé Problème II : Pr. Patte	212
21	Ev. Euclidiens : Les "must" Classiques	214
21.	Matrice de Gram.	214
21.	Décomposition polaire	215
21.	Endomorphismes normaux.	216
21.	Décomposition de Cholesky, QR.	216

21. $F \neq E$ mais $F^\perp = \{0_E\}$.	216
21. Rayleigh, Courant Fischer	217
22 Réduction simultanée et décomposition de Cholesky	218
22. Énoncé : Extrait CCP 2011, MP	218
23 Phénomène de Gibbs	224
23. Énoncé : CCP 2006, MP	225
23. Corrigé : Pr. Boujaida, CPGE Rabat, Maroc	229
24 Équations différentielles : Exemple d'étude.	235
24. Énoncé : CNC 2004, MP	235
24. Corrigé : Pr. Mamouni, CPGE Rabat, Maroc	239
25 Fonctions holomorphes : Série de Fourier lacunaire quadratique	252
25. Énoncé : CNC MP, 2011	252
25. Corrigé : Pr. Hfa, CPGE Agadir, Maroc	257
26 Formule de Green-Riemann & Intégrale de Dirichlet	269
26. Énoncé : e3a 2009, PSI	269
26. Corrigé : Pr. Devulder, CPGE France	273

Devoir Libre

1 Autour de la Comatrice.

Blague du jour

- Pourquoi les vaches ne parlent pas ? - C'est marqué la ferme.
- Deux vaches discutent dans un pré :
La première : Dis, ça t'inquiète pas, ces histoires de vaches folles dont on parle en ce moment ?
La deuxième : Non, moi, je m'en fou, je suis un lapin.



Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. En 1884, il entra premier l'école normale supérieure. Son résultat le plus célèbre est $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs x . Il a laissé son nom aux *matrices de Hadamard* utilisés en algorithmes quantiques, traitement du signal, compression de données, ...

Mathématicien du jour

Énoncé

① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

a On suppose que A est inversible.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, associé A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

- i** Montrer que $f(F_k) = F_k$.
- ii** En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.
- iii** En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.
- iv** En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

b On suppose que A est non inversible.

i Montrer que $\exists \alpha \neq 0$ tel que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.

ii En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

② Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que :
 si $\text{rg}(A) = n$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = n$
 si $\text{rg}(A) = n - 1$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$
 si $\text{rg}(A) \leq n - 2$ alors $\text{com}(A) = 0$

☞ Indication : On pourra utiliser le résultat suivant, dit théorème de Rouché-Fontené :

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg}(A) = r$, alors il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ extraite de A qui soit inversible.

- ③ Exprimer $\text{com}(\lambda A)$. en fonction de λ, n et $\text{com}(A)$.
- ④ Calculer $\text{com}(\text{com } A)$ dans le cas où A est inversible.
- ⑤ Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a Calculer $\text{com}(I_n)$.
 - b Si A et B sont inversibles, démontrer que

$\text{com}(AB) = (\text{com } A)(\text{com } B)$ et $\text{com}(A^{-1}) = \text{com}(A)^{-1}$.

- c Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant des scalaires λ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.
- d En déduire que si A et B sont semblables, alors $\text{com } A$ et $\text{com } B$ le sont aussi.



À la prochaine

Devoir Libre

2 Endomorphismes nilpotents.

Blague du jour

Un homme regarde un match de foot dans un café, lorsque son équipe nationale marque un but, le chien se met à courir dans tout les sens. Le voisin demande à l'homme : Qu'est ce qui lui arrive votre chien ?

- Il est supporter de l'équipe nationale, il est content.
- Ben dites donc, juste pour un but ! Et qu'est-ce-qu'il fait quand elle gagne un match ?!!
- Je ne sais pas, je ne l'ai que depuis 5 ans...



Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894)

Mathématicien russe, connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. Tchebychev appartient à l'école mathématique russe fondée par Daniel Bernoulli et Euler. Il démontra en 1850 une conjecture énoncée par Bertrand : Pour tout entier n au moins égal à 2, il existe un nombre premier entre n et $2n$.

Mathématicien du jour

Énoncé (cnc 2005, TSI)

E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 2$. L'identité est notée I_E . Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u^0 = I_E$.

On considère un endomorphisme nilpotent u de E , c'est à dire un endomorphisme tel qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ avec $u^r = 0$; on pose alors $p = \min \{k \in \mathbb{N}^* / u^k = 0\}$.

- ① a Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

- b Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

- c En déduire que $p \leq n$ et que $u^n = 0$.

- ② On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.

- a Calculer v^{2p} et $v^{2(p-1)}$, puis en déduire que $p \leq \frac{n+1}{2}$.

- b Donner alors un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que l'équation $X^2 = M$ n'ait pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans cette question, on suppose que $p = n$; on a donc $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. On considère un endomorphisme g de E tel que $g^2 = I_E + u$.

a Soit $x_1 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_1) \neq 0$. Justifier que $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ est une base de E et qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_1)$.

b Vérifier que $g \circ u = u \circ g$ et montrer que $g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k$.

c Justifier que la famille $(I_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre puis, en calculant g^2 de 2 façons, montrer que $\alpha_0^2 = 1$, $2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et

$$\sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k} = 0 \text{ pour } 2 \leq q \leq n-1 \text{ (si } n \geq 3 \text{)}.$$

d Montrer alors que $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ et que, pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, α_k peut être exprimé de manière unique en fonction de α_0 .

e Conclure qu'il y a exactement deux endomorphismes de E dont le carré est égal à $I_E + u$.

③ **Application** : Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



À la prochaine

❑ Corrigé (Pr. Mamouni, CPGE My Youssef, Rabat)

① **a** $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } u^k = 0\}$, donc $u^{p-1} \neq 0$, et par suite $\exists x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

b Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ tel que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose par u^{p-1} et comme $u^k = 0, \forall k \geq p$, alors $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$, or $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, d'où $\lambda_0 = 0$, ce qui donne $\lambda_1 u(x_0) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose cette fois par u^{p-2} , ce qui donne $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$ et on re-itére le même procédé jusqu'à montrer que tous les λ_i sont nuls. D'où la famille $\mathcal{C} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

c $\mathcal{C}$ est libre, donc $\text{card}(\mathcal{C}) = p \leq \dim(E) = n$, or $u^p = 0$ et $n \geq p$, d'où $u^n = 0$.

② **a** $v^{2p} = (v^2)^p = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$.

Posons : $q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } v^k = 0\}$, donc $2(p-1) < q \leq 2p$, et comme dans ce qui précède pour u , on peut aussi affirmer pour v que $q \leq n$, ainsi $2(p-1) + 1 \leq q \leq n$, d'où $2p-1 \leq n$, d'où $p \leq \frac{n+1}{2}$.

b Soit $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$ et $M = 0$, donc $p = 2$,

pour $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, d'où suivant la question précédente si $X^2 = M$, on devrait avoir $p \frac{3}{2}$, ce qui n'est pas le cas, donc l'équation $X^2 = M$, n'admet pas de solutions.

③ **a** De la même façon que dans la question 1.2), on montre que la famille $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ est libre, or son cardinal est égal à $n = \dim(E)$, donc c'est une base, et pas suite c'est une famille génératrice de E , or $g(x_1) \in E$, d'où l'existence de nombres réels $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ tel que $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$.

b $g^2 = u + I_E$, d'où $u = g^2 - I_E$ et donc $gu = g^3 - g = ug$.

Et par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $gu^k = u^k g$.

D'autre part on a les égalités suivantes :

$$\begin{cases} g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1) \\ gu(x_1) = u(g(x_1)) = \alpha_0 u(x_1) + \alpha_1 u(u(x_1)) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1) \\ \vdots \\ gu^{n-1}(x_1) = u^{n-1}(g(x_1)) = \alpha_0 u^{n-1}(x_1) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u^{n-1}(x_1)) \end{cases}$$

Ainsi g et $\alpha_0 I_E + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$ coïncident sur la base $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$, et comme elles sont linéaires elles coïncident sur E .

c Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que $\lambda_0 I_E + \lambda_1 u + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1} = 0$, on applique cette relation à x_1 , on trouve $\lambda_0(x_1) + \lambda_1 u(x_1) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_1) = 0$, or la famille $(x_1, u(x_1), \dots, u^{n-1}(x_1))$ est libre, d'où $\lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$, et donc $(I_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre.

1 ère façon : $g^2 = I_E + u$.

$$\begin{aligned} 2 \text{ème façon : } g^2 &= \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k u^k \right)^2 \\ &= \sum_{q=0}^n \left(\sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k} \right) u^q \\ &= \sum_{q=0}^n \beta_q u^q \quad \text{Avec : } \beta_k = \sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k} \end{aligned}$$

Et par identification puisque la famille $(I_E, u, \dots, u^{n-1})$ est libre, on a alors : $\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\beta_q = 0, \forall q \geq 2$.

d $\alpha_0^2 = 1$, donc $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$.

Montrons par récurrence sur $q \in \{1, \dots, n\}$, que α_q s'exprime de façon unique en fonction de α_0 .

Pour $q = 1$, on a : $\alpha_1 = \frac{1}{2\alpha_0}$, donc le résultat est vrai pour $q = 1$, supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre $q - 1$, et montrons que c'est vrai pour q .

En effet $\sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$, donc $2\alpha_q \alpha_0 = -\sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k \alpha_{q-k}$,

or $1 \leq k \leq q - 1$ et $1 \leq q - k \leq q - 1$, d'où les $\alpha_k \alpha_{q-k}$ s'expriment de façon unique en fonction de α_0 , donc leur somme aussi, et par la suite $2\alpha_q \alpha_0$ aussi et finalement α_q aussi.

e Les solutions, g de l'équation $g^2 = I_E + u$, sont de la forme $g = \sum_{k=0}^n \alpha_k u^k$, or $\forall q \in \{1, \dots, n\}, \alpha_q$ s'exprime de façon unique en fonction de $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$. Donc deux possibilités suivant la valeur prise par α_0 .

④ L'équation peut s'écrire sous la forme $X^2 = I_1 + A$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ qui vérifie } A^4 = 0 \text{ et } A^3 \neq 0, \text{ donc}$$

$X = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$, avec les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \in \{-1, 1\} \quad & 2\alpha_0\alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2 = 0 \quad & 2\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

Les solutions possibles sont :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 1, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = -\frac{1}{4}, \alpha_3 = \frac{1}{8} \\ \alpha_0 = -1, \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \alpha_3 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$



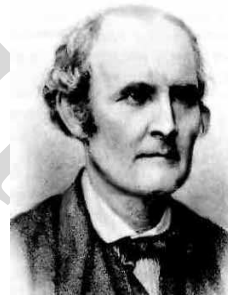
À la prochaine

Devoir Libre

3 Endomorphismes cycliques.

Blague du jour

Un vieux milliardaire téléphone à une conseillère : J'ai 60 ans et je veux me marier avec une jeune fille de 20 ans. Pensez-vous que j'aie plus de chance de l'amener à m'épouser si je lui dis il y a quelques années, j'avais juste 50 ans ? La conseillère lui répond : A mon avis, vous feriez mieux de lui dire que quelques années, vous approchez des 80 ans !



Arthur Cayley (1821-1895)

Mathématicien et avocat britannique, l'un des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices. Il a donné le premier, une définition qui s'approche de la notion moderne de groupe. Il a reçu la Médaille Copley en 1882. On lui doit aussi la découverte des nombres de Cayley, les octonions.

Mathématicien du jour

Énoncé (extrait cnc 99, MP)

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique (ou monogène) s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(f^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ engendre E . Dans tout le problème (sauf mention du contraire) f est un endomorphisme cyclique.

Partie I : Propriété caractéristique des endomorphismes cycliques

① Justifier l'existence de l'entier p maximal tel que $\mathcal{F} = (x_0, \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre.

- ② Montrer que $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.
- ③ En déduire que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E .
- ④ En déduire que $\deg \pi_f = n$, comparer π_f et χ_f .
- ⑤ On ne suppose plus f cyclique, mais que $\deg \pi_f = n$ et on se propose de montrer que f est effectivement cyclique.
 - a Pour tout $x \in E$, on note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, engendré par un unique polynôme unitaire, qu'on notera $\pi_{f,x}$.
 - b Dire pourquoi $\pi_{f,x} = \pi_f$.

- c En déduire que f est cyclique.
- ⑥ Montrer que les assertions suivantes sont équivalents :
- a f est cyclique.
- b $\deg \pi_u = n$.
- c $\chi_u = (-1)^n \pi_u$.
- d $\exists x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0))$ soit une base de E .
- e $(\text{id}, f, \dots, f^{n-1})$ libre dans $\mathcal{L}(E)$.

Partie II : Commutant d'un endomorphisme cyclique

- ① Soit un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec f .
- a Dire pourquoi que $\exists (a_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$
- b Montrer que $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.
- c En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.
- ② En déduire une base et la dimension du commutant de f , défini par $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } f \circ g = g \circ f\}$

Partie III : Polynôme minimal en un vecteur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$. On pose $E_u(x) = \{P(u)(x); P \in \mathbb{K}[X]\}$.

- ① Montrer que $E_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E , stable par u et non réduit à $\{0\}$.
On note par u_x l'endomorphisme induit par u sur $E_u(x)$.
- ② Si $x \in \ker u$, donner la forme générale des éléments de $E_u(x)$, donner en particulier $\dim E_u(x)$
- ③ Même question si cette fois x est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ de u .
- ④ On note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$.
- a Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $E_u(x)$ est stable par $P(u)$.
- b Soit $P \in \mathcal{I}_x$, montrer que $P(u)$ induit sur $E_u(x)$ l'endomorphisme nul.
- c Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non nul, engendré par un polynôme unitaire, qu'on va noter $\pi_{u,x}$ et appelé polynôme minimal de u en x .
- ⑤ a Dire pourquoi $\pi_{u,x}$ divise π_u .
- b Donner un exemple où :
- i $\pi_u = \pi_{u,x}$.
- ii $\pi_{u,x}$ divise strictement π_u .
- c Donner $\pi_{x,u}$ quand $x \in \ker u$.
- ⑥ Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x et u pour que $\deg(\pi_{u,x}) = 1$.

⑦ On suppose que u est un projecteur non nul, différent de l'identité. Rappeler son polynôme minimal, ainsi que celui de x quand $x \in \text{Im } u$.

⑧ On suppose dans cette question que $\deg(\pi_{u,x}) = k \geq 2$ avec

$$\pi_{u,x} = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j.$$

a Montrer que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ est une base de $E_u(x)$.

b Que peut-on alors dire de l'espace $E_u(x)$.

c En déduire $\dim E_u(x)$.

b Donner la forme de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_x}(u_x)$.

c En déduire que $\pi_{u_x} = \pi_{u,x}$.

Partie IV : Application

☞ Un endomorphisme u est dit irréductible si et seulement si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espace vectoriel de E stables par u .

☞ On se propose de montrer que : u est irréductible si et seulement si χ_u est un polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$.

☞ On rappelle qu'un polynôme non constant P est dit irréductible si et seulement si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et ses polynômes associés de la forme λP où $\lambda \neq 0$.

Pour cela pour tout $x \in E$, on pose $\mathbb{K}_u[x] = \{P(u)(x) \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}$, appelé sous-espace cyclique engendré par x .

① On suppose que χ_u est irréductible.

a Si $x \neq 0$, montrer que $\chi_u = \pi_u = \pi_{x,u}$.

b En déduire que $\mathbb{K}_u[x] = E$, puis conclure.

② Réciproquement, on suppose que u est irréductible.

a Soit $x \neq 0$, montrer que $\mathbb{K}_u[X] = E$.

b Supposons qu'il existe P un diviseur non trivial de χ_u et soit $y = P(u)(x)$. Montrer que $\pi_{y,u} = \frac{\chi_u}{P}$, puis en déduire une contradiction.

c Conclure



À la prochaine

Contrôle

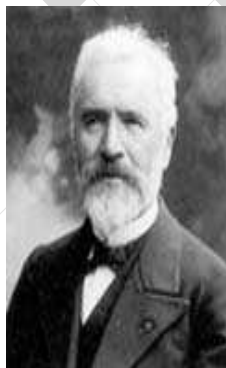
1 Endomorphismes nilpotents d'indice n et $n-1$

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- ✓ Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- ✓ Chaque résultat énoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
- ✓ Les résultats numériques importants doivent être simplifiés et encadrés.
- ✓ Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.
- ✓ Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
- ✓ Numérotter les doubles feuilles de la façon suivante : $1/n, 2/n, \dots, n/n$ où n est le nombre total des doubles feuilles.
- ✓ Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé.
- ✓ Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).
- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un polytechnicien (1855) fils de polytechnicien (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

Mathématicien du jour

Énoncé

Partie I : Noyaux et images itérés.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\dim E = n$.

- ① **a** Montrer que la suite $\left(\ker(f^k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion) et que la suite $\left(\operatorname{Im}(f^k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- b** Montrer que les suites $\left(\ker(f^k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{Im}(f^k)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un même rang p .
- c** Montrer que $\ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p) = E$.
- ② Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que :
 - a** $\ker f^k = \ker f^{k+1} \implies \ker f^{k+1} = \ker f^{k+2}$
 - b** $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1} \implies \operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2}$
- ③ **a** Soit F un sous-espace vectoriel de E , montrer que $\ker f|_F = \ker f \cap F$ et $\operatorname{Im} f|_F = f(F)$.
- b** Montrer que $f(\ker(f^{k+1})) \subset \ker(f^k)$.
- c** En déduire que : $\dim \ker f^{k+1} \leq \dim \ker f^k + \dim \ker f, \forall k \in \mathbb{N}$.
 ➡ Indication : Écrire la formule du rang pour $f|_F$ où $F = \ker(f^{k+1})$.
- ④ Montrer que la suite $\left(\dim(\ker(f^{k+1})) - \dim(\ker(f^k))\right)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

➡ Indication : Prendre G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f^{k+1}$ dans $\operatorname{Im} f^k$ et montrer que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2} + f(G)$

Partie II : Endomorphisme nilpotent.

On considère dans cette partie $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p , donc $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

- ① Soit $x \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.
- ② En déduire que si $p \leq n$, et que $f^n = 0$.
- ③ Montrer que $\operatorname{rg}(f) \leq n - 1$.
- ④ On suppose dans cette question que $p = n$.
 - a** Montrer que $\operatorname{rg} f = n - 1$
 - b** Montrer que $\dim \ker f^k = k, \forall k \in \{0, \dots, n\}$.
 ➡ Indication : Utiliser la question ③ de la partie I.
 - c** En déduire que $\ker f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}, \forall k \in \{0, \dots, n\}$.
 ➡ Indication : On rappelle le résultat suivant, si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$, alors $\operatorname{Im} g \subset \ker f$.
- ⑤ On suppose dans cette question que $p = n - 1$.
 - a** Montrer que $\forall k \in \{1, \dots, n - 2\}$, on a :
 - i** $\dim(\ker f^k) \geq k$.
 ➡ Indication : On pourra raisonner par récurrence.
 - ii** $\dim(\ker f^k) \leq k + 1$.
 ➡ Indication : On pourra raisonner par récurrence descendante.

b On suppose que $\exists k \in \{1, \dots, n-2\}$ tel que $\dim(\ker f^k) = k$ et $\dim(\ker f^{k+1}) = k+2$.

i Montrer que $\dim(\ker f^k) \geq \dim(\ker f^{k-1}) + 2$.

ii En déduire une contradiction, puis conclure.

Partie III : Opérateur des différences finies.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

- ① Montrer que $\deg(\Delta P) \leq \deg(P)$,
- ② En déduire que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, Préciser son rang.
- ③ Montrer que $\deg(\Delta P) \leq \deg(P) - 1$. En déduire que Δ est nilpotent.

④ On pose $L_0(X) = 1, L_1(X) = X, L_k(X) = \frac{X(X-1) \cdots (X-(k-1))}{k!}$ pour tout $2 \leq k \leq n-1$.

a Montrer que $\Delta L_k = L_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

b Que vaut $\Delta^k L_{n-1}$?

⑤ En déduire que Δ est l'indice de nilpotence de Δ est égal à $n-1$.

⑥ En déduire que $\ker \Delta^{n-k} = \text{Im } \Delta^k = \mathbb{R}_{n-k-1}[X]$.

⑦ $\Delta^m P(X) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} P(X+k)$.

☞ Indication : Remarquer que $\Delta = \mathcal{T} - id$ où $\mathcal{T}(P)(X) = P(X+1)$

⑧ Simplifier la somme $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$



Bonne Chance

❑ Corrigé, Pr. Mamouni, CPGE My Youssef, Rabat

Partie I : Noyaux et images itérés.

① a Classique et facile.

b La suite $(\ker(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, donc la suite $(\dim \ker(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante majorée par $\dim E$, donc converge, or elle est à valeur dans $\mathbb{Z}$, donc stationnaire (*), donc $\exists p \in \mathbb{N}$; tel que $\dim \ker(f^k) = \dim \ker(f^p) \forall k \geq p$, or $\ker(f^k) \subset \ker(f^p) \forall k \geq p$, d'où l'égalité. D'après la formule du rang, on a $\dim \operatorname{Im}(f^k) = \dim \operatorname{Im}(f^p) \forall k \geq p$, or $\operatorname{Im}(f^p) \subset \operatorname{Im}(f^k) \forall k \geq p$, d'où l'égalité.

(*) : Montrons le résultat suivant : Toute suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente, est stationnaire. En effet : pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq p$, on a $|x_k - x_p| \leq \frac{1}{2}$, or $|x_k - x_p| \in \mathbb{N}$ donc nul.

c D'après la formule du rang, on a $\dim \ker(f^p) + \dim \operatorname{Im}(f^p) = \dim E$, comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\ker f^p \cap \operatorname{Im} f^p = 0$. En effet, $f^p(x) = 0$ et $x = f^p(x') \implies f^{2p}(x') = f^p(x) = 0$, d'où $x' \in \ker f^{2p} = \ker f^p$, ce qui signifie $x = f^p(x') = 0$.

② $x \in f(\ker(f^{k+1})) \implies x = f(x')$ tel que $f^{k+1}(x') = 0$, donc $f^k(x) = f^{k+1}(x') = 0$.

③ Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

a On a déjà $\ker f^{k+1} \subset \ker f^{k+2}$, Inversement $x \in \ker f^{k+2} \implies f^{k+1}(f(x)) = 0 \implies f(x) \in \ker f^{k+1} = \ker f^k \implies f^k(f(x)) = f^{k+1}(x) = 0$.

b On a déjà $\operatorname{Im} f^{k+2} \subset \operatorname{Im} f^{k+1}$, Inversement $x \in \operatorname{Im} f^{k+1} \implies \exists x' \in E$; tel que $x = f(f^k(x'))$, or $f^k(x') \in \operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$, donc $\exists x'' \in E$; tel que $f^k(x') = f^{k+1}(x'')$, donc $x = f^{k+2}(x'') \in \operatorname{Im} f^{k+2}$.

④ $\ker f|_F = \ker f \cap F$ et $\operatorname{Im} f|_F = f(F)$ (facile, utiliser juste les définition, cette propriété, bien que très simple, elle est très utile)

⑤ La formule du rang pour $f|_F$ où $F = \ker(f^{k+1})$, s'écrit : $\dim \ker(f^{k+1}) = \dim (\ker(f^{k+1}) \cap \ker f) + \dim (f(\ker(f^{k+1}))) \leq \dim \ker f + \dim \ker f^k$ car $\ker f \subset \ker f^{k+1}$ et $f(\ker f^{k+1}) \subset \ker f^k$.

⑥ Soit G tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1} \oplus G$, donc $\operatorname{Im} f^{k+1} = f(\operatorname{Im} f^k) = f(\operatorname{Im} f^{k+1}) + f(G) = \operatorname{Im} f^{k+2} + f(G)$. En passant aux dimensions, on obtient : $\dim \operatorname{Im} f^{k+1} = \dim \operatorname{Im} f^{k+2} + \dim f(G) - \dim \operatorname{Im} f^{k+1} \cap f(G) \leq \dim \operatorname{Im} f^{k+2} + \dim f(G)$. Moyennant la formule du rang, on obtient : $\dim \ker f^{k+2} - \dim \ker f^{k+1} \leq \dim f(G) \leq \dim G = \dim \operatorname{Im} f^k - \dim \operatorname{Im} f^{k+1} = \dim \ker f^{k+1} - \dim \ker f^k$.

Partie II : Endomorphisme nilpotent.

- ① Supposons $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$, on compose une fois par f^{p-1} , puis par f^{p-2} et ainsi de suite pour montrer que $\lambda_0 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.
- ② La famille précédente est libre, donc de cardinal $p \leq n = \dim E$. Or $f^p = 0$, d'où $f^n = 0$.
- ③ On a $f^p(x) = 0$, donc $f^{p-1}(x) \in \ker f$ or $f^{p-1}(x) \neq 0$, donc $\dim \ker f \geq 1$, d'où $\operatorname{rg}(f) \leq n - 1$.
- ④ **a** La famille $(f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ de cardinal $p - 1 = n - 1$ est libre comme sous-famille d'une famille libre, or ses éléments appartiennent tous à $\operatorname{Im} f$, donc $n - 1 \leq \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f \leq n = \dim E$. Or f n'est pas bijective (car $f^{p-1}(x) \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \in \ker f \neq 0$), donc $\operatorname{rg} f \neq n$, d'où $\operatorname{rg} f = n - 1$.
- b** Montrer par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ que $\dim \ker f^k = k$.
En effet, pour $k = 0$ le résultat est évidemment vérifié.
Supposons maintenant que $\dim \ker f^k = k$, d'après la question ③ de la partie I, on a $\dim \ker f^k = k \leq \dim \ker f^{k+1} \leq \dim \ker f^k + \dim \ker f = k + 1$. Or $\dim \ker f^k < \dim \ker f^{k+1}$ car la suite des noyaux itérés ne devienne stationnaire qu'à partir de $p = n$, donc $\dim \ker f^{k+1} = k + 1$.
- c** On a $f^n = f^k f^{n-k} = 0$, donc $\operatorname{Im} f^{n-k} \subset \ker f^k$, et sont de même dimension d'après la formule du rang et la question précédente, d'où l'égalité.
- ⑤ **a**
- i** Pour $k = 1$, on a déjà vu que $\ker f \neq 0$, donc $\dim \ker f \geq 1$.

Supposons que $\dim \ker f^k \geq k$, on sait que la suite des noyaux itérés ne devienne stationnaire qu'à partir de $k = p$, donc $\dim \ker f^{k+1} \geq \dim \ker f^k + 1 \geq k + 1$.

ii Pour $k = n - 2$, on a $f^{n-2} = f^{p-1} \neq 0$, donc $\ker f^{n-2} \neq E$, d'où $\dim \ker f^{n-2} < n = \dim E$, autrement dit : $\dim \ker f^{n-2} \leq n - 1$.

Supposons que $\dim(\ker f^{k+1}) \leq k + 2$, toujours d'après le même que la suite des noyaux itérés est strictement décroissante pour $k \leq p$, on a $\dim \ker f^k < \dim(\ker f^{k+1}) \leq k + 2$, d'où $\dim \ker f^k \leq k + 1$.

b On suppose que $\exists k \in \{1, \dots, n - 2\}$ tel que $\dim(\ker f^k) = k$ et $\dim(\ker f^{k+1}) = k + 2$.

i D'après la question ④ de la partie I, on a $\dim(\ker f^k) - \dim(\ker f^{k-1}) \geq \dim(\ker f^{k+1}) - \dim(\ker f^k) = 2$.

ii On a $\dim \ker f^{k-1} \geq k - 1$, d'où $k = \dim \ker f^k \geq k + 1$, absurde.

On montre de la même façon (par récurrence) que dans la question ④ de la partie I, que $\dim \ker f^k = k$, $\forall 0 \leq k \leq n - 2$.

Partie III : Opérateur des différences finies.

- ① Utiliser la relation $\deg(P(X + 1) - P(X)) \leq \max(\deg P(X + 1), \deg(X)) \leq n$ car $\deg P(X + 1) \leq n$.
- ② Δ est linéaire, il est simple de vérifier que $\Delta(P + \lambda Q) = \Delta(P) + \lambda \Delta(Q)$. or $\Delta : \mathbb{R}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Avant de préciser son rang, chercher d'abord $\dim \ker \Delta$. $P \in$

$\ker \Delta \iff P(X+1) = P(X)$, Posons $Q(X) = P(X) - P(0)$, alors $Q(0) = Q(1) = Q(2) = \dots$, ainsi Q admet une infinité de racines, donc est nul, d'où P est constant, $\ker \Delta$ est l'ensemble des polynômes constants, dont la dimension vaut 1. La formule du rang donne $\operatorname{rg} \Delta = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] - \dim \ker \Delta = n - 1$.

③ $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$ avec $\deg P(X+1) = \deg P(X)$ et $\operatorname{co} P(X+1) = \operatorname{co} P(X)$, donc $\deg \Delta P(X) < \deg P(X)$, i.e. $\deg(\Delta P) \leq \deg(P) - 1$. Par récurrence, on montre que $\deg \Delta^k P \leq \deg P - k \leq n - 1 - k$. En particulier, $\deg \Delta^n P < 0$, i.e., $\Delta^n = 0$.

④ a
$$\begin{aligned} \Delta L_k(X) &= L_k(X+1) - L_k(X) \\ &= \frac{L_k(X+1) - L_k(X)}{(X+1)X \cdots (X-k) - X(X-1) \cdots (X-k+1)} \\ &= X \cdots (X-k) \frac{(X+1) - (X-k+1)}{k!} \\ &= \frac{X \cdots (X-k)}{(k-1)!} = L_{k-1}(X) \end{aligned}$$

b Par récurrence, on montre que $\Delta^k L_{n-1} = L_{n-1-k}$

⑤ On a $\Delta^n = 0$ et $\Delta^{n-1} L_{n-1} = L_0 \neq 0$, donc Δ est nilpotent d'indice égal à $n - 1$.

⑥ D'après la question ④-c de la partie II, appliquée à $f = \Delta$, sur $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $p = n - 1$, donc $\ker \Delta^{n-k} = \operatorname{Im} \Delta^k$, d'autre part $\dim \ker \Delta^{n-k} = n - k = \dim \mathbb{R}_{n-k}[X]$, d'où l'égalité.

⑦ On montre d'abord par récurrence que $\mathcal{T}^k P(X) = P(X+k)$, d'où $\Delta^m P(X) = (\mathcal{T} - \operatorname{id})P(X) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \mathcal{T}^k P(X) = \sum_{k=0}^m (-1)^{n-k} \binom{m}{k} P(X+k)$.

⑧ On remarque $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k) = \Delta^n P(X) = 0$.



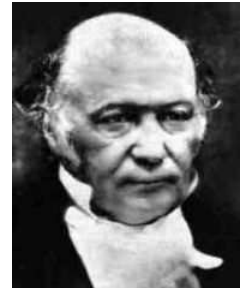
À la prochaine

Devoir Libre

4 Arithétique

Blague du jour

- Trois statisticiens vont la chasse au canard. Un canard décolle. Le premier tire et passe dix centimètres au-dessus. Le second tire et passe dix centimètres en-dessous. Le troisième, tout sourire : "c'est bon les gars, on l'a eu !"
- La vie est complexe, elle a une partie réelle et une autre imaginaire.
- Qu'est-ce qu'un ours polaire ? C'est un ours cartésien qui a changé ses coordonnées.



Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

Mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique.

Enfant prodige ; et doué pour les langues à l'âge de 7 ans, il parlait déjà en hébreu et, à l'âge de 13 ans, sous la direction de son oncle qui est linguiste, il parlait déjà 13 langues : le persan, l'arabe, l'hindousthâni, le sanskrit, le malais,....

Mathématicien du jour

Matrices Stochastiques (extrait cnc 2002, TSI)

Notations et définitions

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n .

On désigne enfin par $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ dont tous les coefficients sont **positifs** ou **nuls** et vérifient :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Quelques propriétés de matrices appartenant à $\mathcal{K}_n$

Dans cette partie, $A = (a_{ij})$ désigne un élément de $\mathcal{K}_n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice A . On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on pose $e = e_1 + \dots + e_n$.

Soit λ une valeur propre de u et $x = (x_1, \dots, x_n)$ un **vecteur propre** associé.

A- Premiers résultats

1. Montrer que 1 est une valeur propre de u et déterminer un vecteur propre associé.
2. En faisant une traduction matricielle de l'égalité $u(x) = \lambda x$ et en choisissant un indice p tel que $|x_p| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$, montrer que $|\lambda| \leq 1$.
3. Dans la suite, on pose $m = \min\{a_{ii} ; 1 \leq i \leq n\}$.
 - (a) En utilisant une méthode analogue à la précédente, montrer que $|\lambda - m| \leq 1 - m$.
 - (b) Dessiner le cercle $\mathcal{C}(0, 1)$, de centre 0 et de rayon 1, et le disque fermé $\overline{D}(m, 1 - m)$ sur un même graphique. (on rappelle que $\overline{D}(m, 1 - m) = \{z \in \mathbb{C}, |z - m| \leq 1 - m\}$.)
4. On suppose que $m > 0$; montrer que si λ est de module 1 alors $\lambda = 1$.
5. On suppose que $m > \frac{1}{2}$. Vérifier que $0 \notin \overline{D}(m, 1 - m)$ et conclure que A est une matrice inversible.

B- Toute valeur propre de A de module 1 est une racine de l'unité

Dans la suite de cette partie, on suppose que $|\lambda| = 1$ et on choisit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. On pose $I_0 = \{j \in \{1, \dots, n\} / a_{i_0 j} x_j \neq 0\}$.

1. (a) Exprimer $\sum_{j \in I_0} a_{i_0 j} x_j$ à l'aide de λ et x_{i_0} et en déduire que I_0 est non vide.
- (b) Montrer que $\sum_{j \in I_0} a_{i_0 j} = 1$.
- (c) Vérifier que $|\sum_{j \in I_0} a_{i_0 j} x_j| = \sum_{j \in I_0} |a_{i_0 j} x_j| = |x_{i_0}|$ et en déduire, d'une part que

$$\forall j \in I_0, |x_j| = |x_{i_0}|,$$

d'autre part, en utilisant un résultat précédent, justifier l'existence de $z \in \mathbb{C}$ et d'une famille $(\alpha_j)_{j \in I_0}$ de réels positifs tels que

$$\forall j \in I_0, a_{i_0 j} x_j = \alpha_j z.$$

- (d) Déduire de ce qui précède que

$$\forall (j, k) \in I_0^2, x_j = x_k$$

et que

$$\lambda x_{i_0} = x_{i_1}, i_1 \in \{1, \dots, n\}.$$

2. (a) Montrer qu'on peut construire une suite finie $(j_0, j_1, \dots, j_n)$ d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ telle que

$$|x_{j_0}| = \dots = |x_{j_n}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

et que

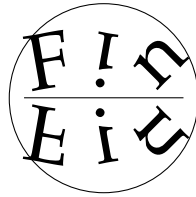
$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda x_{j_{k-1}} = x_{j_k}$$

- (b) En déduire alors qu'il existe $q \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda^q = 1$.

3. Dans cette question, on suppose que tous les coefficients de A sont strictement positifs :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_{ij} > 0.$$

En utilisant la question 1. (d) précédente, montrer que l'espace propre de u , associé à la valeur propre 1, est égal à $\mathbb{C}.e$ où $e = (1, \dots, 1)$.



À la prochaine

Devoir Libre

5 Décomposition Spectrale et racine carrée d'un endomorphisme

Blague du jour

Êtes-vous accro l'Internet ? La réponse serait oui si :

- A trois heures du matin, vous vous levez pour un besoin pressant et regardez en revenant si vous avez reçu des mails.
- Vous inclinez la tête gauche quand vous souriez
- Sur la porte de la cuisine est écrit : "upload"
- Sur la porte des toilettes est écrit : "download"



Sophus Lie (1842-1899)

Mathématicien norvégien. Il a participé activement à la création de la théorie des symétries continues, et l'a appliquée à la géométrie et aux équations différentielles. On lui doit la création de l'algèbre de Lie, ainsi que des groupes de Lie. Soupçonné d'être un espion allemand, il profite de son incarcération pour avancer sa thèse sur « une classe de transformation géométrique. Il était marié à la petite fille de Niels Henrik Abel.

Mathématicien du jour

Énoncé (extrait CCP PC 2010)

Notations et objectifs.

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs.

On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité.

Pour tout endomorphisme f , $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ désigneront respectivement le noyau et l'image de f .

L'ensemble des valeurs propres de f sera noté $\text{Sp}(f)$ et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$, on

définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \text{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \dots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors

$\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \dots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie I

A) On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ① Montrer que f est diagonalisable.
- ② Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
- ③ Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3) . Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P , exprimer A^m en fonction de D , P et P^{-1} .
- ④ Calculer P^{-1} , puis déterminer la base de f^m dans la base canonique.
- ⑤ Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2).
- ⑥ Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

- ⑦ Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

B) Soient f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ① Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.
- ② En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
- ③ Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
- ④ Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.
- ⑤ Après avoir calculé $p^2, q^2, p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h , combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.
- ⑥ Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f . Ecrire la matrice D de f , puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.
- ⑦ Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

- ⑧ En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q .
- ⑨ Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie II

Soit f un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \text{id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

- ① Calculer $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id})$. En déduire que f est diagonalisable.
- ② Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.
- ③ Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.
- ④ On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$. Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q .
- ⑤ Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:
- $$f^m = \lambda^m p + \mu^m q.$$
- ⑥ Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q . Déterminer la dimension de F .
- ⑦ On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$.
- ⑧ Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.

- ⑨ Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.
- ⑩ En déduire que si $\dim(E) \geq 3$, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie III

Soient $p_1, \dots, p_m$, m endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, m nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i.$$

- ① Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

- ② En déduire que $\prod_{i=1}^m (f - \lambda_i \text{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.
- ③ Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} (X - \lambda_i) / (\lambda_\ell - \lambda_i).$$

Montrer que pour tout entier ℓ , tel que $1 \leq \ell \leq m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$.

En déduire que $\text{Im}(p_\ell) \subset \ker(f - \lambda_\ell \text{id})$, puis que le spectre de f est :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.$$

- ④ Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

- ⑤ Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^m \ker(f - \lambda_i \text{id})$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i .
- ⑥ Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \dots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F .
- ⑦ Déterminer $\mathcal{R}(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.
- ⑧ Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.
- a Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f .
 - b Montrer que si $h \in \mathcal{R}(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h .
 - c En déduire que $\mathcal{R}(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide.
- ⑨ Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie IV

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

- ① Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.
- ② Montrer que si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, alors $2p - 1 \leq n$.
- ③ Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.
- ④ Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.
- ⑤ Montrer alors que $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$.
Plus généralement, montrer que pour tout réel α réel, $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$.

B)

- ① Soit $T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ .
Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.
- ② On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ . Déduire de la question précédente que $E = \ker(f - \lambda \text{id})^n$.
- ③ Montrer que si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.

❑ Corrigé (Pr. Blache, CPGE France)

Partie I

A)

- ① Calculons le polynôme caractéristique de A (donc aussi de f) :

$$P_f(X) = P_A(X) = \begin{vmatrix} 8-X & 4 & -7 \\ -8 & -4-X & 8 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = -X(X-1)(X-4).$$

Ainsi, P_f est scindé à racines simples, donc f est diagonalisable.

- ② L'étude des sous-espaces propres donne :

$$E_0(f) = \text{Vect}(v_1) \text{ avec } v_1 = (1, -2, 0),$$

$$E_1(f) = \text{Vect}(v_2) \text{ avec } v_2 = (1, 0, 1),$$

$$E_4(f) = \text{Vect}(v_3) \text{ avec } v_3 = (1, -1, 0).$$

Dans ce cas, la matrice D est donnée par : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

- ③ La formule de changement de base donne : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$,
et donc $A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$.

- ④ En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

Après calculs, on trouve que la matrice de f^m dans la base

canonique est :

$$A^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4^m & 4^m & 1 - 2 \cdot 4^m \\ -2 \cdot 4^m & -4^m & 2 \cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on vérifie que cela redonne A pour $m = 1$.

- ⑤ Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ une matrice qui commute avec D . On écrit que $MD = DM$, ce qui donne $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Donc nécessairement, M est une matrice diagonale.

Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D qui est elle-même diagonale.

Finalement, les matrices qui commutent avec D sont les matrices dia

- ⑥ On a $HD = DH = H^3$, donc H et D commutent.
- ⑦ D'après les questions 5) et 6), si $H^2 = D$, alors H est une matrice diagonale. La condition $H^2 = D$ donne également :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \text{ (ce qui fournit 4 solutions).}$$

Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par $P \cdot H \cdot P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

$$\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

B)

- ① On trouve pour tout entier $m \geq 1$: $J^m = 3^{m-1}J$.

- ② Travaillons avec les matrices A et J . On a $A = J + I_3$. Comme J et I_3 commutent, la formule du binôme donne :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, A^m = (I_3 + J)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} J^k = I_3 + \left(\sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot 3^{k-1} \right) J = I_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J.$$

Si on revient aux endomorphismes, cela donne :

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{N}^*, f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j.$$

Evidemment, cette relation est encore valable pour $m = 0$ (car dans ce cas, on a $\text{id} = \text{id}$).

- ③ Un calcul du polynôme caractéristique de A donne :
 $P_f(X) = P_A(X) = -(X - 1)^2(X - 4)$. Donc
 f admet les deux valeurs propres $\lambda = 1$ et $\mu = 4$.

- ④ D'après la question 2), on peut écrire $f^m = 1^m(\text{id} - \frac{1}{3}j) + 4^m(\frac{1}{3}j)$ pour tout entier $m \geq 0$. En posant $p = \text{id} - \frac{1}{3}j$ et $q = \frac{1}{3}j$, on obtient l'existence de la décomposition voulue.
 De plus, on a nécessairement $\text{id} = p + q$ (pour $m = 0$) et $f = p + 4q$ (pour $m = 1$). Donc $p = \frac{1}{3}(4\text{id} - f)$ et $q = \frac{1}{3}(f - \text{id})$, d'où l'unicité de cette décomposition.

Enfin, comme id et j sont deux endomorphismes linéairement indépendants (d'après leur écriture matricielle), il en est de même pour p et q .

- ⑤ On obtient, en utilisant les expressions de p et q trouvées à la question précédente :
 $p^2 = p, q^2 = q, p \circ q = q \circ p = 0$.

Soit maintenant $h = \alpha \cdot p + \beta \cdot q$ tel que $h^2 = f$. D'après les relations précédentes, on a

$$h^2 = \alpha^2 \cdot p + \beta^2 \cdot q = f = p + 4q.$$

Comme (p, q) est une famille libre, cette égalité équivaut à $\alpha^2 = 1$ et $\beta^2 = 4$.

Donc il y a 4 endomorphismes h solutions, donnés par :

$$h = \pm p \pm 2q.$$

- ⑥ On détermine les sous-espaces propres de f :

$$E_1(f) = \text{Vect}(w_1, w_2) \text{ avec } w_1 = (1, -1, 0) \text{ et } w_2 = (0, 1, -1),$$

$$E_4(f) = \text{Vect}(w_3) \text{ avec } w_3 = (1, 1, 1).$$

$$\text{Comme } \dim(E_1(f)) + \dim(E_4(f)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3),$$

f est diagonalisable.

Et (w_1, w_2, w_3) est une base de vecteurs propres pour f .

Notons $\mathcal{B}_d = (w_1, w_2, w_3)$. Alors :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ⑦ On peut prendre par exemple : $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- ⑧ Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_d$ est Y . Alors $h^2 = f$ car $Y^2 = D$. Et h n'est pas combinaison linéaire de p et q , car Y n'est pas combinaison linéaire de leurs matrices (vues précédemment) dans la base $\mathcal{B}_d$.

- ⑨ Soit h tel que $h^2 = f$. Comme f est diagonalisable et que ses valeurs propres sont 1 et 4, le polynôme $Q_1(X) = (X - 1)(X - 4)$ est un polynôme annulateur de f , donc de h^2 .
Donc le polynôme $Q_2(X) = (X^2 - 1)(X^2 - 4) = (X - 1)(X + 1)(X - 2)(X + 2)$ est un polynôme annulateur de h . Or ce polynôme est scindé à racines simples, donc d'après le cours, h est diagonalisable.

Partie II

- ① On a, en utilisant les trois relations, $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu) \text{id} = 0$. Donc $(X - \lambda)(X - \mu)$ est un polynôme annulateur de f , scindé à racines simples. Et f est diagonalisable.
- ② A la question précédente, on a trouvé un polynôme annulateur de f qui n'a que λ et μ comme racines. Il en résulte que $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda; \mu\}$.
Si μ n'est pas valeur propre de f , la seule valeur propre est donc λ . Comme f est diagonalisable, on a donc $f = \lambda \text{id}$. En utilisant les deux premières relations de l'énoncé, on a donc :
 $\lambda \text{id} = \lambda p + \mu q = \lambda p + \lambda q$.
D'où $(\lambda - \mu)q = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$, $q = 0$. Ceci est contraire aux hypothèses; ainsi μ est valeur propre de f .
On montrerait de même que λ est aussi une valeur propre de f . Donc $\text{Sp}(f) = \{\lambda; \mu\}$.
- ③ D'après la question 1), on a : $0 = (f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id}) = (\mu - \lambda)q \circ (\lambda - \mu)p$. Comme $\lambda \neq \mu$, on en déduit que $q \circ p = 0$.
De même, comme $(f - \mu \text{id}) \circ (f - \lambda \text{id}) = 0$, on trouve $p \circ q = 0$.

Enfin, comme $\text{id} = p + q$, on obtient, en composant par p (resp. par q) : $p = p^2$ (resp. $q = q^2$).

- ④ Comme $\lambda\mu \neq 0$, f n'admet pas la valeur propre 0. Donc $\ker f = \{0\}$, et comme E est de dimension finie, f est bijective.

De plus, on a vu en 1) que $f^2 - (\lambda + \mu)f + (\lambda\mu) \text{id} = 0$. D'où $f^{-1} = \frac{-1}{\lambda\mu}(f - (\lambda + \mu)\text{id})$. On remplace f et id à l'aide de p

et q , ce qui donne finalement : $f^{-1} = \frac{1}{\lambda}p + \frac{1}{\mu}q$.

- ⑤ La relation $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ est vérifiée pour $m = 0, 1, 2$ d'après l'énoncé, et pour $m = -1$ d'après la question précédente.

Une démonstration par récurrence sans difficulté, d'une part pour $m \in \mathbb{N}$, d'autre part pour $-m \in \mathbb{N}$, donne (en utilisant le fait que $p \circ q = q \circ p = 0$) : $\forall m \in \mathbb{Z}, f^m = \lambda^m p + \mu^m q$.

- ⑥ Soient deux réels α et β tels que $\alpha p + \beta q = 0$. En composant par p , on a $\alpha p = 0$ donc $\alpha = 0$ puisque $p \neq 0$. De même, en composant par q , on obtient $\beta = 0$.

Donc (p, q) est une famille libre et $\dim(F) = 2$.

- ⑦ Soit $h \in \mathcal{R}(f) \cap F$. Alors $h = \alpha p + \beta q$ et comme $p \circ q = q \circ p = 0$, $h^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q = f = \lambda p + \mu q$. Comme (p, q) est une famille libre, on a $\alpha^2 = \lambda$ et $\beta^2 = \mu$, i.e. (puisque λ et μ sont supposés positifs) $\alpha = \pm\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \pm\sqrt{\mu}$. On obtient 4 possibilités, qui réciproquement conviennent toutes. Par conséquent, les 4 solutions sont $h = \pm\sqrt{\lambda} p \pm \sqrt{\mu} q$.

- ⑧ Définissons la matrice K diagonale par blocs de la façon suivante :

$$K = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 \end{array} \middle| I_{k-2} \right),$$

où I_{k-2} est la matrice identité de $\mathcal{M}_{k-2}(\mathbb{R})$ (bien définie car $k \geq 2$).

Alors un produit par blocs donne immédiatement $K^2 = I_k$.

- ⑨ On va raisonner matriciellement. Appelons k l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ ($k \geq 2$) et considérons une base de diagonalisation $\mathcal{B}_d$ pour f ; c'est également une base de diagonalisation pour p et q car $p = \frac{1}{\lambda - \mu}(f - \mu \text{id})$

et $q = \frac{1}{\mu - \lambda}(f - \lambda \text{id})$. De plus, dans la base $\mathcal{B}_d$, ces matrices sont définies par blocs comme suit : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(f) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_k & 0 \\ \hline 0 & \mu I_{n-k} \end{array} \right)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right)$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \left(\begin{array}{c|c} 0_k & 0 \\ \hline 0 & I_{n-k} \end{array} \right)$. Soit alors p' l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_d$ est :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K & 0 \\ \hline 0 & 0_{n-k} \end{array} \right)$$

où la matrice $K \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ a été définie à la question précédente. De plus,

- un produit par blocs donne $M^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(p)$, donc $p'^2 = p$;
- des produits par blocs donnent $M \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_d}(q) \cdot M = 0_n$, donc $p' \circ q = q \circ p' = 0_n$;
- comme M n'est pas diagonale, $p' \notin F = \text{Vect}(p, q)$.

En résumé, l'endomorphisme p' ainsi construit répond à la question.

- ⑩ Si $\dim(E) \geq 3$, alors λ ou μ est d'ordre au moins 2. Supposons par exemple que c'est λ . Posons $h = \sqrt{\lambda}p' + \sqrt{\mu}q$, où p' est l'endomorphisme défini à la question précédente. On a $h^2 = \lambda p + \mu q = f$ par propriétés de p' et q , et pourtant $h \notin F$ car $p' \notin F$ et $\lambda \neq 0$.

En conclusion, $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie III

- ① Pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k = \sum_{k=0}^{\ell} a_k \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k \lambda_i^k \right) p_i = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

- ② Prenons $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$. Alors $P(\lambda_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, m$, et d'après la question précédente $P(f) = 0$. Le polynôme P est annulateur de f et il est scindé à racines simples. Donc f est diagonalisable.

- ③ D'après la question 1), $L_{\ell}(f) = \sum_{i=1}^m L_{\ell}(\lambda_i) p_i$. Mais $L_{\ell}(\lambda_i) = \delta_{\ell,i}$ (où $\delta_{\ell,i} = 1$ si $\ell = i$ et 0 si $\ell \neq i$).

Donc $L_\ell(f) = p_\ell$. De plus,

$$(f - \lambda_\ell \text{id}) \circ p_\ell = (f - \lambda_\ell \text{id}) \circ L_\ell(f) = \frac{\prod_{i=1, i \neq \ell}^m (f - \lambda_i \text{id})}{\prod_{i=1, i \neq \ell}^m (\lambda_\ell - \lambda_i)}$$

Il en résulte que $\text{Im}(p_\ell) \subset \ker(f - \lambda_\ell \text{id})$.

En outre, le polynôme $P(X)$ de la question 2) est annulateur de f et a pour racines $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Donc $\text{Sp}(f) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Et par hypothèse, pour tout $1 \leq \ell \leq m$, $p_\ell \neq 0$ donc $\text{Im}(p_\ell) \neq \{0_E\}$ et $\ker(f - \lambda_\ell \text{id}) \neq \{0_E\}$. Ceci signifie que λ_ℓ est effectivement une valeur propre de f .

Finalement, on a bien $\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

④ Comme $p_\ell(f) = L_\ell(f)$, $p_i \circ p_j = (L_i \cdot L_j)(j)$.

• Si $i \neq j$, le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$ divise $(L_i \cdot L_j)(X)$.

Comme $P(f) = 0$, on a donc $(L_i \cdot L_j)(f) = 0$ et $p_i \circ p_j = 0$.

• Si $i = j$, comme $\text{id} = \sum_{k=1}^m p_k$ (relation de l'énoncé pour $k = 0$),

en composant par p_i on obtient $p_i^2 = p_i$.

⑤ L'endomorphisme f étant diagonalisable, d'après le cours on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^m \ker(f - \lambda_i \text{id}).$$

Le fait que chaque p_i est un projecteur a été démontré

à la question précédente. De plus, comme $\text{id} = \sum_{k=1}^m p_k$,

on a $E = \sum_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$. Or on a vu que $\text{Im}(p_i) \subset$

$$E_{\lambda_i}(f) = \ker(f - \lambda_i \text{id}).$$

Après la somme directe précédente, on a donc $E = \bigoplus_{i=1}^m \text{Im}(p_i)$ et $\text{Im}(p_i) = E_{\lambda_i}(f)$ pour tout i . En-

fin le fait que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ montre que les p_i sont les projecteurs associés à cette somme directe.

⑥ Ecrivons une combinaison linéaire nulle des $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$:

$\sum_{i=1}^m a_i p_i = 0$. Soit $\ell \in \llbracket 1, m \rrbracket$. En composant par p_ℓ , on obtient $a_\ell p_\ell = 0$, d'où $a_\ell = 0$ car p_ℓ n'est pas nul d'après l'énoncé.

Ainsi tous les coefficients a_i sont nuls et la famille $(p_1, \dots, p_m)$ est libre. Donc $\dim(F) = m$.

⑦ Soit $h = \sum_{i=1}^m \alpha_i p_i \in F$ telle que $h^2 = f$. Alors $h^2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i^2 p_i =$

$\sum_{i=1}^m \lambda_i p_i$ et comme la famille $(p_1, \dots, p_m)$ est libre, $\alpha_i^2 = \lambda_i$ pour tout i . Réciproquement, tous les h vérifiant cette relation sont

solutions. En résumé, $\mathcal{R}(f) \cap F = \left\{ \sum_{i=1}^m \pm \sqrt{\lambda_i} p_i \right\}$.

⑧ a Si $m = n$, il y a n sous-espaces propres dans l'espace E de dimension n .

Donc la dimension de chaque sous-espace propre de f est égale à 1.

b m Si $h \in \mathcal{R}(f)$, $h \circ f = h^3 = f \circ h$. Donc h et f commutent et d'après le cours, tout espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ est stable par h . Soit x un vecteur propre de f , par exemple $x \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$. Comme $\dim(E_{\lambda_i}(f)) = 1$, $h(x) = \mu_i x$ et x est vecteur propre pour h .

c Soit $h \in \mathcal{R}(f)$. D'après la question précédente, pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$, $h(x_i) = \mu_i x_i$.

Soit $x \in E$. Comme $E = \bigoplus_{i=1}^n E_{\lambda_i}(f)$, $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ et

$$h(x) = h(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i p_i(x)$$

soit $h = \sum_{i=1}^m \mu_i p_i$. Donc $\mathcal{R}(f) \subset F$.

En reprenant la question III.7), on voit qu'une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $\mathcal{R}(f)$ soit non vide est : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i \geq 0$.

⑨ Si $m < n$, alors il existe i tel que $\dim(E_{\lambda_i}(f)) \geq 2$. Si les λ_i sont positifs ou nuls, on peut alors reprendre le même raisonnement qu'à la question II.10), qui montre que $\mathcal{R}(f) \not\subset F$.

Partie IV

A)

① Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$ et $(a_1, \dots, a_p)$ une famille de

réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = 0$.

En composant par f^{p-1} , comme $f^q = 0$ pour tout $q \geq p$, on obtient $a_0 f^{p-1}(x) = 0$ donc $a_0 = 0$. On recommence en composant par $f^{p-2}, \dots, f$, ce qui donne au final $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$.

Donc la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre. Cette famille a p éléments dans un espace de dimension n , donc $p \leq n$ et $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$.

② Si $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$, soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h^2 = f$. Alors $h^{2n} = f^n = 0$ donc h est nilpotent et d'après 1), $h^n = 0$. De plus, $h^{2p-2} = f^{p-1} \neq 0$ donc $2p-2 \leq n-1$, i.e. $2p-1 \leq n$.

③ On sait d'après le cours que pour $\alpha \notin \mathbb{N}, x \in]-1; 1[$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!} x^k + O(x^n)$$

au voisinage de 0. Ici, $\alpha = \frac{1}{2}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$a_k = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-k+1)}{k!}.$$

④ D'après la question précédente, pour $-1 < x < 1$, $\sqrt{1+x} = P_n(x) + x^n \gamma(x)$ où γ est une fonction bornée au voisinage de 0. En élevant au carré, cela donne $1+x = (P_n(x) + x^n \gamma(x))^2 = P_n^2(x) + x^n(2P_n(x)\gamma(x) + x^n \gamma(x)^2) = P_n^2(x) + x^n \eta(x)$ pour une fonction η bornée au voisinage de 0.

Posons alors $Q_n(x) = P_n^2(x) - x - 1$; c'est une fonction

polynôme. D'après la relation précédente, $x \mapsto Q_n(x)/x^n$ est une fonction bornée au voisinage de 0. Ceci n'est possible que si $Q_n(X)$ n'admet pas de terme en X^k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ce qui entraîne X^n divise $Q_n(X)$.

On écrira dans la suite $Q_n(X) = X^n \cdot S_n(X)$ où S_n est une fonction polynôme.

- ⑤ • D'après les résultats des questions précédentes, $(P_n(f))^2 - f - \text{id} = (P_n^2)(f) - f - \text{id} = f^n \circ S_n(f)$. Or $f^n = 0$ d'après 1), donc $(P_n(f))^2 = f + \text{id}$, i.e. $P_n(f) \in \mathcal{R}(f + \text{id})$. Donc $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$.

• Plus généralement, $(P_n(\alpha f))^2 - \alpha f - \text{id} = (P_n^2)(\alpha f) - \alpha f - \text{id} = (\alpha f)^n \circ S_n(\alpha f)$. Comme $f^n = 0$, $(P_n(\alpha f))^2 = \alpha f + \text{id}$, i.e. $P_n(\alpha f) \in \mathcal{R}(\alpha f + \text{id})$. Donc $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$.

• Comme $\beta \neq 0$, soit $h \in \mathcal{R}(\frac{1}{\beta}f + \text{id})$ (c'est possible d'après ce qui précède). Alors $h^2 = \frac{1}{\beta}f + \text{id}$ et comme $\beta > 0$, $(\sqrt{\beta}h)^2 = f + \beta \text{id}$. Donc $\sqrt{\beta}h \in \mathcal{R}(f + \beta \text{id})$ et $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$.

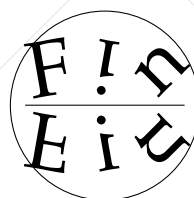
B)

- ① La matrice $T - \lambda I_n$ est triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale ; il en résulte que $\text{rg}(T - \lambda I_n) \leq n - 1$. Un calcul matriciel simple montre que $\text{rg}((T - \lambda I_n)^k) \leq n - k$ pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et en particulier pour $k = n$: $\text{rg}((T - \lambda I_n)^n) = 0$, i.e. $(T - \lambda I_n)^n = 0$.

Remarquons que cette question peut se traiter directement en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, mais que ce théorème est hors programme en PC.

- ② Comme f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé, il est trigonalisable. De plus, comme f n'admet qu'une seule valeur propre λ , il existe une base dans laquelle la matrice T de f est triangulaire supérieure, dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ . D'après la question précédente, $(T - \lambda I_n)^n = 0_n$ et $(f - \lambda \text{id})^n = 0$. Donc $E = \ker(f - \lambda \text{id})^n$.

- ③ D'après la partie A), comme $(f - \lambda \text{id})^n = 0$, $\mathcal{R}((f - \lambda \text{id}) + \lambda \text{id}) \neq \emptyset$ (question A)5) en prenant $\beta = \lambda$ et en remplaçant f par $f - \lambda \text{id}$). Donc si $\lambda > 0$ alors $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$.



À la prochaine



Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE
Devoir Surveillé

1 Recherche de quelques polynômes minimaux

Épreuve de Mathématiques A MP

✉ Énoncé : (extrait e3a 2008, MP)

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours et exemples.

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E .

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur de f .
2. Quelle est la structure de l'ensemble J_f des polynômes annulateurs de f ?
3. Donner la définition du polynôme minimal de f que l'on notera π_f .
4. Prouver l'existence de π_f .
5. **Un premier exemple**.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice canoniquement associée :

$$M = (m_{ij}) \text{ où } \forall (i,j) \in \{1, \dots, 4\} \times \{1, \dots, 4\}, m_{ij} = \frac{1}{4} (1 + (-1)^{i+j}).$$

5.1. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5.2. Déterminer π_f .

6. **Un second exemple**.

6.1. Chercher les solutions à valeurs réelles des équations différentielles :

$$y'' + y = ch(x) \quad \text{et} \quad y'' + y = sh(x)$$

où ch et sh sont respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

6.2. On considère (H_1) l'équation différentielle : $y^{(4)} = y$.

Soit f une fonction de classe C^4 sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est solution de (H_1) si et seulement si la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.

Page 1 / 4

3. Résoudre l'équation (H_2) .

6.4. En déduire les solutions de (H_1) .

6.5. On note alors E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles engendré par $(\cos, \sin, \cosh, \sinh)$.

6.5.1. Quelle est la dimension de E ?

6.5.2. Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ .

6.5.3. Déterminer le polynôme minimal π_δ de E .

Problème.

Dans tout le problème, $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E muni de ses opérations usuelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n sera noté $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

L'endomorphisme identité de E est noté e , l'endomorphisme nul θ . Lorsque l'on est dans l'espace vectoriel normé E_n , on notera respectivement ces endomorphismes e_n et θ_n .

On rappelle que si f est un endomorphisme de E , $f^0 = e$ et

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, f^m = f \circ f^{m-1}.$$

Lorsque f est un endomorphisme de E_n , on note χ_f son polynôme caractéristique.

Soient $u : P \in E \mapsto u(P) = P'$ où P' désigne le polynôme dérivé de P , et

$$v : P \in E \mapsto v(P) = R \text{ où } R(X) = P(X+1).$$

Partie 1 : Quelques propriétés des endomorphismes u et v .

1. Rappeler la dimension de E_n . En donner une base usuelle.

2. Montrer que u et v sont des endomorphismes de E qui laissent stable E_n .

On note alors u_n et v_n les endomorphismes induits par restriction de u et de v à E_n .

3. Ecrire les matrices U_n et V_n de u_n et v_n dans la base canonique de E_n .

4. Préciser le noyau et l'image de chacun de ces endomorphismes.

5. Les endomorphismes u_n et v_n commutent-ils ?

6. Quel est le polynôme caractéristique de u_n ? u_n est-il diagonalisable ?

7. Quel est le polynôme caractéristique de v_n ? v_n est-il diagonalisable ?

8. On note $w_n = v_n - e_n$ et on pose :

$$Q_0 = 1, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad Q_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j).$$

8.1. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n .

8.2. Déterminer $w_n(Q_0)$.

- Montrer que pour tout $k \geq 1$, il existe un réel α_k non nul, tel que :

$$w_n(Q_k) = \alpha_k Q_{k-1}.$$

- 8.3. Ecrire la matrice W_n de w_n dans la base $\mathcal{B}$.
- 8.4. Donner une base de $\text{Ker}(w_n)$ ainsi que de $\text{Im}(w_n)$.
- 8.5. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$, $w_n^j(Q_k)$.

On rappelle que $w_n^j = \underbrace{w_n \circ w_n \circ \dots \circ w_n}_{j \text{ facteurs}}$.

9. Détermination des composantes d'un polynôme de E_n dans la base $\mathcal{B}$.

- 9.1. Soit $P \in E_n$.

Justifier l'existence et l'unicité de scalaires $(\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que : $P = \sum_{k=0}^n \beta_k Q_k$.

- 9.2. Calculer $w_n^j(P)(0)$ pour $j \in \mathbb{N}$.
- 9.3. Exprimer alors les composantes de P dans la base $\mathcal{B}$.
- 9.4. Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$.
- 10. Calculer w_n^{n+1} et $w_n^n(Q_n)$.

Partie 2 : Recherche de quelques polynômes minimaux.

- 1. Soit $f \in \mathcal{L}(E_n)$. Justifier que π_f divise χ_f .
- 2. Recherche de π_{u_n} .
 - 2.1. Déterminer u_n^{n+1} .
 - 2.2. Calculer : $u_n^n(X^n)$.
 - 2.3. Conclure.
 - 2.4. De même, déterminer le polynôme minimal de w_n .
- 3. Recherche de π_{v_n} .
 - 3.1. Montrer qu'il existe $m \in \{1, \dots, n+1\}$ tel que $\pi_{v_n} = (X-1)^m$.
 - 3.2. Prouver que : $m = n+1$.
- 4. Polynômes annulateurs de u .

Soit P un polynôme de degré $m \in \mathbb{N}$ écrit : $P = \sum_{j=0}^m a_j X^j$.

- 4.1. Que sait-on de a_m ?

4.2. On note r l'endomorphisme $P(u)$. Déterminer $r\left(\frac{X^m}{m!}\right)$.

4.3. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u .

5. Polynômes annulateurs de v .

Soit P un polynôme non nul annulateur de v .

5.1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X-1)^{n+1}$ divise P .

5.2. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de v .

6. Soit s l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(1 - X).$$

6.1. Vérifier que s est une involution de E .

6.2. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de s .

Partie 3. Facultative, ne sera pas comptée

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel normé E_n . On rappelle que :

$$\exp(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^m}{m!} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^N \frac{f^m}{m!}$$

1. Montrer que l'on a la relation : $v_n = \exp(u_n)$.

2. On va démontrer dans cette question que : $u_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m$.

2.1. Prouver que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0) Q_{k-m}.$$

On pourra utiliser la question 9.3. de la partie 1.

2.2. Calculer pour tout $m \in \{0, \dots, n\}$, $u_n(Q_m)(0)$.

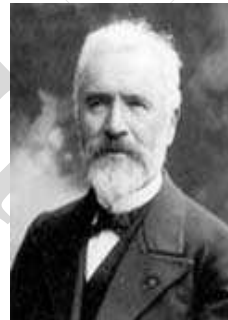
2.3. Conclure.

Fin du problème

❑ Corrigé Pr. Dufait, CPGE France

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).
- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un polytechnicien (1855) fils de polytechnicien (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

Mathématicien du jour

Questions de cours et exemples

1. Un polynôme annulateur de f est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. J_f est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ (et accessoirement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$).
3. Si $J_f \neq \{0\}$, le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire π_f tel que $J_f = \pi_f \cdot \mathbb{R}[X]$. C'est aussi le polynôme unitaire appartenant à J_f de plus petit degré.

4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $J_f \neq \{0\}$ puisque le polynôme caractéristique de f , χ_f appartient à J_f .

5. 1. On a $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M$ et donc, par récurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*, M^k = M$.

2. Ainsi $X^2 - X \in J_f$ donc $\pi_f \mid X^2 - X = X(X - 1)$ et donc $\pi_f \in \{X, X - 1, X^2 - X\}$ (1 n'est pas annulateur si $E \neq \{0\}$). Or $M \neq 0$ et $M \neq I_4$ donc $\pi_f = X^2 - X$.

6. 1. $\diamond$ L'équation homogène $y'' + y = 0$ est à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Comme $\text{ch}'' = \text{ch}$, une solution particulière de $y'' + y = \text{ch}(x)$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\text{ch}(x)$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \text{ch}(x)$ sont les $y : x \mapsto \frac{1}{2}\text{ch}(x) + A \cos(x) + B \sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

$\diamond$ De même, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \text{sh}(x)$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\text{sh}(x) + A \cos(x) + B \sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

2. Puisque f est supposée de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned} (f \text{ solution de } (H_1)) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = f(x)) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) + f''(x) = f(x) + f''(x)) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = g(x)) \end{aligned}$$

donc $(f \text{ solution de } (H_1)) \iff (g = f'' + f \text{ solution de } y'' = y)$.

3. $(H_2) : y'' - y = 0$ est linéaire, homogène, à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 - 1 = 0$ donc a pour solutions les fonctions $x \mapsto A e^x + B e^{-x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, ou aussi, les solutions de (H_2) sont les $y : x \mapsto A \text{ch}(x) + B \text{sh}(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

4. Le principe de superposition des solutions et les résultats de la question [6.1] donnent :

les solutions de (H_1) sont les $y : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + C \text{ch}(x) + D \text{sh}(x)$

5. 1. Par définition de E , la famille $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ en est génératrice. De plus, si $A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh} = 0$ alors, en dérivant deux fois, $-A \cos - B \sin + C \text{ch} + D \text{sh} = 0$ donc $A \cos + B \sin = 0$ et $C \text{ch} + D \text{sh} = 0$. En prenant les valeurs en 0 (par exemple), on obtient $A = B = C = D = 0$ donc cette famille est libre etc'est donc une base de E . Ainsi $\dim(E) = 4$.

2. La dérivation est linéaire et $(A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh})' = -A \sin + B \cos + C \text{sh} + D \text{ch} \in E$ donc E est stable. Donc la dérivation induit bien un endomorphisme de E .

3. D'après [6.4], E est l'ensemble des solutions de (H_1) donc $\forall y \in E, y^{(4)} = \delta^4(y) = y$. Ainsi $X^4 - 1 \in J_\delta$ et $\pi_\delta \mid X^4 - 1$. Si $\pi_\delta \neq X^4 - 1$ alors $\deg(\pi_\delta) \leq 3$ donc $\pi_\delta = \sum_{i=0}^3 a_i X^i$. On alors

$$\begin{aligned} \forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad 0 &= \pi_\delta(\delta)[A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh}] \\ &= \sum_{i=0}^3 a_i [A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh}]^{(i)} \\ &= ((a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B) \cos + ((a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D) \text{ch} \\ &\quad + ((a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D) \text{sh} \end{aligned}$$

donc, par liberté de $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$,

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} (a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B = 0 \\ (a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A = 0 \\ (a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D = 0 \\ (a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C = 0 \end{cases}$$

soit $a_0 = a_2 = -a_0$ et $a_1 = a_3 = -a_1$ donc $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ce qui est absurde. Donc $\pi_\delta = X^4 - 1$.

Problème

Partie I

1. On a $\dim(E_n) = n + 1$ et une base est $(X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.

2. $\diamond \forall P \in E, u(P) = P' \in E$ et $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = u(P) + \lambda u(Q)$ donc $u \in \mathcal{L}(E)$.

De plus, si $\deg(P) \neq 0, \deg(P') = \deg(P) - 1$ et si $\deg(P) = 0, \deg(P') = -\infty$ donc $u(E_n) \subset E_n$.

$\diamond$ Si $P \neq 0$ et $\deg(P) = d$ avec $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors

$$v(P) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^d a_k (X^k + kX^{k-1} + \dots) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \dots \text{ donc } v(E_n) \subset E_n.$$

On a donc $\forall P \in E, v(P) \in E$ et $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, v(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X+1) = P(X+1) + \lambda Q(X+1) = v(P) + \lambda v(Q)$ donc $v \in \mathcal{L}(E)$.

3. $\diamond u(1) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*, u(X^k) = kX^{k-1}$ donc

$$U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

4.

$$\diamond \forall k \in \mathbb{N}, v(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \text{ donc}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & \vdots & \vdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

$\diamond P' = 0$ si et seulement si P est constant donc $\text{Ker}(u_n) = E_0$ et $\text{Im}(u_n) = \text{Vect}(u_n(1), u_n(X), \dots, u_n(X^n)) = \text{Vect}(0, 1, \dots, nX^{n-1})$ donc $\text{Im}(u_n) = E_{n-1}$.

$\diamond \det(v_n) = \det(V_n) = 1 \neq 0$ donc v_n est un automorphisme de E_n et donc $\text{Ker}(v_n) = \{0\}$ et $\text{Im}(v_n) = E_n$.

5.

On a $\forall P \in E, u \circ v(P) = (P(X+1))' = P'(X+1) = v \circ u(P)$ donc u_n et v_n commutent.

6.

$\diamond \chi_{u_n} = \chi_{v_n}$ donc $\chi_{u_n} = X^{n+1}$. $\diamond$ Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n+1$ et l'espace propre associé est $E_0(u_n) = \text{Ker}(u_n) = E_0 \neq E_n$ car $n \in \mathbb{N}^*$ donc u_n n'est pas diagonalisable.

7. $\diamond \chi_{v_n} = \chi_{V_n}$ donc $\chi_{v_n} = (X-1)^{n+1}$. $\diamond$ Donc $\text{Sp}(v_n) = \{1\}$ et donc si v_n était diagonalisable sa matrice dans une base de diagonalisation serait I_{n+1} et ceci serait vrai dans toute base donc v_n n'est pas diagonalisable.

8. 1. On a $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(Q_k) = k$ donc la famille $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une famille de degrés étagés donc $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de E_n .

2. $\diamond w_n(Q_0) = v_n(Q_0) - Q_0 = Q_0 - Q_0$ donc $w_n(Q_0) = 0$.

$$\begin{aligned} w_n(Q_k) &= v_n(Q_k) - Q_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=-1}^{k-2} (X-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) [(X+1) - (X-k+1)] \\ &= \frac{k}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \end{aligned}$$

et,

pour $k = 1$, $w_n(Q_1) = (X+1) - X = 1 = Q_0$ donc $\forall k \geq 1$, $w_n(Q_k) = Q_{k-1}$.

3. $W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

4. On lit sur la matrice W_n : $\text{rg}(W_n) = n$, $Q_0 \in \text{Ker}(w_n)$, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $Q_k \in \text{Im}(w_n)$ donc $\text{Ker}(w_n) = \mathbb{R}.Q_0$ et $\text{Im}(w_n) = \text{Vect}(Q_k)_{0 \leq k \leq n-1}$.

5. On a, par récurrence sur j , $w_n^j(Q_k) = \begin{cases} Q_{k-j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{cases}$

9. 1. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E_n , $\forall P \in E_n$, $\exists ! (\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$, $P = \sum_{k=0}^n \beta_k Q_k$.

2. On a $w_n^j(P) = \sum_{k=0}^n \beta_k w_n^j(Q_k) = \sum_{k=j}^n \beta_k Q_{k-j}$ si $j \leq n$, 0 si $j > n$. De plus, $Q_i(0) = 1$ si $i = 0$, 0 si $i \geq 1$. Donc $w_n^j(P)(0) = \beta_j$ si $j \leq n$, 0 si $j > n$.

3. Ainsi $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\beta_k = w_n^k(P)(0)$. Or $w_n^k = (v_n - e_n)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_n^j$ car v_n et e_n commutent. Et, par récurrence facile, $v_n^j(P)(X) = P(X+j)$ donc $w_n^k(P)(X) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(X+j)$. En évaluant en 0, on obtient donc $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\beta_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)$.

4. Et donc la base duale de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^* = (Q_k^*)_{0 \leq k \leq n}$ avec $Q_k^*(P) = w_n^k(P)(0) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)$.

10. $\diamond$ Selon la question [8.5], $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $w_n^{n+1}(Q_k) = 0$ donc $\underline{w_n^{n+1} = \theta_n}$.
 $\diamond$ De la même question on tire $\underline{w_n^n(Q_n) = Q_0}$.

Partie II

1. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_f \in J_f$ donc $\underline{\pi_f \mid \chi_f}$.
2. 1. On a, par récurrence sur k , $\forall P \in E$, $u^k(P) = P^{(k)}$. Or, si $P \in E_n$ alors $\deg(P) < n + 1$ donc $P^{(n+1)} = 0$. Ainsi $\underline{u_n^{n+1} = \theta_n}$.
 2. De même, $\underline{u_n^n(X^n) = n!}$ (en dérivant n fois).
 3. Selon [1], $u_n^{n+1} = \theta_n$ donc $X^{n+1} \in J_{u_n}$ donc $\pi_{u_n} \mid X^{n+1}$ et donc $\exists m \leq n + 1$, $\pi_{u_n} = X^m$. Si on avait $m \leq n$ alors $\pi_{u_n} \mid X^n$ donc $u_n^n = \theta_n$ mais ceci est faux selon [2]. Finalement, $\underline{\pi_{u_n} = X^{n+1}}$.
 4. Selon [I.10], $w_n^{n+1} = \theta_n$ et $w_n^n \neq \theta_n$ donc, comme ci-dessus, $\underline{\pi_{w_n} = X^{n+1}}$.
3. 1. $\pi_{v_n} \mid \chi_{v_n} = \chi_{V_n} = (X - 1)^{n+1}$ donc $\underline{\exists m \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, \pi_{v_n} = (X - 1)^m}$.
 2. Donc $(v_n - e_n)^m = \theta_n$ soit $w_n^m = \theta_n$ donc $\pi_{w_n} \mid X^m$ et donc, vu le résultat de [2.4], $\underline{m = n + 1}$.

Puisque $\deg(P) = m$, on a $\underline{a_m \neq 0}$.

$$\begin{aligned} 2. \quad r\left(\frac{X^m}{m!}\right) &= \sum_{j=0}^m a_j u^j\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} u^j(X^m) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} (X^m)^{(j)} = \\ &= \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} m(m-1) \cdots (m-j+1) X^{m-j} = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} \frac{m!}{(m-j)!} X^{m-j} \text{ donc} \\ &\underline{r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{(m-j)!} X^{m-j}}. \end{aligned}$$

3. Ainsi $r\left(\frac{X^m}{m!}\right) \neq 0$ donc $r \neq \theta$ donc $\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, $P(u) \neq \theta$ donc $\underline{J_u = \{0\}}$.

5. 1. Soit $P \in J_v$, on a $P(v) = \theta$ donc, par restriction à E_n stable par v , $P(v_n) = \theta_n$ donc $\pi_{v_n} \mid P$. Ceci donne bien, avec le résultat de [3.2], $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underline{(X - 1)^{n+1} \mid P}$.

2. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists Q_n \in E$, $P = (X - 1)^{n+1} Q_n$ donc $\deg(P) = n + 1 + \deg(Q_n)$. En prenant $\sup \deg(P)$, ceci donne $\deg(Q_n) = -\infty$ donc $P = 0$. Donc $\underline{J_v = \{0\}}$.

6. 1. Soit $Q = s(P)$ et $R = s^2(P)$, on a $R(X) = Q(1 - X) = P(1 - (1 - X)) = P(X)$ donc $\underline{s^2 = e}$ (s involution).

2. On a donc $X^2 - 1 \in J_s$ et donc $J_s \neq \{0\}$. Ainsi s a un polynôme minimal π_s et $\pi_s \in \{X + 1, X - 1, X^2 - 1\}$. Or $s \neq e$ car $s(X) = 1 - X \neq X$ et, de même, $s \neq -e$ donc $\pi_s = X^2 - 1$ et $\underline{J_s = (X^2 - 1) \cdot \mathbb{R}[X]}$.

Partie III

1. $\exp(u_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m}{m!} = \sum_{m=0}^n \frac{u_n^m}{m!}$ d'après [II.2.1]. On peut donner deux démonstrations de l'égalité demandée :

• **Première démonstration :**

Montrons que $\exp(u_n)$ et v_n coïncident sur la base canonique $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$:

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \begin{cases} v_n(X^k) &= (X+1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^{k-j} \\ \exp(u_n)(X^k) &= \sum_{m=0}^n \frac{u_n^m(X^k)}{m!} = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} X^{k-m} \end{cases}$$

et donc $v_n = \exp(u_n)$.

• **Deuxième démonstration :**

2. 1. D'après [I.9.3], $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^n w_n^j(u_n(Q_k))(0) Q_j$.

Or u_n et v_n commutent ([I.5]) donc u_n et $w_n = v_n - e_n$ également donc $w_n^j(u_n(Q_k)) = u_n(w_n^j(Q_k)) = u_n(Q_{k-j})$ si $j \leq k$, $= u_n(0)$ si $j > k$ d'après ([I.8.5]). Ceci

donne $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^k u_n(Q_{k-j})(0) Q_j$ soit

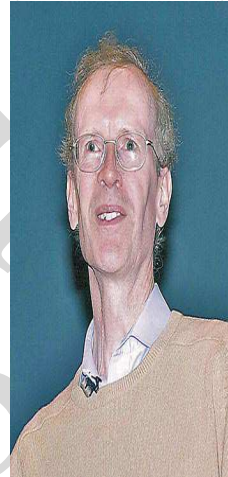
$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0) Q_{k-m}.$$

Devoir libre

6 Commutant d'une matrice

Blague du jour

- Quel est le genre d'humour que les dindes n'aiment pas ?
☛ Réponse : les farces.
- Pourquoi les lapins jouent-ils avec 46 cartes au lieu de 52 cartes ?
☛ Réponse : parce qu'ils ont mangent les trèfles !
- C'est une bande de poissons en train de faire des bêtises, quand l'un voit une étoile de mer et dit : Attention voilà le shérif qui arrive !



Sir Andrew John Wiles (1953-)

Mathématicien britannique, connu pour sa démonstration du dernier théorème de Fermat en 1994, résolvant ainsi l'un des problèmes les plus connus de l'histoire des mathématiques en travaillant dans le plus grand secret pendant huit ans. Pour dévoiler sa démonstration, Wiles s'y prend de manière quasi théâtrale. Il annonce trois conférences (les 21, 22 et 23 juin 1993) sans en donner l'objet, ce qu'il ne fait que lors de la dernière en précisant que le grand théorème de Fermat est un corollaire de ses principaux résultats. Son travail met ainsi fin à une recherche qui a duré plus de 300 ans.

Mathématicien du jour

Énoncé : (extrait e3a 2011, MP)

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes, le polynôme caractéristique d'une matrice A est noté χ_A , le polynôme minimal de la matrice A est noté P_A . On appelle commutant de la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'ensemble $\mathcal{C}(A)$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commutent avec la matrice A . On suppose dans tout cet exercice $P_A = \chi_A$ pour une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- ① On suppose dans cette question que P_A est à racines simples

α, β et γ .

- a Montrer que la matrice A est diagonalisable.
- b Soit B une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A , montrer que la matrice B est diagonalisable.
- c Montrer qu'il existe un polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\begin{cases} T(\alpha) = a \\ T(\beta) = b \\ T(\gamma) = c \end{cases},$$

où a, b et c sont les valeurs propres de la matrice B .

- d** En déduire que le polynôme T de $\mathbb{C}[X]$ vérifie l'égalité $B = T(A)$.
- e** En déduire le commutant de la matrice A .
- ② On suppose, dans cette question, qu'il existe un nombre complexe λ tel que $P_A = (X - \lambda)^3$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice A .
- a** Montrer que l'endomorphisme $g = f - \lambda Id$ est nilpotent d'indice 3, c'est-à-dire vérifie les relations suivantes :
$$\begin{cases} g^3 = 0 \\ g^2 \neq 0 \end{cases}$$
- b** Montrer qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{C}^3$ tel que la famille $(u, g(u), g^2(u))$ soit une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$.
- c** Soit H une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ qui commute avec la matrice A . On appelle h l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ tel que la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ soit la matrice H et on note $h(u) = x_1 u + x_2 g(u) + x_3 g^2(u)$, où x_1, x_2, x_3 sont trois nombres complexes. Déterminer, en fonction de x_1, x_2, x_3 , la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.
- d** Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $H = Q(A)$.
- e** En déduire le commutant de la matrice A .
- ③ On suppose, dans cette question, qu'il existe deux nombres complexes distincts λ_1 et λ_2 tels que
$$P_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)^2.$$
- a** Montrer
$$\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2.$$

- b** Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, avec $U = \lambda_2 I_2 + N$, I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2, c'est-à-dire vérifiant les propriétés suivantes :
$$\begin{cases} N^2 = 0 \\ N \neq 0 \end{cases}$$
- c** On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} \mu & L \\ C & V \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, où
$$\begin{cases} \mu \in \mathbb{C} \\ L \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{C}) \\ C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \end{cases},$$
 on suppose que les matrices M et $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ commutent.
- i** Montrer
$$\begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ NV = VN \end{cases}.$$
- ii** Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $R(U) = V$.
- iii** Montrer qu'il existe un polynôme S de $\mathbb{C}[X]$ tel que
$$\begin{cases} X - \lambda_1 \text{ divise } S - \mu \\ (X - \lambda_2)^2 \text{ divise } S - R \end{cases}.$$
- iv** En déduire $S \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right) = M$.
- d** Déterminer le commutant de la matrice A .

❑ Corrigé, Pr. Stainer, Lycée Clemenceau, Nantes

- ① **a** La matrice A a un polynôme caractéristique scindé, à racines simples, donc est diagonalisable ; de plus ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
- b** Si B commute avec A , elle stabilise les trois sous-espaces propres de A , qui sont des droites. Ces trois droites sont donc dirigées par des vecteurs propres de B . Une base de vecteurs propres de A est donc aussi une base de vecteurs propres de B : B et A sont simultanément diagonalisables.
- c** Interpolation de Lagrange (α, β, γ distincts). On peut imposer la condition supplémentaire $\deg T \leq 2$.
- d** D'après la remarque faite en 1.b, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P \cdot \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot P^{-1}$ et $B = P \cdot \text{diag}(a, b, c) \cdot P^{-1}$. Alors $\text{diag}(a, b, c) = T(\text{diag}(\alpha, \beta, \gamma))$ et $B = T(A)$.
- e** Le commutant de A est donc inclus dans l'algèbre commutative $\mathbb{C}[A]$ des polynômes en A . L'inclusion inverse est vérifiée pour tout matrice. Donc $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}[A]$. Avec la remarque du 1.c, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$ et, comme P_A est de degré 3, (I_3, A, A^2) est une base de $\mathcal{C}(A)$.
- ② **a** Par définition, P_A est un polynôme annulateur de A , donc $(A - \lambda I_3)^3 = 0$. En termes d'endomorphismes, $g^3 = 0$. De plus, comme P_A est le polynôme minimal de A , $(A -$

$\lambda I_3)^2 \neq 0$, donc $g^2 \neq 0$: g est nilpotent d'indice 2.

b On vérifie facilement que, pour tout vecteur $u \in \mathbb{C}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$, la famille $\mathcal{B} = (u, g(u), g^2(u))$ est libre. Comme l'espace vectoriel est de dimension 3, cette famille est une base de $\mathbb{C}^3$. Dans une telle base, g a pour matrice

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c Tout d'abord, h commute avec f , donc avec g . On en déduit $h(g(u)) = g(h(u)) = x_1 g(u) + x_2 g^2(u)$ et $h(g^2(u)) = g^2(h(u)) = x_1 g^2(u)$. La matrice de h dans $\mathcal{B}$ vaut donc

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix} = x_1 I_3 + x_2 N + x_3 N^2.$$

d On en déduit $h = x_1 Id + x_2 g + x_3 g^2$, puis, en substituant $f - \lambda Id$ à g , l'existence d'un polynôme T de degré au plus 2 tel que $h = T(f)$. Matriciellement, $H = T(A)$.

e On conclut comme au 1.e.

③ **a** Le polynôme P_A est annulateur de A , donc de f . Comme $X - \lambda_1$ et $(X - \lambda_2)^2$ sont premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux, $\mathbb{C}^3 = \text{Ker}(f - \lambda_1 Id) \oplus \text{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2$.

b Comme λ_1 est une valeur propre simple de f (de multiplicité 1 dans χ_A), le sous-espace propre associé $\text{Ker}(f - \lambda_1 Id)$ est de dimension 1 ; donc $\text{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2$ est de dimension 2. De plus, c'est le noyau d'un polynôme en f , donc il

est stable par f . Dans une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{C}^3$ adaptée à la décomposition du 3.a, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, où U représente $\tilde{f} = f|_{\text{Ker}(f - \lambda_2 Id)^2}$. Comme $(\tilde{f} - \lambda_2 Id)^2 = 0$, $N = U - \lambda_2 Id$ vérifie $N^2 = 0$.

Si $N = 0$, alors la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est diagonale, f est diagonalisable et son polynôme minimal est à racines simples. Comme ce n'est pas le cas, $N \neq 0$: N est nilpotente d'indice 2.

c

$$\text{i} \quad M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L(U - \lambda_1 Id) = 0 \\ (U - \lambda_1 Id)C = 0 \\ UV = VU \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} L(U - \lambda_1 Id) = 0 \\ (U - \lambda_1 Id)C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$$

Comme U admet comme polynôme annulateur $(X - \lambda_2)^2$, sa seule valeur propre est λ_2 , donc $U - \lambda_1 Id$ est inversible. On

$$\text{en déduit } M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} M \Leftrightarrow \begin{cases} L = 0 \\ C = 0 \\ VN = NV \end{cases}$$

ii Il s'agit de reprendre avec U le raisonnement des questions 2.a, b, c et d. On peut imposer la condition supplémentaire $\deg R \leq 1$.

iii Les conditions imposées signifient que λ_1 est racine de $S - \mu$ et que λ_2 est racine au moins double de $S - R$;

autrement dit, que S vérifie $\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ (S - R)(\lambda_2) = 0 \\ (S - R)'(\lambda_2) = 0 \end{cases}$, ou encore

$$\begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}.$$

Or l'application Δ définie de $\mathbb{C}_2[X]$ dans $\mathbb{C}^3$ par $\Delta(P) = (P(\lambda_1), P(\lambda_2), P'(\lambda_2))$ est linéaire, injective (si $\Delta(P) = 0$, alors P est de degré au plus 2 et possède au moins 3 racines comptées avec leur multiplicité, donc vaut 0), entre deux espaces vectoriels de même dimension finie ; donc Δ est un isomorphisme. D'où l'existence de $S \in \mathbb{C}_2[X]$ satisfaisant les condi-

$$\text{tions } \begin{cases} S(\lambda_1) = \mu \\ S(\lambda_2) = R(\lambda_2) \\ S'(\lambda_2) = R'(\lambda_2) \end{cases}.$$

iv $S \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} S(\lambda_1) & 0 \\ 0 & S(U) \end{pmatrix}$. Or $S(\lambda_1) = \mu$; de plus, comme $(X - \lambda_2)^2$ est annulateur de U , $S(U) = R(U)$. Donc $S \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & R(U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = M$.

d Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et b l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à B . Alors B commute avec A si et seulement si b commute avec f , i.e $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$ commute avec $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$. C'est encore équivalent (la réciproque de 3.c.δ est évidente) à l'existence d'un polynôme $S \in \mathbb{C}_2[X]$ tel que $S \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right) = M$, i.e $S(f) = b$, i.e $S(A) = B$. Comme dans les questions 1 et 2, $\mathcal{C}(A) = \mathbb{C}_2[A]$ et $\mathcal{C}(A)$ est de dimension 3.

Devoir Surveillé

1 Diagonalisation du crochet de Lie

Blague du jour

- ☛ Quelle différence y a-t-il entre Windows et un clou ?
- Aucune : tous deux sont destinés à se planter.
- ☛ Quelle est la différence entre Windows XP et un virus ?
- Le virus il fonctionne !



Otto Toeplitz (1881-1940)

Mathématicien allemand. Il était issu d'une famille de mathématiciens. Excellent pédagogue, Toeplitz s'intéressait aussi à l'histoire des mathématiques. On lui doit les matrices dites de Toeplitz, dont toutes les diagonales sont constantes, ces matrices sont très utilisées dans la théorie de complexité et d'analyse de Fourier.

Mathématicien du jour

Enoncé : CNC 2000, MP

Définitions et notations

On considère un espace vectoriel E , de dimension finie $n \geq 2$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv , $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id .

Si u est un endomorphisme de E , on note $\text{Tr}(u)$ la trace de u et $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u . $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle. Si λ est une valeur propre de u , on note $E_u(\lambda)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ .

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ on pose $u^0 = Id$ et si $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ (endomorphisme nul).

On définit l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ (u, v) &\longmapsto [u, v] \end{aligned}$$

et pour $u \in \mathcal{L}(E)$ l'application :

$$\begin{aligned} \Phi_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto [u, v] \end{aligned}$$

Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m . Enfin, $\text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ désigne la matrice carrée d'or-

dre n de terme général $\alpha_i \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

1^{ère} Partie

A- Quelques propriétés de Φ_u

- ① Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.
- ② Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.
- ③ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie.
 - a Montrer que $\text{Vect}(\{Id, u, \dots, u^{n-1}\})$ est inclus dans $\text{Ker } \Phi_u$ et que $\dim(\text{Ker } \Phi_u) \geq 2$.
 - b Montrer que si $v \in \text{Ker } \Phi_u$, alors $v(E_u(\lambda)) \subset E_u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$.
- ④ Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\text{Im } \Phi_u \subset \mathcal{T}$.
Existe-t-il $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $[u, v] = Id$? Peut-on avoir $\text{Im } \Phi_u = \mathcal{T}$?
- ⑤ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
 - a Montrer que u est une homothétie si et seulement si pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.
 - b En déduire que $\text{Ker } \Phi_u = \mathcal{L}(E)$ si et seulement si u est une homothétie.
- ⑥ a Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$; montrer par récurrence sur k que

$$(\Phi_u)^k(v) = \sum_{p=0}^k (-1)^p C_k^p u^{k-p} v u^p.$$

- b En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

B- Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

- ① u peut-il être une homothétie ?
- ② Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.
- ③ En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t X \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

où $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

- ④ On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in (\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}))^2$
 - a Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.
 - b On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^t R \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in (\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$; établir l'équivalence :
 $A = U'V' - V'U' \iff [{}^t X = -{}^t R(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S]$.
- ⑤ Montrer alors par récurrence sur n que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

C- Détermination de $\text{Tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E . Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que :
 $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$

- ① Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{L}(E)$.
- ② Calculer, pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, 2, \dots, n\}^4$, le produit $u_{i,j}u_{k,l}$ et montrer que l'on a :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^n a_{j,k}u_{i,k}.$$

- ③ En déduire $\text{Tr}(\Phi_u)$.

2^{ème} Partie

A- Cas où u est diagonalisable

Dans cette question on suppose que u est diagonalisable.

On pose $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, m_i désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i de u .

- ① Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Pour simplifier les notations dans cette question, on pose $u(e_i) = \mu_i e_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

a Montrer que

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 : \Phi_u(u_{i,j}) = (\mu_i - \mu_j)u_{i,j}.$$

b En déduire que Φ_u est diagonalisable et préciser $\text{Sp}(\Phi_u)$.

- ② Montrer que $\text{Ker } \Phi_u = \{v \in \mathcal{L}(E) / \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)\}$.
- ③ En déduire que $\text{Ker } \Phi_u$ est isomorphe à $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_2)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$. Quel est le rang de Φ_u ?
- ④ On suppose en plus que u a n valeurs propres distinctes. Quel est la dimension de $\text{Ker } \Phi_u$? Quel est le polynôme min-

imal de u ?

En déduire que $\text{Ker } \Phi_u = \text{Vect}(Id, u, \dots, u^{n-1})$.

B- Cas où $\dim E = 2$

Soit u un endomorphisme de E qui n'est pas une homothétie, $\dim E = 2$.

- ① Montrer que $\text{Ker } \Phi_u = \text{Vect}(Id, u)$ (on pourra utiliser une base de E de la forme $(e, u(e))$ dont on justifiera l'existence).
- ② Montrer que le polynôme caractéristique de Φ_u est de la forme $X^2(X^2 + \beta)$ avec $\beta \in \mathbb{K}$.
- ③ Si $\beta = 0$, l'endomorphisme Φ_u est-il diagonalisable ?
- ④ On suppose $\beta \neq 0$; étudier la diagonalisabilité de Φ_u selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- ⑤ On suppose Φ_u diagonalisable.

a Montrer que $\text{Sp}(\Phi_u) = \{0, \lambda, -\lambda\}$ où λ est un scalaire non nul.

Dans la suite de la question, v (respectivement w) désigne un vecteur propre de Φ_u associé à la valeur propre λ (respectivement $-\lambda$).

b L'endomorphisme v peut-il être inversible ? Calculer $\text{Tr}(v)$ puis v^2 .

c Détermination de $\text{Sp}(u)$:

i Pour quelles valeurs du vecteur e la famille $(e, v(e))$ est-elle une base de E ?

ii Vérifier que la matrice de u dans une telle base est triangulaire inférieure puis en déduire que $\text{Sp}(u) = \left\{ \frac{\text{Tr}(u) - \lambda}{2}, \frac{\text{Tr}(u) + \lambda}{2} \right\}$. Que peut-on alors dire de u ?

d Montrer que $E = \text{Ker } v \oplus \text{Ker } w$ puis en déduire que u est diagonalisable.

C- Cas où Φ_u est diagonalisable

Soit u un endomorphisme de E tel que Φ_u soit diagonalisable et $\text{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de vecteurs propres de Φ_u de sorte que $\Phi_u(v_i) = \beta_i v_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Soit enfin $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E$ un vecteur propre associé.

- ① Calculer $u(v_i(x))$ en fonction de λ, β_i et $v_i(x)$.
- ② Montrer que l'application $\Psi : \mathcal{L}(E) \rightarrow E, v \mapsto v(x)$ est linéaire surjective.
- ③ Montrer alors que u est diagonalisable.

3^{ème} Partie

Soit λ une valeur propre **non nulle** de Φ_u et v un vecteur propre associé ; on désigne par P_u le polynôme caractéristique de u .

- ① **a** Montrer que $\forall x \in \mathbb{K}, v(u - xId) = (u - (x + \lambda)Id)v$.
- b** Qu'en déduit-on sur P_u si $\det v \neq 0$.
- c** Montrer alors que l'endomorphisme v n'est pas inversible.
- ② Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$; qu'en déduit-on si $v^p \neq 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$?

③ Conclure que v est un endomorphisme nilpotent.

☞ Dans la suite on suppose que $\dim \text{Ker } v = 1$

④ **a** Montrer que pour tout $p \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\text{Im } v^p$ est stable par les endomorphismes u et v .

b Soit $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$; en considérant les endomorphismes v_1 et u_1 induits par v et u sur $\text{Im } v^p$, montrer que $\dim(\text{Im } v^p) = 1 + \dim(\text{Im } v^{p+1})$.

d Déduire de ce qui précède que $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.

⑤ Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$; montrer que la famille $\mathcal{B} = (e, v(e), \dots, v^{n-1}(e))$ est une base de E et écrire la matrice de l'endomorphisme v dans cette base.

⑥ On pose $\mathcal{A} = \{w \in \mathcal{L}(E) / wv - vw = \lambda v\}$.

a Montrer que $\mathcal{A}$ contient un endomorphisme w_0 dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est $\text{diag}(0, \lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda)$.

b Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{L}(E)$ dont on précisera la direction.

c Déterminer la dimension ainsi qu'une base de la direction de $\mathcal{A}$.

⑦ Quelle est alors la forme de la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme u ?

⑧ On suppose dans cette question que la matrice de u dans une base $\mathcal{B}'$ de E est de la forme $\text{diag}(\alpha, \alpha + \lambda, \alpha + 2\lambda, \dots, \alpha + (n-1)\lambda)$; décrire par leur matrice dans la base $\mathcal{B}'$ les éléments de l'espace $E_{\Phi_u}(\lambda)$; quelle est sa dimension ?

❑ Corrigé, Pr. Mamouni, CPGE My Youssef, Rabat ⑤

1^{ère} Partie.

A-Quelques propriétés de Φ_u .

- ① $\mathcal{T} = \text{Ker Tr}$ est un hyperplan car Tr est une forme linéaire sur E , non nulle, vu que $\text{Tr}(\text{Id}_E) = n$.
- ② Vérifier rapidement que :
- ☞ $\Phi(u, v) = -\Phi(v, u)$, d'où l'antisymétrie.
 - ☞ $\Phi(u + \lambda v, w) = \Phi(u, w) + \lambda \Phi(u, w)$, d'où la linéarité à gauche, l'antisymétrie en plus implique la linéarité à droite, donc la bilinéarité.
- ③ **a** $\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}$ appartiennent à $\text{Ker } \Phi_u$ car commutent avec u , donc $\text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \text{Ker } \Phi_u$, d'autre part $\{\text{Id}_E, u\}$ est libre dans $\text{Ker } \Phi_u$, car u n'est pas une homothétie, donc $\dim \text{Ker } \Phi_u \geq 2$.
- b** $v \in \text{Ker } \Phi_u \implies v$ commute avec u , donc les sous-espaces propres $E_u(\lambda)$ de u sont stables par v .
- ④ $\text{Im } \Phi \subset \mathcal{T}$ car $\text{Tr}(uv) = \text{Tr}(vu)$, et aussi $\text{Im } \Phi_u \subset \text{Im } \Phi \subset \mathcal{T}$.
On ne peut pas avoir $[u, v] = \text{Id}_E$, car $\text{Tr}(\text{Id}_E) = n \neq 0$ et $\text{Tr}([u, v]) = 0$.
On ne peut pas avoir $\text{Im } \Phi_u = \mathcal{T}$, car $\dim \mathcal{T} = n^2 - 1$, alors que $\dim \text{Im } \Phi_u = n^2 - \dim \text{Ker } \Phi_u \leq n^2 - 2$.

a L'implication directe est évidente.

Réciproquement, supposons $\{x, u(x)\}$ est liée, donc $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x \cdot x$, pour montrer que u est une homothétie il suffit de montrer que λ_x ne dépend pas de x , autrement dit $\lambda_x = \lambda_y$.

Soit $x, y \in E$ non nul.

☞ 1^{er} cas : $\{x, y\}$ est liée, donc $y = \alpha x$, d'où $u(y) = \alpha u(x)$, ainsi $\lambda_y \cdot y = \alpha \lambda_x \cdot x = \lambda_x \cdot y$, d'où $\lambda_y = \lambda_x$.

☞ 2^{ème} cas $\{x, y\}$ est libre.

$$\begin{aligned} u(x+y) = u(x) + u(y) &\implies \lambda_{x+y} \cdot (x+y) = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y \\ &\implies (\lambda_{x+y} - \lambda_x) \cdot x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) \cdot y = 0_E \\ &\implies \lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y \end{aligned}$$

⑥ **a** Pour $k = 0$, vrai car $(\Phi_u)^0(v) = v$.

Supposons vrai pour k , donc

$$\begin{aligned} (\Phi_u)^{k+1}(v) &= \Phi_u \circ (\Phi_u)^k(v) \\ &= \Phi_u \left(\sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k-p} v u^p \right) \\ &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} \Phi_u(u^{k-p} v u^p) \\ &= \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k+1-p} v u^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k-p} v u^{p+1} \\
 & = \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{p}{k} u^{k+1-p} v u^p \\
 & + \sum_{p=1}^{k+1} (-1)^p \binom{p-1}{k} u^{k+1-p} v u^p
 \end{aligned}$$

On remplace p par $p-1$ dans la 2ème somme

$$\begin{aligned}
 & = u^{k+1} v + \sum_{p=1}^k (-1)^p \left(\binom{p}{k} + \binom{p-1}{k} \right) k u^{k+1-p} v u^p \\
 & + (-1)^{k+1} v u^{k+1} \\
 & = u^{k+1} v + \sum_{p=1}^k (-1)^p \binom{p}{k+1} k u^{k+1-p} v u^p \\
 & + (-1)^{k+1} v u^{k+1} \\
 & = \sum_{p=0}^{k+1} (-1)^p \binom{p}{k+1} k u^{k+1-p} v u^p
 \end{aligned}$$

b Supposons $u^k = 0$, dans ce cas $(\Phi_u)^{2k}(v) = \sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \binom{p}{2k} k u^{2k-p} v u^p = 0$, car $u^p = 0$ si $p \geq k$ et $u^{2k-p} = 0$ si $p \leq k$. Donc u nilpotent $\implies \Phi_u$ nilpotent.

B-Détermination de l'image de Φ .

- ① Si $u = \lambda \text{Id}_E$, alors $\text{Tr}(u) = \lambda n = 0$, donc $\lambda = 0$, d'où $u = 0$, contradiction, donc u ne peut pas être une homothétie.
- ② Comme u n'est pas une homothétie d'après I.A.5.a) $\exists e_1 \in$

E tel que $\{e_1, u(e_1)\}$ soit libre.

- ③ Prendre $e_2 = u(e_1)$ puis utiliser le théorème de la base incomplète, car $\{e_1, e_2\}$ libre, ainsi, $u(e_1) = e_2$ ne peut pas s'exprimer en fonction de e_1 , d'où $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t X \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$, où $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
- ④ **a** Il suffit de prendre α qui n'est pas valeur propre de U .

b Un calcul très simple à faire.

- ⑤ On a déjà vu que $\text{Im } \Phi \subset \mathcal{T}$ dans I.A.4), montrons l'autre inclusion réciproque par récurrence sur $n = \dim E$. Pour $n = 1$, $\dim \mathcal{L}(E) = 1$, donc tous les endomorphismes sont proportionnels à Id_E , donc des homothéties, d'où $\Phi = 0$, donc $\dim \text{Im } \Phi = 0 = \dim \mathcal{T}$, d'où l'égalité.

Supposons vrai pour $n-1$, donc $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(A) = \text{Tr}(A_1) = 0$, appliquons l'hypothèse de récurrence pour l'endomorphisme canoniquement associé à A_1 , donc $A_1 = UV - VU$, d'où $A = U'V' - V'U'$, avec $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$, $V' =$

$\begin{pmatrix} 0 & {}^t R \\ S & V \end{pmatrix}$ où α, S, R vérifient la question précédente, choisis tels que $U - \alpha I_{n-1}$ inversible, $S = (U - \alpha I_{n-1})^{-1} Y$ et $R = -{}^t((U - \alpha I_{n-1})^{-1}) X$.

Soit u', v' les endomorphismes canoniquement associés à U' et V' , alors $u = u'v' - v'u' \in \text{Im } \Phi$.

C-Détermination de $\text{Tr}(\Phi_u)$.

- ① La famille $(u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est de cardinal $n^2 = \dim(\mathcal{L}(E))$, il suffit donc de montrer qu'elle est libre.

En effet supposons $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} u_{i,j} = 0$, donc $\forall 1 \leq k \leq n$, on a $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} u_{i,j}(e_k) = 0$, d'où $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \lambda_{i,j} \delta_{j,k} e_i = 0$, d'où $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_{i,k} e_i = 0$, d'où $\lambda_{i,k} = 0, \forall 1 \leq i, k \leq n$, car la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

② Pour tout $1 \leq p \leq n$, on a : $u_{i,j} u_{k,l}(e_p) = \delta_{l,p} u_{i,j}(e_k) = \delta_{l,p} \delta_{j,k} e_i = \delta_{j,k} u_{i,l}(e_p)$, d'où $u_{i,j} u_{k,l} = \delta_{j,k} u_{i,l}$ car ils coïncident sur la base $(e_p)_{1 \leq p \leq n}$.

On a $u = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} u_{k,l}$, d'où :

$$\begin{aligned} \Phi_u(u_{i,j}) &= uu_{i,j} - u_{i,j}u \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} u_{k,l} u_{i,j} - \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} u_{i,j} u_{k,l} \\ &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} \delta_{l,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{k,l} \delta_{j,k} u_{i,l} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq l \leq n} a_{j,l} u_{i,l} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{1 \leq k \leq n} a_{j,k} u_{i,k} \end{aligned}$$

On remplace l par k dans la 2ème somme

③ D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \Phi_u(u_{i,j}) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_{k,i} u_{k,j} + a_{i,i} u_{i,j} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} a_{j,k} u_{i,k} - a_{j,j} u_{i,j} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} a_{k,i} u_{k,j} - \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq j}} a_{j,k} u_{i,k} + (a_{i,i} - a_{j,j}) u_{i,j} \end{aligned}$$

Ainsi les termes diagonaux de la matrice de Φ_u dans la base $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, sont les $a_{i,i} - a_{j,j}$ tel que $1 \leq i, j \leq n$, d'où

$$\text{Tr}(\Phi_u) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (a_{i,i} - a_{j,j}) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,i} - \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{j,j} = 0 \text{ car } i, j \text{ jouent des rôles symétriques.}$$

2ème Partie.

A-Cas où u est diagonalisable.

① a $A = \mathcal{M}_B(u_{i,j}) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ est diagonale, d'après I.C.2), $\Phi_u(u_{i,j}) = a_{i,i} u_{i,j} - a_{j,i} u_{i,j} = (\mu_i - \mu_j) u_{i,j}$.

b D'après la question précédente, $\mu_i - \mu_j$ sont des valeurs propres, dont les vecteurs propres associés sont les $(u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ qui forment une base de $\mathcal{L}(E)$, ainsi Φ_u admet une base propre donc diagonalisable.

② $v \in \text{Ker } \Phi_u \implies v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i), \forall 1 \leq i \leq p$, d'après I.A.3.a).

Inversement supposons $v(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i), \forall 1 \leq i \leq p$, et montrons que $vu = uv$, il suffit alors de le montrer sur la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$.

En effet $e_i \in E_u(\mu_i) \implies v(e_i) \in E_u(\mu_i) \implies uv(e_i) = \mu_i v(e_i)$, or $vu(e_i) = v(\mu_i e_i) = \mu_i v(e_i)$, d'où l'égalité.

③ Posons $\Psi : \text{Ker } \Phi_u \longrightarrow \mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$
 $v \longmapsto (v|_{E_u(\lambda_1)}, \dots, v|_{E_u(\lambda_p)})$

Ψ est bien définie car les sous-espaces propres $E_u(\lambda_i)$ sont stables par tout $v \in \text{Ker } \Phi_i$ qui y induit un endomorphisme.

Ψ est linéaire, car $(v + \lambda w)|_{E_u(\lambda_i)} = v|_{E_u(\lambda_i)} + \lambda w|_{E_u(\lambda_i)}$, pour tous $v, w \in \text{Ker } \Phi_i$.

Ψ est injective, car $v \in \text{Ker } \Phi_i \implies v = 0$ sur $E_u(\lambda_i) \forall 1 \leq i \leq p$, donc $v = 0$ sur $\bigoplus_{i=1}^p E_u(\lambda_i) = E$ car u est diagonalisable.

Enfin, Soit $(v_1, \dots, v_p) \in \mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$, cherchons $v \in \text{Ker } \Phi_u$ tel que $\Psi(v) = (v_1, \dots, v_p)$, pour cela, tout $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme, $x = x_1 + \dots + x_p$ tel que $x_i \in E_u(\lambda_i)$, posons $v(x) = v_1(x_1) + \dots + v_p(x_p)$ il est clair que $v|_{E_u(\lambda_i)} = v_i$ et donc $v(E_u(\lambda_i)) = v_i(E_u(\lambda_i)) \subset E_u(\lambda_i)$, d'où $v \in \text{Ker } \Phi_u$ et $\Psi(v) = (v_1, \dots, v_p)$. Donc Ψ est surjective.

Ainsi Ψ définit un isomorphisme de $\text{Ker } \Phi_u$ vers $\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))$.

Donc $\dim(\text{Ker } \Phi_u) = \dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_1)) \times \dots \times \mathcal{L}(E_u(\lambda_p))) = \sum_{i=1}^p \dim(\mathcal{L}(E_u(\lambda_i))) = \sum_{i=1}^p \dim(E_u(\lambda_i))^2 = \sum_{i=1}^p m_i^2$, car u est diagonalisable, donc $\text{rg}(\text{Im } \Phi_u) = \dim(\text{Im } \Phi_u) = \dim(\mathcal{L}(E)) - \dim(\text{Ker } \Phi_u) = (n^2)^2 - \sum_{i=1}^p m_i^2$

④ Si u n'admet que des valeurs propres distinctes alors elles sont toutes simples, donc $m_i = 1, \forall 1 \leq i \leq n$, d'où $\dim(\text{Ker } \Phi_u) = n$.

$\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1} \in \text{Ker } \Phi_u$ car commutent avec u , donc $\text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \text{Ker } \Phi_u$.

D'autre part, supposons $(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})$ est liée, alors ils existeraient des scalaires, $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ non tous nuls, tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k = 0$, d'où $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annula-

teur de u , non nul de degré inférieur à $n - 1$, impossible car $\deg \pi_u = n$ puisque u admet n valeurs propres.

Donc $\dim(\text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1})) = n = \dim(\text{Ker } \Phi_u)$ et $\text{Vect}(\text{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \text{Ker } \Phi_u$, d'où l'égalité.

B- Cas où $\dim E = 2$.

① u n'est pas une homothétie, donc $\exists e \in E$ tel que $\mathcal{B} = (e, u(e))$ libre dans E , d'après I.A.5.a), donc base de E car $\dim E = 2$.

Soit $v \in \text{Ker } \Phi_u$, donc $uv = vu$, montrons que $v \in \text{Vect}(\text{Id}_E, u)$, c'est à dire $v = \lambda \text{Id}_E + \mu u$

Soit $U = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ et $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, montrons alors que $V = \lambda I_n + \mu U$, il suffit de prendre $\lambda = a$ et $\mu = c$ en utilisant le fait que $UV = VU$.

Ainsi $\text{Ker } \Phi_u \subset \text{Vect}(\text{Id}_E, u)$, l'autre inclusion est évidente car Id_E et u commutent avec u .

② $\chi_{\Phi|_{\text{Ker } \Phi_u}}$ divise χ_{Φ_u} , car $\text{Ker } \Phi_u$ stable par Φ_u , or $\dim \text{Ker } \Phi_u = 2$ et 0 est l'une valeur propre de $\Phi|_{\text{Ker } \Phi_u}$, donc $\chi_{\Phi|_{\text{Ker } \Phi_u}} = X^2$, d'où $\chi_{\Phi_u} = X^2(X^2 + \beta)$.

③ Si $\beta = 0$, alors $\chi_{\Phi_u} = X^4$, si de plus Φ_u est diagonalisable, alors $\pi_{\Phi_u} = X$, car ses racines simples, or $\pi_{\Phi_u}(\Phi_u) = 0$, d'où $\Phi_u = 0$, donc $\text{Ker } \Phi_u = \mathcal{L}(E)$, donc u est une homothétie, contradiction.

④ Supposons $\beta \neq 0$.

☞ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $\lambda, -\lambda$ les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $X^2 + \beta = 0$, ce sont des racines simples de χ_{Φ_u} et 0 est une

valeur propre double, dont l'espace propre associé est de dimension 2, donc Φ_u diagonalisable.

☛ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta < 0$, pareil que le 1er cas.

☛ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, dans ce cas χ_{Φ_u} n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$, car admet des racines complexes, non réelles, donc Φ_u n'est pas diagonalisable.

⑤ **a** Reprendre le raisonnement fait dans la question précédente.

b $\Phi_u(v) = \lambda v$, donc $uv - vu = \lambda v$, supposons v inversible, donc $u - vu v^{-1} = \lambda \text{Id}_E$, d'où $\left[uv^{-1}, \frac{v}{\lambda}\right] = \text{Id}_E$, impossible car $\text{Id}_E \notin \text{Im } \Phi$.

$$v = \frac{\lambda}{\gamma} uv - vu, \text{ donc } \text{Tr} v = \frac{\lambda}{\text{Tr}(uv) - \text{Tr}(vu)} = 0.$$

Puisque, $\dim E = 2$, alors $\chi_v = v^2 - \text{Tr}(v)v + \det v$, or $\det v = 0$ car v n'est pas inversible et $\text{Tr}(v) = 0$, d'où $\chi_v = v^2$, comme $\chi_v(v) = 0$, alors $v^2 = 0$.

c Détermination de $\text{Sp}(u)$.

☛ $\mathcal{B} = (e, v(e))$ base de $E \iff (e, v(e))$ libre dans E
car $\dim E = 2$
 $\iff v(e) \neq \lambda e$ tel que $\lambda \in \text{Sp}(v)$
 $\iff v(e) \neq 0_E$ car $\text{Sp}(v) = \{0\}$
puisque $v^2 = 0$

☛ Posons $u(e) = ae + bv(e)$, et donc $vu(e) = av(e)$ car $v^2 = 0$
 $uv - vu = \lambda v \implies uv(e) = vu(e) + \lambda v(e)$
 $\implies uv(e) = (a + \lambda)v(e)$

$$\text{D'où } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a + \lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi $\text{Tr}(u) = 2a + \lambda$, d'où $a = \frac{\text{Tr}(u) - \lambda}{2}$ et

$$\text{Sp}(u) = \left\{ a = \frac{\text{Tr}(u) - \lambda}{2}, a + \lambda = \frac{\text{Tr}(u) + \lambda}{2} \right\}.$$

Donc u est diagonalisable car admet 2 valeurs propres distinctes, et $\dim E = 2$.

⑥ v non inversible, donc $\text{Ker } v \neq \{0_E\}$, et $v \neq 0$, donc $\text{Ker } v \neq E$, d'où $\dim \text{Ker } v = 1$, de même $\dim \text{Ker } w = 1$

Supposons $\text{Ker } v \cap \text{Ker } w \neq \{0_E\}$, alors $\text{Ker } v = \text{Ker } w$, vu que $\dim \text{Ker } v = \dim \text{Ker } w = 1$.

C- Cas où Φ_u est diagonalisable

① $uv_i - v_i u = \beta v_i$, donc $uv_i(x) = v_i u(x) + \beta v_i(x) = (\lambda_i + \beta)v_i(x)$ car $u(x) = \lambda_i x$.

Donc $v_i(x)$ sont des vecteurs propres de u .

② Il est clair que Ψ est linéaire.

Surjection : Soit $y \in E$.

☛ Si $y = 0_E$, prendre $v = 0$.

☛ Si $y \neq 0_E$, on complète x et y pour avoir deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ qui commencent par x et y , et soit v l'application linéaire qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$, donc $v(x) = y$.

③ $(v_1, \dots, v_{n^2})$ est une base de $\mathcal{L}(E)$, donc son image par Ψ est génératrice de $\text{Im } \Psi = E$ car Ψ est surjective, ainsi $(v_1(x), \dots, v_{n^2}(x))$ est une famille génératrice de E formée par des vecteurs propres de u , de la quelle on peut extraire une base de E , donc u est diagonalisable.

3^{ème} Partie.

- ① ① Découle immédiatement de l'égalité $uv - vu = \lambda v$.
- ② Supposons $\det v \neq 0$, la question précédente implique que
 $\det(u - x \text{Id}_E) = \det(u - (x + \lambda) \text{Id}_E)$, donc
 $\chi_u(x) = \chi_u(x + \lambda), \forall x \in \mathbb{K}$.
 Supposons χ_u n'est pas constant, soit $x \in \mathbb{C}$ racine de χ_u ,
 alors $x + \lambda, x + 2\lambda, \dots$ sont des racines de χ_u qui est donc
 nul car admet une infinité de racines, ce qui est impossible,
 donc χ_u est constant.
- ③ Si v est inversible, alors $\det v \neq 0$, donc χ_u est constant,
 d'où $\deg u = 0$, ce qui est impossible car $\dim E = \deg \chi_u$
- ② Raisonnons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$
 Pour $k = 1$, c'est vrai car v vecteur propre de Φ_u associé à la
 valeur propre à la valeur propre λ .
 Supposons vrai pour k , dans ce cas $\Phi_u(v^{k+1}) = uv^{k+1} -$
 $v^{k+1}u = (uv)v^k - v^{k+1}u = (vu + \lambda v)v^k - v^{k+1}u = v(uv^k -$
 $v^k u) + \lambda v^{k+1} = v\Phi_u(v^k) + \lambda v^{k+1} = (k + 1)\lambda v^{k+1}$.
 Si $v^p \neq 0$, alors c'est un vecteur propre de Φ_u associé à la
 valeur propre $p\lambda$.
- ③ Si $v^p \neq 0, \forall p \in \mathbb{N}^*$, alors Φ_u aurait une infinité de valeurs pro-
 pres distinctes, les $p\lambda$, absurde, donc $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^p = 0$.
- ④ ① $\text{Im } v^p$ est stable par v , car v^p commute avec v .
 D'autre part, soit $y = v^p(x) \in \text{Im } v^p$, on a $uv^p = v^p u +$
 $p\lambda v^p$, d'après III.2, donc $u(y) = uv^p(x) = v^p(u(x) +$
 $p\lambda x) \in \text{Im } v^p$, d'où $\text{Im } v^p$ est aussi stable par u .
- ② On a : $v_1 : \text{Im } v^p \rightarrow \text{Im } v^p$ avec $\text{Ker } v_1 = \text{Ker } v \cap$
 $x \mapsto v(x)$
 $\text{Im } v^p \subset \text{Ker } v$, donc $\dim \text{Ker } v_1 \leq 1$ et $\text{Im } v_1 =$

$v(\text{Im } v^p) = \text{Im } v^{p+1}$. D'après la formule du rang, on a :
 $\dim \text{Im } v^p = \dim \text{Ker } v_1 + \dim \text{Im } v^{p+1}$.

Supposons $\text{Ker } v_1 = \{0_E\}$, donc $v^{p+1}(x) = 0 \Rightarrow$
 $v^p(x) \in \text{Ker } v_1 \Rightarrow v^p(x) = 0$

- ③ $\dim \text{Ker } v = 1 \Rightarrow \dim \text{Im } v = n - 1$
 $\Rightarrow \dim \text{Im } v^2 = \dim \text{Im } v - 1 = n - 2$
 $\vdots$
 $\Rightarrow \dim \text{Im } v^{n-1} = 1$
 $\Rightarrow \dim \text{Im } v^n = 0$

Donc $v^{n-1} \neq 0$ et $v^n = 0$.

- ⑤ $\text{card } \mathcal{B} = n = \dim E$, il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est libre.

En effet : Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_0 e + \dots +$
 $\lambda_{n-1} u^{n-1}(e) = 0$, on compose par u^{n-1} , donc $\lambda_0 u^{n-1}(e) = 0$,
 d'où $\lambda_0 = 0$, puis on compose par u^{n-2} pour montrer que
 $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ⑥ ① Il suffit de définir w_0 sur la base $\mathcal{B}$, pour cela posons
 $w_0(v^k(e)) = \Phi_u(v^k)(e)$, d'après III.2, on a $w_0(v^k(e)) =$
 $k\lambda v^k(e)$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(w) = \text{Diag}(0, \lambda, \dots, (n-1)\lambda)$
- ② $\forall w \in \mathcal{A}$, on a $w - w_0 \in \text{Ker } \Phi_v$, d'où $\mathcal{A}$ est un espace
 affine de direction $\text{Ker } \Phi_v$ et d'origine w_0 .

③ Montrons que $(\text{Id}_E, v, \dots, v^{n-1})$ base de $\text{Ker } \Phi_v$.

Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_0 \text{Id}_E + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1} = 0$, on applique l'égalité à e , donc $\lambda_0 e + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$, or $\mathcal{B}$ libre, donc $\lambda_0 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, donc la famille est libre.

D'autre part, soit $w \in \text{Ker } \Phi_v$, donc commute avec v mais aussi avec v^k pour $0 \leq k \leq n-1$, or $\mathcal{B}$ base de E , donc $w(e) = \lambda_0 e + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, et $wv^k(e) = v^k w(e) = v^k P(v)(e) = P(v)(v^k(e))$, d'où $w = P(v)$ car égaux sur la base $\mathcal{B}$, donc notre famille est génératrice pour $\text{Ker } \Phi_v$, donc base et par suite sa dimension vaut n .

⑦ Posons $u(e) = \lambda_0 e + \dots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = P(v)(e)$, on a $\Phi_u(v^k) = k\lambda v^k$, d'où $uv^k = v^k u + k\lambda v^k$, d'où $uv^k(e) = v^k P(v)(e) + k\lambda v^k(e)$, or $v^n = 0$, donc $vP(v) = \lambda_0 v(e) + \dots + \lambda_{n-2} v^{n-1}(e)$, $v^2 P(v) = \lambda_0 v^2(e) + \dots + \lambda_{n-3} v^{n-1}(e)$, ..., $v^{n-1} P(v)(e) = \lambda_0 v^{n-1}(e)$,

$$\text{d'où } \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_0 + \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & \dots & \lambda_1 & \lambda_0 + (n-1)\lambda \end{pmatrix}$$

⑧ Posons $\mathcal{B}' = (e_0, \dots, e_{n-1})$, donc $u(e_k) = (\alpha + k\lambda)e_k = \alpha_k e_k$.

Soit $v \in E_{\Phi_u}(\lambda)$, donc $uv - vu = \lambda v$, posons $v(e_0) =$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k e_k, \text{ donc } uv(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u(e_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_k e_k \text{ et } vu(e_0) = \alpha_0 v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \alpha_0 e_k, \text{ or } \lambda v(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \lambda e_k, \text{ d'où } \lambda_k \alpha_k - \lambda_k \alpha_0 = \lambda_k \lambda, \text{ donc } \lambda_k (\alpha_k - \alpha_0 - \lambda) = 0, \text{ donc } (k-1)\lambda \lambda_k = 0, \text{ d'où } \lambda_k = 0 \text{ si } k \neq 1, \text{ ainsi la 1ère colonne de la matrice de } u$$

$$\text{sera de la forme suivante : } \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En adoptant le même raisonnement pour calculer $v(e_1)$, on

$$\text{trouve que la 2ème colonne est de la forme suivante } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et ainsi de suite la forme finale de la matrice sera

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Ces matrices forment un espace vectoriel de dimension $n-1$.

Devoir Libre

7 Topologie des matrices

Blague du jour

- ☛ Un petit garçon rentre de l'école avec son bulletin de notes et va voir son père :
- Papa c'est vrai que tes lunettes grossisse tout ? lui demande-t-il.
 - Bien-sûr pourquoi ?
 - Alors mets les avant de regarder mon bulletin de notes !



Ernesto Cesàro (1859-1906)

Mathématicien italien, connu pour ses contributions à la géométrie différentielle et à la théorie des séries infinies. En théorie des nombres, il est l'origine du résultat suivant : La probabilité pour que deux nombres entiers, choisis aléatoirement, soient premiers entre eux est égale à $0,6$. Sa mort fût survenue alors qu'il tenta de sauver son plus jeune fils, en train de se noyer.

Mathématicien du jour

Énoncé (extrait CNC)

Partie I : Densité

- ① On se propose de montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles est un ouvert dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- a** Dire pourquoi l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
 $A \mapsto \det(A)$ est continue.
- b** En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- c** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{sp}(A) = \{0\}$, montrer que la suite $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k \geq 1}$ est une suite à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui

converge vers A .

d Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{sp}(A) \neq \{0\}$ et soit $\varepsilon = \min\{|\lambda|, \text{ tel que } \lambda \in \text{sp}(A) \setminus \{0\}\}$.

i Justifier que ε existe.

ii Montrer que la suite $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1}$ est une suite à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A .

② Application

- a** Montrer que l'application $\chi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$
 $A \mapsto \chi_A(X)$ est continue.
- b** Soient A et B deux matrices réelles d'ordre n .

i On suppose A inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

ii Montrer que ce résultat subsiste si on se suppose plus A inversible.

c Montrer que si une matrice commute avec toutes les matrices inversibles, alors elle commute avec toute matrice carrée.

③ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note par $\text{sp}(A)$ le n -uplet formé par les valeurs propres de A comptées avec leurs multiplicités.

④ Soit (A_n) une suite de matrices carrées convergente vers A et soit P une matrice carrée inversible, montrer que PA_nP^{-1} converge vers A .

⑤ . a Soit T une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et soit $\varepsilon = \min \left\{ \frac{|\lambda_i - \lambda_j|}{2} \text{ tel que } \lambda_i \neq \lambda_j \right\}$. Montrer que pour tout entier k tel que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$, le polynôme caractéristique de $T - \text{diag} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \dots, \frac{1}{k+n} \right)$ est à racines simples.

b En déduire que l'ensemble des matrices à valeurs propres simples est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑥ Montrer que dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans celui des matrices trigonalisables.

⑦ Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Partie II : Parties fermés

① Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales $O_n(\mathbb{R})$ (celles qui vérifient ${}^tMM = I_n$) est un fermé borné, en déduire qu'il est compact.

② Soit $P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré p . Montrer que les racines de P sont toutes dans le disque fermé D de centre 0 et de rayon $R = \max\{1, pM\}$, avec $M = \max_{0 \leq i \leq p-1} |a_i|$.

③ On se propose de montrer dans cette question que l'ensemble des polynômes de degré p unitaires et scindés sur $\mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}_p[X]$.

Soit $P_n = X^p + a_{p-1}^{(n)}X^{p-1} + \dots + a_1^{(n)}X + a_0^{(n)}$ une suite de polynômes unitaires de degré p scindés sur $\mathbb{R}$ qui converge vers un certain polynôme P

a Dire pourquoi P est de la forme $\sum_{i=0}^p a_i X^i$.

b Montrer que : $\lim_{n \rightarrow \infty} a_i^{(n)} = a_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$.

c Dire pourquoi $a_p = 1$.

d Pour tout entier naturel n , notons $Z_n = (z_1^{(n)}, \dots, z_p^{(n)})$ une liste des zéros (supposés réels) du polynôme P_n pris dans un ordre arbitraire, mais bien sûr comptés avec leurs multiplicités.

Montrer que la suite (Z_n) admet une suite extraite $(Z_{\varphi(n)})$ convergente, de limite $Z = (z_1, \dots, z_p)$.

e En déduire que $\prod_{i=1}^p (X - z_i)$.

f Conclure

Partie III : Connexité par arc

Dans toute la suite $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme de Schur-

Frobenius $\|\cdot\| : A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} ; G(\mathbb{K})$

désigne $GL_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $GLP_n(\mathbb{R}) = \{M \in GL_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \deg(\pi_A) = n-1\}.$$

On admet le résultat suivant : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. $\deg \pi_A = n-1$ si et seulement si existe une matrice P

dans $GL_n \mathbb{K}$ et $a_0, \dots, a_{n-2}$, α , éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$

tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (1)$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $GLP_n(\mathbb{R})$.

- ① Montrer que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, A \mapsto \det(A)$ est continue et que $G(\mathbb{K})$ est un ouvert.
- ② Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

- ③ Soit $(A, H) \in GL_n \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A + H$ est une matrice inversible et exprimer $(A + H)^{-1} - A^{-1}$ comme limite d'une suite convergente. (On pourra écrire $A + H = A(I_n + A^{-1}H)$.)
- ④ En déduire que l'application $\mathcal{I} : G(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \mapsto A^{-1}$ est continue.
- ⑤ Soient A et B deux éléments de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x , coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.
- ⑥ Soient $z_1, \dots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$, soit $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \phi(t) = \gamma(t)B + (1 - \gamma(t))A$ avec
$$\gamma(t) = \begin{cases} t(1 + 2ir) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1 - t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$
- ⑦ Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.
- ⑧ Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$ et conclure. (Si $I = \{i \in \{1, \dots, p\}, \operatorname{Im} z_i > 0\}$ n'est pas vide, choisir $r < \min\{\operatorname{Im} z_i, i \in I\}$.)
- ⑨ On admet que $GLP_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice de la forme (1), montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in G(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.
- ⑩ Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \dots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \dots, a_{n-2}$ respectivement par

$ta_1, \dots, ta_{n-2}, \alpha$ par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} ta_k(t\alpha)^k - a_0$,

a Montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et

que l'application $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue.

b Calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

c Dédurre de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.



À la prochaine

Devoir Libre

8 Problème du point fixe.

Blague du jour

- ☞ Une souris rencontre sa copine : J'ai décidé de me mettre au régime, lui dit-elle.
- Tu ne manges plus ton fromage gruyère alors ?
- Si, mais je ne mange plus que les trous !
- ☞ Comment appelle t-on un chien sans pattes ?
- Réponse : On ne l'appelle pas, on va le chercher !
- ☞ Comment appelle-t-on une chauve-souris qui a des cheveux ?
- Réponse : Une souris.



Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704)

Marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, de La Chaise, de Le Brau et d'autres lieux, mathématicien français. Il est plus connu pour la règle qui porte son nom. Il est aussi l'auteur du premier livre connu sur le calcul infinitésimal différentiel, publié en 1696, ses textes comportent des conférences de son professeur Jean Bernoulli. C'est d'ailleurs ce dernier qui a donné au marquis toutes les données nécessaires pour réaliser le livre au nom de l'Hôpital, dans un but de le publier sous un nom français, car Bernoulli est Suisse.

Mathématicien du jour

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\| \cdot \|$. On rappelle qu'une application f de E dans E est dite *contractante* s'il existe $K \in]0, 1[$ tel que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \quad \forall x, y \in E.$$

- ① On se propose de montrer que toute application contractante admet un unique point fixe. Soit $a \in \mathbb{R}^d$, on pose $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.
- a** Montrer que $\|x_n - x_{n-1}\| \leq K^{n-1}\|x_1 - x_0\|$ pour tout $n \geq 1$.
- b** En déduire que (x_n) est de Cauchy, puis qu'elle converge.
- c** Montrer que $x = \lim x_n$ est un point fixe de f .

- ② Soit f une application de E dans E telle qu'il existe un entier n tel que f^n soit contractante. On note x_0 le point fixe de f^n .
- a** Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de f^n .
- b** Montrer que si x est un point fixe de f^n , il en est de même pour $f(x)$.
- c** En déduire que x_0 est l'unique point fixe de f .
- ③ Soit X et F deux parties d'un espace vectoriel normé, F étant une partie complète. On considère une application $F : X \times E \rightarrow E$, $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$ continue, et k -contractante en la se-

onde variable, c'est-dire qu'elle existe $k \in]0, 1[$ tel que :
 $\forall \lambda \in X, \forall (x, y) \in E^2, \|F(\lambda, x) - F(\lambda, y)\| \leq k\|x - y\|.$

a Montrer que, pour tout $\lambda \in X$, il existe un unique $x_\lambda \in E$ tel que $F(\lambda, x_\lambda) = x_\lambda$.

b Montrer ensuite que l'application $X \rightarrow E, \lambda \mapsto x_\lambda$ est continue.

c Montrer que le système
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(2 \sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3 \sin x_2) \end{cases}$$

admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

④ Soit E une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \rightarrow E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

a Montrer que f admet un unique point fixe (que l'on notera α).

b Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement E complet?

⑤ $\mathbb{R}^2$ est muni d'une norme quelconque. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $\exists \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \alpha(\|f(x) - x\| + \|f(y) - y\|)$$

a Montrer que f admet au plus un point fixe.

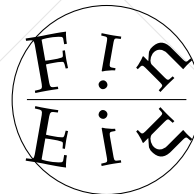
b On considère la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^2$.

i Montrer que $\forall n \geq 0$,

$$\|u_{n+2} - u_{n+1}\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|u_{n+1} - u_n\|.$$

ii Montrer que la suite u est de Cauchy.

iii Conclure.



À la prochaine

Devoir Surveillé

2 Topologie des racines carrés d'une matrice

Blague du jour

☞ Il ne faut jamais traiter quelqu'un de compact, c'est une insulte. Parce qu'un compact est un fermé borné!

☞ L'injectivité implique la bijectivité même en dimension infinie, en effet : Si f est injective tout élément possède au plus un antécédent; mais qui peut le plus peut le moins, donc tout élément possède au moins un antécédent, donc f est surjective puis bijective.



Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848)

Mathématicien, logicien, philosophe, théologien bohémien allemand. Il enseigna d'abord les sciences de la religion avant de consacrer le reste de son temps aux mathématiques. Dans sa philosophie, Bolzano critique l'idéalisme d'Hegel et de Kant en affirmant que les nombres, les idées, et les vérités existent indépendamment des personnes qui les pensent. Ainsi l'acte mental se distingue de la signification de l'acte.

Mathématicien du jour

Enoncé : CCP 2005, MP

Notations.

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note : $M_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées réelles de taille n .

$M_{n,1}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne.

$GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$.

I_n la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$.

Id l'application identité de $\mathbb{R}^n$.

Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, tA est sa matrice transposée.

$S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{R})$.

$S_n^+(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques positives

de $M_n(\mathbb{R})$, c'est à dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geq 0$.

Si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, on note $diag(x_1, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $x_1, \dots, x_n$ dans cet ordre.

Si p est un entier naturel non nul, on notera $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie sur $\mathbb{R}^p$:

si $x = (x_1, \dots, x_p)$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq p} |x_i|$.

Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, on note $B_\infty(a, r)$ la boule ouverte de centre a de rayon r pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Objectifs.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R de $M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

On note $Rac(A)$ l'ensemble des racines carrées de A , c'est à dire

$$Rac(A) = \{R \in M_n(\mathbb{R}) / R^2 = A\}$$

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents exemples, (on pourra constater qu'une matrice peut parfois admettre une infinité de racines) et étudier quelques propriétés topologiques de $Rac(A)$.

Les trois parties du problème sont **indépendantes**.

Les trois premiers exemples de la partie I sont tous **indépendants**.

● Partie I. Exemples de $Rac(A)$.

Exemple 1 : cas où A possède n valeurs propres distinctes.

On suppose que la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

- ① Justifier l'existence d'une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A , si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D .
- ② Racines carrées de D .
Soit S une racine carrée de D .
 - a Montrer que $DS = SD$.
 - b En déduire que la matrice S est diagonale.
 - c On note alors $S = \text{diag}(s_1, \dots, s_n)$. Que vaut s_i^2 lorsque $i \in \{1, \dots, n\}$?

d Que peut-on dire de $Rac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative ?

e Si on suppose toutes les valeurs propres de A positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D . On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

③ Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P . Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

④ **Application** : Écrire toutes les racines carrées de $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ à l'aide de la matrice P que l'on déterminera.

Exemple 2 : cas où A est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$.

Dans cet exemple, on cherche à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice carrée de la matrice nulle.

⑤ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f .

a Comparer $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(f)$ puis montrer que $r \leq \frac{n}{2}$.

b On suppose f non nul, donc $r \geq 1$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\text{Im}(f)$ que l'on complète avec $(e_{r+1}, \dots, e_{n-r})$ pour former une base de $\text{Ker}(f)$. Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on note u_i le vecteur tel que $f(u_i) = e_i$.

Montrer que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-r}, u_1, \dots, u_r)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ puis écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. On notera M_r cette matrice.

- ⑥ .
- a Déterminer les racines carrées dans $M_n(\mathbb{R})$ de la matrice nulle.
 - b **Application** : déterminer dans $M_4(\mathbb{R})$, les racines carrées de la matrice nulle.

Exemple 3 : cas où $A = I_n$.

- ⑦ Soit R une racine carrée de l'unité I_n .
- a Vérifier que R est une matrice inversible.
 - b Montrer que R est semblable à une matrice diagonale que l'on décrira.
- ⑧ Déterminer $Rac(I_n)$. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

Exemple 4 : cas où A est une matrice symétrique réelle.

Dans cet exemple, toutes les matrices que l'on considérera appartiennent à $M_n(\mathbb{R})$.

- ⑨ Une matrice symétrique admet-elle nécessairement une racine carrée ?
- ⑩ Montrer qu'une matrice symétrique positive admet au moins une racine carrée qui est elle même symétrique et positive.
- Remarque : On peut montrer l'unicité de cette racine carrée dans $S_n^+(\mathbb{R})$ mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème.

● Partie II. Étude topologique de $Rac(A)$.

Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ qui a pour coefficients $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on définit une norme en posant $N(A) = \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de cette norme N .

- ① **Fermeture de $Rac(A)$.**
Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $Rac(A)$ est une partie fermée de $M_n(\mathbb{R})$.
- ② Étude du caractère borné de $Rac(I_n)$.
- a Un exemple instructif.

Pour tout entier naturel q , on pose $S_q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & -1 \end{pmatrix}$. Calculer S_q^2 . $Rac(I_2)$ est-elle une partie bornée de $M_2(\mathbb{R})$?

- b $Rac(I_n)$ est-elle une partie bornée de $M_n(\mathbb{R})$ pour $n \geq 3$?

c **Application** : pour cette question, $n \geq 2$.
Montrer qu'il n'existe pas de norme $\|\cdot\|$ "surmultiplicative" sur $GL_n(\mathbb{R})$, c'est à dire vérifiant pour tous A et B dans $GL_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \geq \|A\| \cdot \|B\|$.

● Partie III. Zéros de polynômes et intérieur de R

Soit p un entier naturel non nul. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$.

On note Γ_p l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^p$ c'est à dire : si $P \in \Gamma_p$, il existe N entier naturel et une famille de réels

$\{a_{i_1, \dots, i_p}, 0 \leq i_1, \dots, i_p \leq N\}$ tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, P(x_1, \dots, x_p) = \sum_{0 \leq i_1, \dots, i_p \leq N} a_{i_1, \dots, i_p} x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p}$$

Par exemple si $p = 3$, $P(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 3x_1x_2x_3 + 4x_2^5$ est une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$.

Si $p = 1$, Γ_1 est l'ensemble des fonctions polynômes se $\mathbb{R}$.

Enfin, si $p \in \Gamma_p$, on pose $Z(P) = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p / P(x_1, \dots, x_p) = 0\}$
 ($Z(P)$ est l'ensemble des zéros de la fonction polynomiale P).

L'objectif de cette partie est d'étudier l'intérieur de $Z(P)$, afin de déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.

On rappelle que si Ω est une partie de $\mathbb{R}^p$, un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ est un point intérieur à Ω s'il existe un nombre réel r strictement positif tel que $B_\infty(a, r) \subset \Omega$ et que l'intérieur d'une partie est l'ensemble de ses points intérieurs.

① Questions préliminaires :

- a** Soit $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$. Montrer que $B_\infty(a, r)$ peut s'écrire comme produit de p intervalles.
- b** Soient F et G deux parties de $\mathbb{R}^p$. On suppose que F et G sont d'intérieur vide, montrer que $F \cap G$ est encore d'intérieur vide.

② Exemples d'ensembles de zéros de fonctions polynomiales.

- a** Dans cette question, $p = 1$. Soit P une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$. Dans quel cas $Z(P)$ est-il infini ? Justifier votre réponse.
- b** Dans cette question, $p = 2$. On considère $P(x_1, x_2) =$

$2x_1 - x_2 - 1$ et $Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$. Représenter graphiquement dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles $Z(P)$ et $Z(Q)$. $Z(P)$ et $Z(Q)$ sont-ils infinis ?

③ Intérieur de l'ensemble des zéros d'une fonction polynomiale.

Soit $P \in \Gamma_p$.

- a** Soient $I_1, \dots, I_p$ des parties infinies de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence que si la fonction polynomiale P s'annule sur $I_1 \times \dots \times I_p$, alors P est la fonction nulle.
- b** En déduire que si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est la fonction nulle.
- c** Si l'on suppose que P n'est pas la fonction nulle, que vaut l'intérieur de $Z(P)$?

④ Application à l'étude de l'intérieur de $Rac(A)$.

Dans cette question, on confondra les espaces vectoriels $M_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^{n^2}$. Par exemple, on prendra la liberté d'écrire que pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2}$, sans se soucier de l'ordre des termes.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

- a** Ecrire $Rac(A)$ sous forme d'un ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$ puis montrer qu'il existe des éléments $P_1, \dots, P_{n^2}$ de Γ_{n^2} tels que

$$Rac(A) = \bigcap_{l=1}^{n^2} Z(P_l).$$

- b** Déterminer l'intérieur de $Rac(A)$.

Blague du jour

Comparaison entre Internet Explorer et la drogue :

- La première dose est gratuite, mais quand vous serez accrocs ils augmenteront les prix.
- Microsoft, comme les dealers, savent que, faute d'autre came, vous reviendrez.
- Les deux vous explosent le système de temps en temps.
- Bill, comme les dealers, voudrait bien que tu revendes ses produits aux autres.



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)

Mathématicien allemand, lauréat de la médaille Copley en 1895. Il est souvent cité comme le « père de l'analyse moderne ». Ses travaux les plus connus portent sur les fonctions elliptiques. C'est lui qui le premier rendit public un exemple de fonction continue nulle part dérivable. Weierstrass étudia la fiabilité de l'analyse, dont il propose une construction logique rigoureuse. À cette époque, les démonstrations de l'analyse s'appuyaient sur des définitions ambiguës

Mathématicien du jour

❑ Corrigé, Pr. Devulder, CPGE France

● Partie I. Exemples de $Rac(A)$.

- ① Les sous espaces propres $E_{\lambda_i}(A)$ sont de dimension ≥ 1 et en somme directe. Leur somme a donc une dimension au moins égale à n . Comme elle est incluse dans $\mathbb{R}^n$, sa dimension est en réalité égale à n et chaque $E_{\lambda_i}(A)$ a une dimension égale à 1. Notons (f_i) une base de $E_{\lambda_i}(A)$. La famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Si P est la matrice de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ aux f_i alors $P^{-1}AP$ est la matrice dans la base (f_i) de l'endomorphisme canoniquement associé à A . Par choix des f_i , cette matrice est $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et on a donc

$$A = PDP^{-1} \text{ avec } D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Soit $R \in M_n(\mathbb{R})$ et $S = P^{-1}RP$. On a $R^2 = A$ si et seulement si $P^{-1}R^2P = D$ (il y a équivalence car on revient en arrière en

multipliant par P à gauche et P^{-1} à droite) c'est à dire $S^2 = D$. On peut donc écrire

$$Rac(A) = P.Rac(D).P^{-1}$$

② .

a On a $SD = S^3 = DS$.

b On fait le produit matriciel pour obtenir

$$\forall i, j, S_{i,j}\lambda_j = \sum_{k=1}^n S_{i,k}D_{k,j} = \sum_{k=1}^n D_{i,k}S_{k,j} = \lambda_i S_{i,j}$$

Les λ_k étant deux à deux distincts, on a donc

$$\forall i \neq j, S_{i,j} = 0$$

et S est diagonale.

c On a alors $S^2 = diag(s_1^2, \dots, s_n^2)$. Comme $S^2 = D$, on a donc

$$\forall i, s_i^2 = \lambda_i$$

d Si il existe un i tel que $\lambda_i < 0$, les relations précédentes sont impossible et donc

$$\text{Rac}(A) = \emptyset$$

qst e Si tous les λ_i sont positifs, on vient de voir que

$$\text{Rac}(D) \subset \{\text{diag}(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}) / \forall i, \varepsilon_i = \pm 1\}$$

Réciproquement, si $S = \text{diag}(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n})$ (où $\varepsilon_i = \pm 1$) alors $S^2 = D$. L'inclusion ci-dessus est une égalité.

③ L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est une bijection de $\text{Rac}(A)$ dans $\text{Rac}(D)$.

a Si $\lambda_1 < 0$, on a vu en 2.d que $\text{Rac}(A) = \emptyset$. Il n'y a donc pas de racine carrée pour A .

b Si $\lambda_1 \geq 0$ alors une racine carrée de D est connue par le choix des ε_i et

$$\text{Rac}(A) = \{P \cdot \text{diag}(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}) \cdot P^{-1} / \forall i, \varepsilon_i = \pm 1\}$$

Deux choix différents des ε_i donneront deux racines carrées distinctes de D sauf dans le cas où $\lambda_1 = 0$. On a donc

$$\text{Card}(\text{Rac}(A)) = 2^{n-1} \text{ si } \lambda_1 = 0$$

$$\text{Card}(\text{Rac}(A)) = 2^n \text{ si } \lambda_1 > 0$$

④ $(0, 1, 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 0. $(1, 1, -1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1. Avec la trace, on voit que la dernière valeur propre est 16. Une résolution de système montre que $(2, -1, 1)$ est vecteur propre associé. On pose donc

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $P^{-1}AP = \text{diag}(0, 1, 16)$. A admet quatre racines carrées qui sont

$$P \cdot \text{diag}(0, 1, 4) \cdot P^{-1}, P \cdot \text{diag}(0, -1, 4) \cdot P^{-1}, P \cdot \text{diag}(0, 1, -4) \cdot P^{-1}, P \cdot \text{diag}(0, -1, -4) \cdot P^{-1}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7/3 & -5/3 & 5/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7/3 & 5/3 & -5/3 \\ 5/3 & -1/3 & 1/3 \\ -5/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

On remarque bien sûr que les matrices sont deux à deux opposées.

⑤

a $R^2 = 0$ se traduit par $f \circ f = 0$ et donc par

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$$

Or, le théorème du rang indique que $r + \dim(\text{Ker}(f)) = n$.

Comme $\dim(\text{Ker}(f)) \geq r$, on a donc

$$r \leq \frac{n}{2}$$

b La famille $\mathcal{B}$ ayant n éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre ou génératrice pour conclure que c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Supposons donc que

$$(*) : \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^r \beta_i u_i = 0$$

Avec les notations de l'énoncé, ceci s'écrit

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i f(u_i) + \sum_{i=r+1}^{n-r} e_i + \sum_{i=1}^r \beta_i u_i = 0$$

En composant par f , on obtient (avec $f^2 = 0$ et $f(e_i) = 0$ si $i \in \{r+1, \dots, n-r\}$)

$$\sum_{i=1}^r \beta_i e_i = \sum_{i=1}^r \beta_i f(u_i) = 0$$

Comme $(e_1, \dots, e_r)$ est libre, les β_i sont nuls. En reportant dans (*) et comme $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est libre, les α_i sont aussi nuls. Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre et c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

Par choix des vecteurs de $\mathcal{B}$, on a (définition par blocs)

$$M_r = \text{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⑥ .

a Si $R \in \text{Rac}(A)$ alors soit $R = 0$ soit il existe une matrice inversible P et un entier $r \in [1..n/2]$ telle que $R = PM_r P^{-1}$. Réciproquement, la matrice nulle est une racine carrée de 0 et si $r \leq n/2$, un produit par blocs montre que $M_r^2 = 0$ et donc $(PM_r P^{-1})^2 = PM_r^2 P^{-1} = 0$. Ainsi,

$$\text{Rac}(0) = \{PM_r P^{-1} / P \in GL_n(\mathbb{R}), r \in [1, n/2]\} \cup \{0\}$$

b Dans le cas $n = 4$, les racines carrées de 0 sont 0 et les matrices semblables à l'une des deux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⑦ .

a $R^2 = I_n$ donne $\det(R)^2 = 1$ et donc $\det(R) \neq 0$. R est donc inversible.

b $X^2 - 1$ est un polynôme qui annule R . Comme il est scindé à racines simples, R est diagonalisable. En outre, les valeurs propres de R sont racines de $X^2 - 1$ et ne peuvent valoir que 1 ou -1. Ainsi, R est semblable à une matrice diagonale où les coefficients diagonaux valent 1 ou -1.

⑧ Ce qui précède montre que

$$\text{Rac}(I_n) \subset \left\{ P \cdot \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \cdot P^{-1} / P \in GL_n(\mathbb{R}), \forall i, \varepsilon_i \in \{-1, +1\} \right\}$$

Réciproquement $D = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vérifie $D^2 = I_n$ quand les ε_k valent 1 ou -1 et $(PDP^{-1})^2 = PD^2P^{-1} = I_n$. L'inclusion précédente est donc une égalité.

⑨ $\text{diag}(-1, -2, \dots, -n)$ est une matrice symétrique réelle qui, d'après l'exemple 1, n'admet pas de racine carrée.

● Partie II. Étude topologique de $\text{Rac}(A)$.

① Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Le théorème spectral donne l'existence d'une matrice orthogonale P et d'une matrice diagonale D telles que $P^{-1}AP = D$. Les coefficients diagonaux d_i de D sont valeurs propres pour A . Si X_i est vecteur propre associé alors

$$0 \leq {}^t X_i A X_i = {}^t X_i (d_i X_i) = d_i \|X_i\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne. Comme $\|X_i\|^2 > 0$ (X_i est non nul puisque c'est un vecteur propre), on a $d_i \geq 0$. On peut alors poser

$$R = P \cdot \text{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}) \cdot P^{-1} = P \Delta P^{-1}$$

P étant orthogonale on a $P^{-1} = {}^t P$ et R est symétrique. Par ailleurs, $R^2 = P \Delta P^{-1} = A$ et R est racine carrée de A . Enfin, R est positive :

$$\forall X \quad {}^t X R X = {}^t X P \Delta {}^t P X = \sum_{i=1}^n \sqrt{d_i} y_i^2 \text{ avec } Y = {}^t P X$$

et cette quantité est bien positive. On a finalement montré que $\text{Rac}(A) \cap S_n^+(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

$M_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes. On pourra choisir la norme N de l'énoncé ou toute autre norme. Cela ne change rien du point de vue topologique.

- ② Par théorèmes généraux, $R \mapsto R^2$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$ (chaque fonction coordonnée l'est comme fonction polynomiale des coefficients de R). Ainsi, si (R_k) est une suite convergente d'éléments de limite R alors $R_k^2 \rightarrow R^2$.

Ainsi, si (R_k) est une suite convergente d'éléments de $Rac(A)$, la limite est dans $Rac(A)$. Ce dernier ensemble est donc fermé.

③ .

a On a $S_q^2 = I_2$. Comme $N(S_q) = \max(|q|, 1) \rightarrow +\infty$ quand $q \rightarrow +\infty$, $Rac(I_2)$ n'est pas borné.

b Définissons par blocs la matrice $M_q = \begin{pmatrix} S_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}$. On a alors $M_q^2 = I_n$ (calcul par blocs) et $N(M_q) \rightarrow +\infty$ quand $q \rightarrow +\infty$. Ainsi, $Rac(I_n)$ n'est pas borné pour $n \geq 3$.

c On vient de voir que l'on peut trouver une suite (R_k) de racines carrées de I_n telles que (R_k) n'est pas bornée. Si, par l'absurde, il existait une norme surmultiplicative $\|\cdot\|$ alors on aurait

$$\forall k, \|R_k\|^2 \leq \|R_k^2\| = \|I_2\|$$

Le membre de droite est constant et celui de gauche de limite infinie (voir remarque préliminaire en début de partie). On obtient une contradiction ce qui prouve la non existence d'une norme surmultiplicative.

● Partie III. Zéros de polynômes et intérieur de

① .

a On a

$$B_\infty(a, r) = \prod_{i=1}^p]a_i - r, a_i + r[$$

b Soit $a \in F \cap G$. Si, par l'absurde, il existait $r > 0$ tel que $B_\infty(a, r) \subset F \cap G$ alors on aurait a fortiori $B_\infty(a, r) \subset F$ et donc a serait intérieur à F ce qui est exclu (et donne une contradiction). $F \cap G$ n'a donc pas de point d'intérieur.

Remarque : pour arriver à cette conclusion, il suffit que F OU G soit d'intérieur vide.

② .

a Le seul polynôme admettant une infinité de racines est le polynôme nul. Pour le voir, on peut, par exemple, prouver par récurrence qu'un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

i Si P est constant non nul il n'admet pas de racine.

ii Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n . Soit P de degré $n+1$. Entre deux racines de P , il y a une racine de P' (théorème de Rolle). Comme P' admet au plus n racines ($\deg(P') = \deg(P) - 1 = n$), P en admet au plus $n+1$.

On peut aussi prouver le résultat (et on n'utilise alors plus la structure ordonnée de $\mathbb{R}$) en montrant que si $P(a) = 0$ alors $(X - a)$ divise P et en raisonnant par degré.

b Dans le plan $(0, x_1, x_2)$, $2x_1 - x_2 = 1$ est l'équation d'une

droite. $Z(P)$ est donc infini.

$x_1^2 - x_2 = 0$ est l'équation d'une parabole et $Z(Q)$ est aussi infini.

③ .

a Le résultat pour $p = 1$ a été justifié en question 14.a.

Supposons le résultat vrai jusqu'à un rang $p \geq 1$. Soient alors P une fonction polynomiale qui s'annule sur $I_1 \times \dots \times I_{p+1}$ où chaque I_k est une partie infinie de $\mathbb{R}$. En ordonnant les puissances de x_{p+1} , on peut écrire

$$P(x_1, \dots, x_{p+1}) = \sum_{i=0}^N P_i(x_1, \dots, x_p) x_{p+1}^i$$

où chaque P_i est dans Γ_p .

Fixons $x_1, \dots, x_p$ avec $x_i \in I_i$ et considérons l'expression précédente comme fonction de x_{p+1} . C'est une fonction polynomiale qui s'annule en une infinité de points. D'après l'initialisation, c'est le polynôme nul. On a donc

$\forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall (x_1, \dots, x_p) \in I_1 \times \dots \times I_p, P_i(x_1, \dots, x_p) = 0$

L'hypothèse de récurrence donne la nullité des P_i et donc celle de P . On a ainsi prouvé le résultat au rang $p + 1$ et complété la récurrence.

b D'après la question 13.a, toute partie d'intérieur non vide contient une sous-partie $\prod I_k$ où chaque I_k est infini (intervalle de longueur $2r > 0$). Si P s'annule sur une partie d'intérieur non vide, P est alors nul avec la question précédente.

c En contraposant le résultat de la question précédente, si $P \neq 0$ alors $Z(P)$ est d'intérieur vide.

④ .

a R^2 est une matrice dont le coefficient générique est

$$\sum_{k=1}^n R_{i,k} R_{k,j}$$

Considérons alors

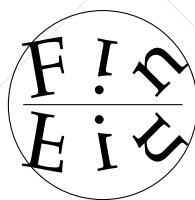
$$Q_{i,j} = \left(\sum_{k=1}^n x_{i,k} x_{k,j} \right) - a_{i,j} \in \Gamma_{n^2}$$

Par définition de $Rac(A)$, on a

$$Rac(A) = \bigcap_{1 \leq i,j \leq n} Z(Q_{i,j})$$

ce qui fait apparaître $Rac(A)$ comme sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n^2}$.

b Comme intersection de parties d'intérieur vide, $Rac(A)$ est d'intérieur vide avec la question ①.



À la prochaine

Devoir libre

Epreuve spécifique - filière PC

10 matrices positives et décomposition de Cholesky

Blague du jour

MATHEMATIQUE 1

- Quel sont les deux animaux les plus intelligents ? - Le Cerf et le Veau (cerveau)
- C'est un chien qui rencontre un crocodile :
- Le crocodile dit au chien : Salut, sac à puces !
- Et le chien lui répond : Salut, sac à main !

Durée : 4 heures



John Wallis (1616-1703)

Mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society. Ses travaux concernent principalement le calcul différentiel et intégral. On lui doit le symbole de l'infini ∞ .

Mathématicien du jour

Énoncé : CCP 2003, PSI

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.

Pour $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $\mathbb{R}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX .

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

Une matrice symétrique S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX \geq 0$ et définie positive si et seulement si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^tXSX > 0$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Partie I

I.1 Soit $(X, Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Etablir les égalités :

- a) ${}^tXY = {}^tYX$.
- b) $({}^tXY)^2 = {}^tX(Y^tY)X = {}^tY(X^tX)Y$.
- c) ${}^tXSY = \langle X | SY \rangle = \langle SX | Y \rangle$.

I.2 Démontrer les propriétés suivantes :

- a) $\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2, S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
- b) $\forall (S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- c) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.3 a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX = 0$. Montrer que toute valeur propre de S est nulle et en déduire $S = 0$.

b) Donner un exemple de matrice carrée M d'ordre 3, non nulle et vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX = 0$$

I.4 a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

b) Que peut-on dire d'une matrice symétrique réelle semblable à une matrice symétrique réelle positive ?

I.5 On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des relations notées $\geq$ et $>$, définies respectivement par :

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 \geq S_2 \iff S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall (S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2, (S_1 > S_2 \iff S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

- a) Montrer que la relation $\geq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- b) Montrer que pour $n \geq 2$, cet ordre n'est pas total sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- c) La relation $>$ est-elle une relation d'ordre ?
- d) Trouver un exemple dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ montrant que $S_1 \geq S_2$ et $S_1 \neq S_2$ n'implique pas nécessairement $S_1 > S_2$.

I.6 Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables et vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

- a) Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v .
- b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres de u respectivement associés. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, on note v_i l'endomorphisme de E_{λ_i} induit par v . Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de v . En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les matrices de u et v dans cette base soient toutes deux diagonales.

- I.7 a)** Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage.
- b)** On donne les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage et déterminer explicitement une telle matrice de passage.

I.8 Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1 S_2 = S_2 S_1$. Montrer que $S_1 S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.9 a) Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1 S_2 = S_2 S_1$. Montrer que :

$$S_2 \geq S_1 \geq 0 \implies S_2^2 \geq S_1^2$$

- b)** Montrer que les matrices $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ vérifient $S_2 \geq S_1 \geq 0$.
Vérifient-elles $S_2^2 \geq S_1^2$?

Partie II

On se propose dans cette partie de caractériser de diverses manières la définie positivité d'une matrice symétrique réelle.

II.1 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- S est définie positive.
- Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.
- Il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^t M M$.
- S est positive et inversible.

II.2 Soit A_n et B_n les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ données par :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = 2I_n - B_n$$

- a)** Montrer que pour tout vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$:

$${}^t X A_n X = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

- b) En déduire que A_n est définie positive.
c) En cherchant une matrice M_n de la forme :

$$M_n = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix}, \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}$$

déterminer explicitement une matrice M_n inversible telle que $A_n = {}^t M_n M_n$.

II.3 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $S = {}^t M M$. On note $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ la famille des vecteurs colonnes de M . Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $p_i(x)$ la projection orthogonale de x sur $\text{Vect}(U_1, U_2, \dots, U_i)$.

- a) Justifier que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
b) On définit la famille de vecteurs $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ par les relations :

$$V_1 = U_1 \text{ et } \forall i \in \{2, \dots, n\}, V_i = U_i - p_{i-1}(U_i)$$

Montrer que la famille $\mathcal{V}$ est orthogonale et que c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $\mathcal{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ la famille de vecteurs définie par $W_i = \frac{1}{\|V_i\|} V_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\mathcal{W}$ est alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{U}$ est triangulaire supérieure.

d) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{W}$. Montrer que M peut s'écrire sous la forme $M = PT$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible et qu'alors $S = {}^t T T$.

- e) Montrer que la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de la forme

$S = {}^t T T$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible et en déduire que S est symétrique définie positive.

II.4 a) Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que ${}^t X A_0 X = 0$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si $(\text{Tr } A > 0 \text{ et } \det A > 0)$ ce qui équivaut encore à $(a > 0 \text{ et } ab - c^2 > 0)$.

c) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), n \geq 2$. On décompose S sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} a & {}^t V \\ V & S' \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}, V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}), S' \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$$

En écrivant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, montrer que pour $a \neq 0$:

$${}^tX S X = a \left[\left(x + \frac{1}{a} {}^tV X' \right)^2 + \frac{1}{a^2} {}^tX' (a S' - V {}^tV) X' \right] \quad (1)$$

et en déduire que S est définie positive si et seulement si ($a > 0$ et $a S' - V {}^tV$ est définie positive).

d) En gardant les notations de la question **II.4 c)** précédente, on peut alors construire par récurrence une suite de nombres réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une suite de matrices $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ comme suit. On pose d'abord :

$$S_1 = S, \quad a_1 = a, \quad V_1 = V, \quad S'_1 = S', \quad S_2 = a_1 S'_1 - V_1 {}^tV_1$$

Si $n \geq 3$, on décompose S_2 sous la forme

$$S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & {}^tV_2 \\ V_2 & S'_2 \end{pmatrix}, \quad a_2 \in \mathbb{R}, \quad V_2 \in \mathcal{M}_{n-2,1}(\mathbb{R}), \quad S'_2 \in \mathcal{S}_{n-2}(\mathbb{R})$$

On pose à nouveau $S_3 = a_2 S'_2 - V_2 {}^tV_2$ et on itère le processus précédent. On obtient ainsi une suite de matrices symétriques réelles $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ où S_i est d'ordre $n - i + 1$ et une suites de réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ liés par les relations :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad S_i = \begin{pmatrix} a_i & {}^tV_i \\ V_i & S'_i \end{pmatrix}, \quad S_{i+1} = a_i S'_i - V_i {}^tV_i$$

Le processus s'arrête pour $i = n$ car S_n est alors d'ordre 1 et on note $S_n = (a_n)$.

Montrer que S est définie positive si et seulement si tous les réels de la suite $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont strictement positifs.

e) Soit $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Selon les notations précédentes, déterminer explicitement les réels a_1, a_2, a_3 associés à cette matrice S et en déduire que S est définie positive si et seulement si :

$$a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0$$



À la prochaine

Blague du jour

Les types d'ingénieurs en informatique sont :

- L'ingénieur DISQUE DUR : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
- L'ingénieur CD-ROM : il va toujours plus vite avec le temps.
- L'ingénieur RAM : il oublie tout de vous, dès le moment où vous lui tournez le dos.



Hermann Minkowski (1864 - 1909)

Mathématicien et un physicien théoricien allemand. On lui doit surtout l'espace à 4 dimension (espace-temps) appelé de Minkowski, considéré comme la base de tous les travaux sur la théorie de la relativité. Son travail le plus original est sans aucun doute sa géométrie des nombres. Ces travaux posent de nombreuses questions sur le gain de place, ou comment faire rentrer une forme donnée à l'intérieur d'une autre forme donnée.

Mathématicien du jour

❑ Corrigé, Pr. J. DEARBIEUX, Lycée Faiderbe, Lille

PARTIE 1

1a) Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = (y_i)_{i=1}^n$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$${}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1b) Développement sans problème :

$$\begin{aligned} ({}^tXY)^2 &= ({}^tXY)({}^tXY) = ({}^tXY)({}^tYX) \text{ calcul précédent} \\ &= ({}^tX)(Y^tY)(X) \text{ par associativité} \\ &= ({}^tYX)({}^tXY) = {}^tY(X^tX)Y \text{ symétriquement} \end{aligned}$$

1c) Si on considère que ${}^tXY = \langle x, y \rangle$ dans une base orthonormée"

n'est pas une formule classique on refait le calcul et

$${}^tX(SY) = \sum_{(i,j)} x_i s_{i,j} y_j = \langle X, SY \rangle$$

puis comme S est symétrique ${}^tX(SY) = {}^tX^tSY = {}^t(SX)Y = \langle SX, Y \rangle$

2a) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXS_1X \geq 0$ et ${}^tXS_2X \geq 0$ et donc en ajoutant ${}^tX(S_1 + S_2)X \geq 0$

$$(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2 \Rightarrow S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

2b) idem car la somme d'un réel positif et d'un réel strictement positif est un réel strictement positif.

2c) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX({}^tAA)X = {}^t(AX)(AX) = \langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$. Et donc

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

3a) Si $SX = \lambda X$ on a ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$. Donc si ${}^tXSX = 0$ on a $\lambda = 0$ (car X est non nul donc $\|X\| \neq 0$)

S est donc une matrice diagonalisable (car symétrique réelle) ayant une unique valeur propre 0. S est donc la matrice nulle : $S =$

$$P.O.P^{-1} = (0)$$

3b) On veut que MX soit orthogonal à X pour tout X . c'est une propriété classique du produit vectoriel. Il suffit de prendre pour M la matrice de $x \rightarrow i \wedge x$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors bien ${}^tXMX = 0$

4a) S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = \text{diag}(\lambda_k)$ telle que $\forall k, SV_k = \lambda_k V_k$. Si toutes les valeurs propres sont positives on a alors pour toute

matrice colonne $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$${}^tXSX = \langle X, SX \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X un vecteur propre associé. le calcul du **3a** donne ${}^tXSX = \lambda \|X\|^2$. comme on suppose ${}^tXSX \geq 0$ et que $X \neq \vec{0}$ on a bien $\lambda \geq 0$

4b) deux matrices semblables ont même spectre. Donc si S' est symétrique réelle semblable à S symétrique positive les valeurs propres de S (donc de S') sont toutes positives donc S' est positive.

5a) Sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation $\geq$ est bien :

☛ binaire

☛ réflexive : $(0)_n$ est bien positive donc $S_1 \geq S_1$

☛ antisymétrique : si $S_1 \geq S_2$ et si $S_2 \geq S_1$ les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont toutes à la fois positives et négatives. $S_2 - S_1$ est donc diagonalisable (car symétrique réel) ayant une seule valeur propre

0 donc c'est la matrice nulle. $S_2 = S_1$

☛ transitive : Si $S_1 \geq S_2$ et $S_2 \geq S_3$ on a $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_2 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après **2a** la somme $S_1 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $S_1 \geq S_3$.

5b) il suffit de prendre $S_1 = 0$ et pour S_2 une matrice symétrique ayant une valeur propre positive et une négative. Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5c) la relation $>$ n'est pas réflexive car $(0)_n \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

5d) On peut se douter (ou montrer) qu'une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a des valeurs propres strictement positives.

On prend donc $S_2 = 0$ et S_1 symétrique ayant des valeurs propres positives et ayant la valeur propre 0. Par exemple $S_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ On a } S_1 \neq (0) \quad {}^tXS_1X = z^2 \geq 0 \text{ et si } X = \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^tXS_1X = 0$$

6a) question de cours. On doit montrer $x \in E_\lambda(u) \Rightarrow v(x) \in E_\lambda(u)$

. Donc $u(x) = \lambda x \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$. Or

$$u(v(x)) = (u \circ v)(x)$$

$$= (v \circ u)(x) \text{ par hypothèse sur } u \text{ et } v$$

$$= v(u(x)) = v(\lambda(x))$$

$$= \lambda v(x) \text{ par linéarité de } v$$

6b) L'endomorphisme induit par v diagonalisable sur un sous-espace stable est lui-même diagonalisable. Donc l'endomorphisme v_i est diagonalisable et il existe une base de $E_{\lambda_i}(u)$ qui est une base de vecteurs propres de v_i . u étant diagonalisable E est somme directe des sous-espaces propres. L'union des bases précédente est donc

une base de E . Par construction ces vecteurs sont des vecteurs propres de v et de u (car éléments des sous espaces propres). Dans cette base u et v sont donc simultanément diagonalisables.

7a) Si A et B commutent A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage. On prend la question précédente avec $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$. P est alors la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.

Réciproquement si A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage. On a $A = PDP^{-1}$, $B = P\Delta P^{-1}$ et comme deux matrices diagonales commutent $AB = BA = P(D\Delta)P^{-1}$

7b)

A est de rang 1 et $E_0(A)$ est le plan $(x + y - z = 0)$. Par la trace on en déduit que la troisième valeur propre est 3 puis on trouve

$$E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour B le calcul du polynôme caractéristique en commençant par exemple par faire $C_2 + C_3 - C_1$ donne deux valeurs propres 4(double) et 1(single). Puis le calcul des sous espaces propres

donne : $E_4(B)$ est le plan $-2x + y - z = 0$ et $E_1(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

. On vérifie alors que $E_1(B) \subset E_0(A)$, $E_3(A) \subset E_4(B)$. Les trois droites $E_1(B)$, $E_3(A)$, $E_0(A) \cap E_4(B)$ sont trois droites de vecteurs propres communs qui engendrent l'espace. Une matrice de pas-

sage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

remarque : je ne pense pas que le passage par l'endomorphisme induit par v sur $E_0(A)$ soit plus simple

8) S_1 et S_2 sont diagonalisables (symétriques réels), et commutent. S_1 et S_2 sont donc diagonalisables avec une même matrice de passage ($S_1 = PDP^{-1}$, $S_2 = P\Delta P^{-1}$). Cette matrice de passage diagonalise aussi $S_1S_2 = S_2S_1 = PD\Delta P^{-1}$, la matrice diagonale semblable à S_1S_2 étant le produit des deux matrices semblables à S_1 et S_2 . S_1 et S_2 étant positives ont toutes leurs valeurs propres positives. Les valeurs propres de S_1S_2 sont donc aussi toutes positives et S_1S_2 est symétrique positive. (toujours **4a**)

9a) Avec les notations précédentes ($S_1 = PDP^{-1}$, $S_2 = P\Delta P^{-1}$). On donc $\Delta - D$ positives. Donc pour les termes diagonaux $\delta_i - d_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$. La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\forall i, \delta_i^2 \geq d_i^2$. $\Delta^2 - D^2$ est donc positive et $S_2^2 - S_1^2$ est une matrice symétrique semblable à une matrice symétrique positive donc est aussi positive. $S_2^2 \geq S_1^2$ (cf **4b**)

9b) On a $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 0 et 5/2 réels positifs. La matrice est positive est $S_2 \geq S_1$
 S_1 de valeurs propres 0 et 1 donc $S_1 \geq 0$

et $S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ de déterminant $-9/4$. Le produit des valeurs est négatif. L'une des valeurs propres est négative. $S_2^2 - S_1^2$ n'est pas positive.

Partie II

1)

a $\Leftrightarrow$ **b** : idem I4a

S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = \text{diag}(\lambda_k)$ telle que $\forall k, SV_k = \lambda_k V_k$. Si toutes les valeurs propres sont strictement positives on a alors

pour toute matrice colonne non nulle $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$${}^tXSX = \langle X, SX \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 > 0$$

En effet on a une somme de termes positifs, un au moins étant strictement positif.

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X vecteur propre associé on a ${}^tXSX = \lambda \|X\|^2$. comme on suppose ${}^tXSX > 0$ et que $X \neq \vec{0}$ on a bien $\lambda > 0$

b $\Rightarrow$ **c**. S étant diagonalisable dans une base orthonormée (symétrique réelle) on peut écrire $S = PD^tP$ avec $D = \text{diag}(d_i)$. Par hypothèses les d_i sont strictement positifs. On peut donc définir $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_i})$ qui est inversible car les termes diagonaux sont non nuls. $M = \Delta^tP$ est alors une solution du problème.

$${}^tMM = P\Delta\Delta^tP = PD^tP = S$$

c $\Rightarrow$ **d** si $S = {}^tMM$ avec M inversible, S est inversible (comme produit de matrices inversibles) et S est positive d'après I2c

d $\Rightarrow$ **b** : S est positive donc toutes les valeurs propres de S sont positives et S est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de S . Les valeurs propres de S sont donc strictement positives.

On a la chaîne $b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow b$ et $a \Leftrightarrow b$ donc l'équivalence des 4 propositions.

2a) A est bien une matrice symétrique.

Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = AX = (y_j)_{j=1}^n$ on a :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ \forall j \in [[2, n-1]], y_j = -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2x_n \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=2}^n x_i^2 + x_1^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \right) - \sum_{i=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1}^2 + x_1^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2) \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

2b pour toute colonne X on constate que tXAX est une somme de carré donc est un réel positif. De plus la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall i \in [[1..n-1]], x_{i+1} - x_i = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Tous les x_i sont donc nuls. Donc si $X \neq (0)$ tXAX est strictement positif.

2c) Avec la matrice M du sujet notons $S = {}^tMM = (s_{i,j})$ on a en

faisant le produit :

$$\begin{cases} s_1 = u_1^2 \\ i > 1 \Rightarrow s_i = u_i^2 + v_{i-1}^2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow s_{i,i+1} = s_{i+1,i} = u_i v_i \\ |j-i| > 1 \Rightarrow s_{i,j} = 0 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} u_1^2 = 2 \\ i > 1 \Rightarrow u_i^2 + v_{i-1}^2 = 2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow u_i v_i = -1 \end{cases}$$

On a donc $v_i = -\frac{1}{u_i}$ et en reportant $u_i^2 = 2 - \frac{1}{u_{i-1}^2}$. Soit en posant

$a_i = u_i^2$ la suite homographique :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_i = 2 - \frac{1}{a_{i-1}} \end{cases}$$

l'équation $l = 2 - 1/l$ donne un point fixe double $l = 1$. La suite $\frac{1}{a_i - 1}$ est donc arithmétique. Or

$$\frac{1}{a_i - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i-1}}} = \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} - 1} = 1 + \frac{1}{a_{i-1} - 1}$$

d'où $\frac{1}{a_i - 1} = i$ et

$$u_i = \sqrt{\frac{i+1}{i}}, v_i = -\sqrt{\frac{i}{i+1}}$$

3a) $\mathcal{U}$ est une base car S est une matrice inversible d'après **III1c**

3b) C'est la méthode d'orthogonalisation de Schmidt. Démonstration par récurrence

☛ (V_1) est réduit à un seul vecteur non nul donc est une famille orthogonale de vecteurs non nuls

☛ (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et $\text{Vect}(V_1, V_2) = \text{Vect}(U_1, U_2)$. En effet

☛ p_1 est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(U_1) = \text{Vect}(V_1)$ donc $V_2 = U_2 - p_1(U_2)$ est orthogonal à V_1

☛ si V_2 était nul, on aurait $U_2 = p_1(U_2) \in \text{Vect}(U_1)$. Absurde car (U_1, U_2) est libre

☛ (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, c'est donc une famille libre.

☛ Enfin $\text{Vect}(V_1, V_2) \subset \text{Vect}(U_1, U_2)$ par construction, et comme les deux familles de deux vecteurs sont libres il y a égalité.

☛ On suppose que $(V_i)_{i=1}^{k-1}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$. Montrons que $(V_i)_{i=1}^k$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$.

☛ par hypothèse de récurrence on doit seulement montrer que V_k est un vecteur non nul orthogonal à $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1}$ puis $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$.

☛ Par construction p_{k-1} est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$ donc $V_k = U_k - p_{k-1}(U_k)$ est orthogonal à $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1}$.

☛ Si V_k est nul alors $U_k = p_{k-1}(U_k) \in \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$ et la famille $(U_i)_{i=1}^n$ est liée. Absurde

☛ Enfin par construction $V_k \in \text{Vect}(U_k) \oplus \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$ et $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1} \subset \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$. Donc $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k \subset \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$. Les deux familles étant libres de même cardinal, les deux sous espaces sont égaux.

pour $k = n$ on obtient que $\mathcal{V}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

3c) La base est orthonormale car on norme une base orthonormée (

et les dénominateurs sont non nuls car les V_i sont des vecteurs non nuls)

Par construction de $\mathcal{V}$ on a vu que $V_k \in \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$. Les coordonnées de V_k sur $U_{k+1}, \dots, U_n$ sont donc nuls.

$\text{Mat}_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ est triangulaire supérieure. Diviser chaque colonne par sa norme ne change pas les coefficients nuls. $\text{Mat}_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})$ est triangulaire supérieure.

3d) notons $\mathcal{B}$ la base canonique. On a

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{U}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) \text{Mat}_{\mathcal{W}}(\mathcal{U}) = PT$$

où T est l'inverse de la matrice triangulaire supérieure construite à la question précédente.

On a alors $S = {}^tMM = {}^tT^tPPT$. Mais P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{W}$ toutes deux bases orthonormées. Donc P est orthogonale et ${}^tPP = I_n$. Il reste donc $S = {}^tTT$

3e) Si on pose à priori $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ le calcul donne :

$${}^tTT = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en résolvant le système ligne par ligne et en choisissant pour a, d, f les racines carrées positives on obtient

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que T est inversible et donc d'après II 1 S est définie positive.

4a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a ${}^tXA_0X = by^2 + 2cxy$ donc $y = 0$ ou

$$by + 2cx = 0$$

4b)

☞ si A est définie positive les valeurs propres de A sont strictement positives (cf II 1). Leur somme (la trace) et leur produit (le déterminant) le sont aussi. On a donc $a + b > 0$ et $ab - c^2 > 0$. On en déduit que $a + b$ et ab sont strictement positifs donc a et b le sont.

☞ Si $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$ on a $b > \frac{c^2}{a} > 0$ donc $\text{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. La somme et le produit des valeurs propres sont strictement positifs donc les valeurs propres sont strictement positives. D'après II 1 A est définie positive.

4c) calcul par bloc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & {}^tX' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xa + {}^tX'V & x{}^tV + {}^tX'S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} \\ &= xax + x{}^tX'V' + x{}^tVX' + {}^tX'S'S' \\ &= ax^2 + x({}^tVX' + {}^tX'V) + {}^tX'S'X' \\ &= ax^2 + 2x{}^tVX' + {}^tX'S'X' \text{ car } {}^tVX' = {}^tX'V' \\ &= a \left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} ({}^tVX')^2 + {}^tX'S'X' \\ &= a \left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} ({}^tX'V{}^tVX') + {}^tX'S'X' \\ &= a \left[\left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 + \frac{1}{a^2} {}^tX'(-V{}^tV + aS')X' \right] \end{aligned}$$

On vérifie que tous les produits matriciels ont un sens les matrices étant de tailles compatibles.

On en déduit donc :

☞ si $a > 0$ et $aS' - V{}^tV$ définie positive, pour toute ma-

trice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\left(x + \frac{{}^t V X'}{a}\right)^2 \geq 0$ et ${}^t X' (aS' - V^t V) X' \geq 0$ donc ${}^t X S X \geq 0$. De plus si ${}^t X S X = 0$ on a une somme nulle de réelles positives donc chaque terme est nulle. En particulier ${}^t X' (aS' - V^t V) X' = 0$ et donc $X' = 0$ car $aS' - V^t V$ est définie positive on trouve alors $x = 0$ en reportant dans $\left(x + \frac{{}^t V X'}{a}\right)^2 = 0$. Donc $X \neq 0 \Rightarrow {}^t X S X > 0$ et S est définie positive.

Si S est définie positive alors $a > 0$ car pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^t X S X = a$ d'après le calcul précédent (avant la division par a) et $aS' - V^t V$ est définie positive car pour toute matrice non nul $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

$${}^t X' (aS' - V^t V) X' = a^2 {}^t X S X > 0 \text{ en prenant } X = \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}$$

4d)

Si S est définie positive la question précédente donne par une récurrence évidente que toutes les S_i sont définies positives et tous les a_i positifs pour $i < n$. Enfin $a_n > 0$ comme valeur propre de la

matrice S_n définie positive.

Réciproquement si les (a_i) sont tous strictement positifs $S_n = (a_n)$ est définie positive. S_n est définie positives et $a_{n-1} > 0$ donc S_{n-1} est définie positive et par récurrence si S_{i-1} est définie positive S_i est définie positive car $a_{i-1} > 0$.

4e) Si $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ on a $a_1 = a, V_1 = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, S'_1 = \begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix}$

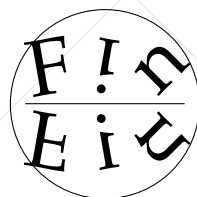
d'où

$$S_2 = \begin{pmatrix} ab - d^2 & af - de \\ af - de & ac - e^2 \end{pmatrix}$$

S est donc définie positive si et seulement si $a > 0$ et S_2 définie positive. Donc en utilisant **II 4b** si et seulement si $a > 0, ab - d^2 > 0$ et $\det(S_2) > 0$ or $\det(S_2) = (ab - d^2)(ac - e^2) - (af - de)^2 = a \det(S)$

S est définie positive si seulement si $a > 0, \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0,$

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0$$



À la prochaine

Devoir Surveillé

3 Espaces d'Artin et applications

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?

- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon



Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.

Son nom est lié à la suite de matrices (H_{2^k}) définie de la façon suivante : $H_1 = (1)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$. Elles sont utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Mathématicien du jour

Énoncé : Extrait Centrale 2010, MP

Les calculatrices sont autorisées

Notations :

- $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.
- On fixe un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

Partie I -

I.A - On fixe une application φ de E^2 dans $\mathbb{K}$. On suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E , c'est-à-dire que, pour tout $(x, y, z) \in E^3$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi(x + \alpha y, z) = \varphi(x, z) + \alpha \varphi(y, z)$ et $\varphi(x, z) = \varphi(z, x)$.

I.A.1) Pour tout élément x de E , on note $h(x)$ l'application de E dans E telle que $\forall y \in E$, $h(x)(y) = \varphi(x, y)$.

- Montrer que, pour tout x de E , $h(x)$ est élément du dual de E , noté E^* .
- Montrer que h est une application linéaire de E dans E^* .

I.A.2) Si A est une partie de E , on note $A^{\perp\varphi} = \{x \in E / \forall a \in A \varphi(x, a) = 0\}$. Montrer que $A^{\perp\varphi}$ est un sous-espace vectoriel de E .

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera $A^\perp$ au lieu de $A^{\perp\varphi}$.

I.A.3) On dit que φ est non dégénérée si et seulement si $E^{\perp\varphi} = \{0\}$.

Montrer que φ est non dégénérée si et seulement si h est un isomorphisme.

I.A.4) Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On note $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de e .

a) Montrer que la matrice de h dans les bases e et e^* est :

$$\text{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette dernière matrice sera également appelée la matrice de φ dans la base e et notée $\text{mat}(\varphi, e)$

b) Soit $(x, y) \in E^2$. On note X et Y les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes de x et y dans la base e .

Montrer que $\varphi(x, y) = {}^t X \Omega Y$ où $\Omega = \text{mat}(\varphi, e)$ et où ${}^t X$ désigne la matrice ligne obtenue en transposant X .

I.B - Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E , on note q_φ l'application de E dans $\mathbb{K}$ définie par : $\forall x \in E, q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$. On dit que q_φ est la forme quadratique associée à φ . On note $Q(E)$ l'ensemble des q_φ où φ est une forme bilinéaire symétrique sur E .

I.B.1) Soit $q \in Q(E)$.

Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur E , notée φ , telle que $q = q_\varphi$. On dira que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique q . On dira que q est non dégénérée si et seulement si φ est non dégénérée. Si e est une base de E , on notera $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(\varphi, e)$. On l'appellera la matrice de q dans la base e .

I.B.2) Soit q une forme quadratique sur E . Soit E' un second $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , et soit q' une forme quadratique sur E' .

On appelle isométrie de (E, q) dans (E', q') tout isomorphisme f de E dans E' vérifiant : pour tout $x \in E, q'(f(x)) = q(x)$. On dira que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie de (E, q) dans (E', q') .

Montrer que (E, q) et (E', q') sont isométriques si et seulement si il existe une base e de E et une base e' de E' telles que $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(q', e')$.

I.B.3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Notons $c = (c_1, \dots, c_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$.

$$\text{Pour tout } x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{K}^{2p}, \text{ on pose } q_p(x) = 2 \sum_{i=1}^p x_i x_{i+p}.$$

a) Montrer que q_p est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{2p}$ et calculer $\text{mat}(q_p, c)$.

b) On appelle *espace de Artin* (ou *espace artinien*) de dimension $2p$ tout couple (F, q) , où F est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $2p$, et où q est une forme quadratique sur F telle que (F, q) et $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$ sont isométriques.

Montrer que dans ce cas, q est non dégénérée.

Lorsque $p = 1$, on dit que (F, q) est un plan artinien.

c) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et pour tout

$$x = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}, \text{ on pose } q(x) = \sum_{k=1}^{2p} x_k^2$$

Montrer que $(\mathbb{C}^{2p}, q)$ est un espace de Artin.

d) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}, \text{ on pose } q'(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} x_i^2.$$

Montrer que $(\mathbb{R}^{2p}, q')$ est un espace de Artin.

e) Si (F, q) est un espace de Artin de dimension $2p$, montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de F de dimension p tel que la restriction de q à G est identiquement nulle.

Partie II -

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que φ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E , et on note q sa forme quadratique.

II.A -

II.A.1) Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note encore $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de e . Soit $p \in \{1, \dots, n\}$. On note F l'espace engendré par $e_1, \dots, e_p$.

a) Montrer que $F^\perp$ est l'image réciproque par h de $\text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$, où h est définie au I.A.1.

b) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

c) Montrer que $(F^\perp)^\perp = F$.

II.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

a) Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.

b) Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

II.A.3) Soit F un sous-espace vectoriel de E . On note φ_F la restriction de φ à F^2 . On dira que F est singulier si et seulement si φ_F est dégénérée.

Montrer que F est non singulier si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $F \cap F^\perp = \{0\}$;
- $E = F \oplus F^\perp$;
- $F^\perp$ est non singulier.

II.A.4) On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont orthogonaux si et seulement si pour tout $(x, y) \in F \times G$, $\varphi(x, y) = 0$.

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et non singuliers, montrer que $F \oplus G$ est non singulier.

II.B - Soit q' une seconde forme quadratique sur E dont la forme bilinéaire symétrique associée est notée φ' . Comme au I.A.1, on note, pour tout $(x, y) \in E^2$, $h(x)(y) = \varphi(x, y)$ et $h'(x)(y) = \varphi'(x, y)$.

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On dit que e est q -orthogonale si et seulement si, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.

II.B.1) On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $q(x, y) = x^2 - y^2$ et $q'(x, y) = 2xy$.

Déterminer une base q -orthogonale et une base q' -orthogonale.

II.B.2) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^2$ orthogonale pour q et pour q' définies à la question II.B.1 ?

II.B.3) Supposons que e est à la fois q -orthogonale et q' -orthogonale.

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, e_i est un vecteur propre de $h^{-1} \circ h'$.

II.B.4) On suppose que $h^{-1} \circ h'$ admet n valeurs propres distinctes.

Montrer qu'il existe une base de E orthogonale à la fois pour q et pour q' .

II.C -

II.C.1) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et tel que $x \neq 0$.

On se propose de démontrer qu'il existe un plan $\Pi \subset E$ contenant x et tel que $(\Pi, q|_\Pi)$ soit un plan artinien (où $q|_\Pi$ désigne la restriction de l'application q au plan Π).

a) Démontrer qu'il existe $z \in E$ tel que $\varphi(x, z) = 1$

b) On pose $y = z - \frac{q(z)}{2}x$. Calculer $q(y)$.

c) Conclure.

II.C.2) Soit F un sous-espace vectoriel singulier de E . On suppose que $(e_1, \dots, e_s)$ est une base de $F \cap F^\perp$. On note G un supplémentaire de $F \cap F^\perp$ dans F .

a) Montrer que G est non singulier.

b) Démontrer par récurrence sur la dimension de $F \cap F^\perp$ (en commençant par $\dim(F \cap F^\perp) = 1$, puis $\dim(F \cap F^\perp) > 1$) qu'il existe s plans $P_1, \dots, P_s$ de E tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

1) Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, $(P_i, q/P_i)$ est un plan artinien contenant e_i

2) Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$ avec $i \neq j$, P_i est orthogonal à P_j .

3) Pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$, P_i est orthogonal à G .

II.C.3) Montrer que $\bar{F} = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ est non singulier.

On dira que $\bar{F}$ est un complété non singulier de F .

II.C.4) Montrer que si $q/F = 0$, alors $\dim(F) \leq \frac{n}{2}$.

II.C.5) On suppose que $n = 2p$. Montrer que (E, q) est un espace de Artin si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p tel que $q/F = 0$.

Partie III -

On note $O(E, q)$ l'ensemble des isométries de (E, q) dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes f de E vérifiant :

pour tout $x \in E$, $q(f(x)) = q(x)$.

III.A -

III.A.1) Soit f un endomorphisme de E .

a) Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si, pour tout $(x, y) \in E^2$: $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$.

Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E et si $f \in O(E, q)$, alors $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$.

b) Soit e une base de E . Calculer la matrice de la forme bilinéaire :

$(x, y) \mapsto \varphi(f(x), f(y))$ en fonction de $\text{mat}(f, e)$ et de $\text{mat}(\varphi, e)$.

c) Posons $M = \text{mat}(f, e)$ et $\Omega = \text{mat}(\varphi, e)$.

Montrer que $f \in O(E, q)$ si et seulement si $\Omega = {}^t M \Omega M$.

d) Montrer que si $f \in O(E, q)$, alors $\det(f) \in \{1, -1\}$. On notera :

$O^+(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = 1\}$ et $O^-(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = -1\}$.

III.A.2) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

a) Montrer que $s \in O(E, q)$ si et seulement si F et G sont orthogonaux (pour φ).

b) En déduire que les symétries de $O(E, q)$ sont les symétries par rapport à F parallèlement à $F^\perp$, où F est un sous-espace non singulier de E .

c) Lorsque H est un hyperplan non singulier, on appellera réflexion selon H la symétrie par rapport à H parallèlement à $H^\perp$. Montrer que toute réflexion de E est un élément de $O^-(E, q)$.

d) Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $q(x) = q(y)$ et $q(x - y) \neq 0$.

On note s la réflexion selon $H = \{x - y\}^\perp$. Montrer que $s(x) = y$.

III.B.3) Soit $f \in O(E, q)$. On suppose que pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, on a $f(x) - x \neq 0$ et $q(f(x) - x) = 0$.

On se propose de démontrer que $f \in O^+(E, q)$ et que E est un espace de Artin.

a) Montrer que $\dim(E) \geq 3$.

b) On note $V = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$. Montrer que $q/V = 0$.

c) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$. Notons $H = \{x\}^\perp$. Montrer que q/H n'est pas identiquement nulle.

En déduire qu'il existe $y \in E$ tel que $q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0$.

- d) On note $U = \text{Im}(f - \text{Id}_E)$. Montrer que $q/U = 0$.
- e) Montrer que $U^\perp = V = U$.
- f) En déduire que E est un espace de Artin et que $f \in O^+(E, q)$.

Partie IV -

IV.A - On souhaite démontrer le *théorème de Cartan-Dieudonné*, dont voici l'énoncé : « si $f \in O(E, q)$, f est la composée d'au plus n réflexions, où $n = \dim(E)$, en convenant que Id_E est la composée de 0 réflexion. »

IV.A.1) Montrer le théorème de Cartan-Dieudonné lorsque $n = 1$. On veut ensuite raisonner par récurrence. On suppose donc que $n > 1$ et que le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré en remplaçant E par tout espace vectoriel de dimension $n - 1$.

IV.A.2) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ avec $q(x) \neq 0$.

IV.A.3) Conclure lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $q(f(x) - x) \neq 0$.

IV.A.4) Conclure dans les autres cas.

IV.B - On se propose de démontrer le *théorème de Witt*, dont voici l'énoncé : « soient F et F' deux sous-espaces vectoriels de E tels qu'il existe une isométrie f de $(F, q|_F)$ dans $(F', q|_{F'})$ (la définition d'une isométrie a été donnée au I.B.2). Alors il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g|_F = f$. »

IV.B.1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où F et F' sont non singuliers.

IV.B.2) On suppose que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') = 1$. Soit $x \in F$ avec $x \neq 0$. Posons $y = f(x)$.

a) Montrer que $q(x + y)$ ou $q(x - y)$ est non nul.

b) Montrer le théorème de Witt dans ce cas, en utilisant la question III.A.2-d).

IV.B.3) On suppose maintenant que F et F' sont non singuliers, avec $\dim(F) = \dim(F') > 1$.

a) Montrer qu'il existe F_1 et F_2 non singuliers, tels que $F_1 \perp F_2$ et $F = F_1 \oplus F_2$, avec $\dim(F_1) = \dim(F) - 1$.

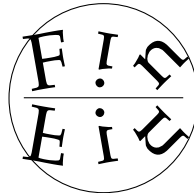
b) Supposons qu'il existe $g \in O(E, q)$ telle que $g|_{F_1} = f|_{F_1}$. Notons $F'_1 = f(F_1)$. Montrer que $f(F_2) \subset F'^{\perp}_1$ et que $g(F_2) \subset F'^{\perp}_1$.

c) Montrer qu'il existe

$$h \in O(F'^{\perp}_1, q|_{F'^{\perp}_1}) \text{ telle que } h|_{g(F_2)} = (f \circ g^{-1})|_{g(F_2)}.$$

d) Montrer qu'il existe $k \in O(E, q)$ telle que $k|_F = f$.

IV.B.4) Démontrer le théorème de Witt.



À la prochaine

Blague du jour

3 amis sont au restaurant. Après leur repas, l'addition s'élève à 30 dhs. Ils donnent chacun 10 dhs. Le serveur s'aperçoit qu'il s'est trompé dans les comptes et qu'en fait ils ne doivent payer que 25 dhs.

Comme 5 dhs n'est pas divisible en 3, il décide de garder 2 dhs de pourboire et de leur rendre le reste. Ainsi les amis se partagent les 3 dhs et ils ont donc payé le repas 3 fois 9dhs = 27 dhs plus les 2 dhs du serveur, cela donne 29 dhs!

Où est passé le dernier dh?



George Boole (1815-1864)

Logicien, mathématicien et philosophe britannique. Il est le créateur de la logique moderne, que l'on appelle algèbre de Boole en son honneur. Autodidacte, il publia ses premiers travaux tout en exerçant son métier d'instituteur et de directeur d'école primaire. En effet, issu d'une famille pauvre, George Boole n'a pas les moyens financiers d'aller à l'université, il fût obligé de travailler pour soutenir sa famille, il devient enseignant à 16 ans. Quatre ans plus tard, il fonde et dirige sa propre école. Ses travaux lui valurent la *Royal Medal* de la *Royal Society*.

Il épouse *Mary Everest*, nièce de *Sir George Everest*, le responsable de la mission cartographique qui baptisa le mont Everest.

Mathématicien du jour

❑ Corrigé : Pr. Boujaïda, CPGE Rabat

Partie I

① ① Élémentaire mon cher Watson !

② Si $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbf{K}$ alors pour tout $y \in E$
 $h(x_1 + \lambda x_2)(y) = \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda \varphi(x_2, y) = (h(x_1) + \lambda h(x_2))(y)$.
 et donc $h(x_1 + \lambda x_2) = h(x_1) + \lambda h(x_2)$.

② $A^{\perp \varphi} = \bigcap_{a \in A} \text{Ker } h(a)$, c'est un sous espace vectoriel de E .

③ $\text{Ker } h = \{x \in E / \forall y \in E, \varphi(x, y) = 0\} = E^{\perp \varphi}$, $\dim E = \dim E^* = n$ donc h est un isomorphisme si et seulement si $E^{\perp \varphi} = \{0\}$.

④ ① Sachant que pour toute forme linéaire f de E , $f = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^*$, Il suffit d'écrire pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$h(e_j) = \sum_{i=1}^n h(e_j)(e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^n \varphi(e_i, e_j) e_i^*$$

N.B : du fait que φ est symétrique, sa matrice $\mathcal{M}_\varphi = (\varphi(e_i, e_j))_{ij}$ est symétrique.

② La matrice de $h(x)$ en tant qu'élément de E^* dans la base e^* est le vecteur colonne $[h(x)]_e = \mathcal{M}_\varphi(h(x), e, e^*) X = \Omega X$, sa matrice en tant que forme linéaire de E dans la base e est le vecteur ligne $\mathcal{M}_\varphi(h(x), e) = {}^t[h(x)]_e = {}^t X \Omega = {}^t X \Omega$

Et ainsi $\varphi(x, y) = h(x)(y) = \mathcal{M}_\varphi(h(x), e) Y = {}^t X \Omega Y$.

N.B : si on note $X = (x_i)_i, Y = (y_i)_i$ et $\Omega = (a_{ij})_{ij}$ alors

$$\varphi(x, y) = {}^t X \Omega Y = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i y_j \quad (*)$$

En outre, puisque $\mathcal{M}_\zeta(h), e, e' = \mathcal{M}_\zeta(\varphi), e$ et que φ est non dégénérée si et seulement si h est un isomorphisme alors

$$\varphi \text{ est non dégénérée} \iff \mathcal{M}_\zeta(\varphi), e \text{ est inversible}$$

- ① Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$, par définition de $\mathcal{Q}(E)$, il existe une forme bilinéaire symétrique φ de E telle que $q = q_\varphi$. Si maintenant ψ est une forme bilinéaire symétrique vérifiant la même condition $q = q_\psi$, l'identité de polarisation donne :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \psi(x, y)$$

et donc $\psi = \varphi$.

- ② On va noter respectivement φ et φ' les formes polaires des formes quadratiques q et q' .

Supposons qu'il existe une isométrie f de (E, q) dans (E', q') . Soit e une base quelconque de E et soit e' son image par l'isomorphisme f .

Pour tout vecteur e_i de e et son image e'_i par f , $q'(e'_i) = q'(f(e_i)) = q(e_i)$ et donc par polarisation

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \varphi'(e'_i, e'_j) = \varphi(e_i, e_j).$$

ce qui signifie que $\mathcal{M}_\zeta(q)', e' = \mathcal{M}_\zeta(q), e$.

Réciproquement, supposons qu'il existe des bases e de E et e' de E' telles que $\mathcal{M}_\zeta(q)', e' = \mathcal{M}_\zeta(q), e$ et notons Ω cette matrice.

Soit f l'unique application linéaire de E dans E' qui transforme e en e' . $\mathcal{M}_\zeta(f), e, e' = I_n$ donc pour tout $x \in E$, si $X =$

$[x]_e$ alors $[f(x)]_{e'} = X$ et par suite $q'(f'(x)) = {}^t X \Omega X = q(x)$.
 f est donc une isométrie de E sur E' .

③ Pour tout $x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbf{K}^{2p}$, $q_p(x) = 2 \sum_{i=1}^p x_i x_{i+p}$.

① On pose pour tout $x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbf{K}^{2p}$ et $y = \sum_{i=1}^{2p} y_i c_i \in \mathbf{K}^{2p}$

$$\varphi_p(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) = \sum_{i=1}^p (x_i y_{i+p} + x_{i+p} y_i)$$

On vérifie que φ_p est une forme bilinéaire symétrique, et que q_p est la forme quadratique qui lui est associée.

La lecture de la matrice de q_p peut être faite directement à partir de l'expression de $\varphi_p(x, y)$ selon la formule (*), question (I.A.4.b).

$$\mathcal{M}_\zeta(q)_p, c = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

On notera dans la suite de ce corrigé J_p cette dernière matrice.

- ② q_p est non dégénérée puisque elle représentée par la matrice inversible J_p ($\det(J_p) = (-1)^p$) dans la base canonique de $\mathbf{K}^{2p}$.

Si maintenant (F, q) est un espace de Artin, il est isométrique à $(\mathbf{K}^{2p}, q_p)$. q et q_p seront donc représentées par une même matrice Ω dans des bases bien choisies de F et de $\mathbf{K}^{2p}$. q_p est non dégénérée donc toutes ses matrices sont inversibles. Ω est donc inversible et par suite q est non dégénérée.

- ③ En remarquant que $\mathcal{M}_\zeta(q, c) = I_{2p}$, il suffit de trouver une base e de $\mathbf{C}^{2p}$ telle que $\mathcal{M}_\zeta(q)_p, e) = I_{2p}$. Ce qui peut nous faire penser à une certaine méthode de Gauss (vue pour les formes quadratiques réelles ... quand même).

$$\begin{aligned} \text{Soit } x &= \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbf{C}^{2p}, \\ q_p(x) &= 2 \sum_{k=1}^p x_k x_{k+p} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p ((x_k + x_{k+p})^2 - (x_k - x_{k+p})^2) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^p (x_k + x_{k+p})^2 + \sum_{k=1}^p (ix_k - ix_{k+p})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (x_k + x_{k+p})^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^{2p} (ix_{k-p} - ix_k)^2 \end{aligned}$$

On considère alors la famille de formes linéaires $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2p})$ définies par

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k + x_{k+p}) \text{ si } k \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ et } \psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ix_{k-p} - ix_k) \text{ si } k \in \llbracket p+1, 2p \rrbracket$$

de telle sorte que $q_p(x) = \sum_{k=1}^{2p} \psi_k(x)^2$. Définitions qu'on peut résumer matriciellement par

$$\text{mat}_{c^*}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_p & iI_p \\ I_p & -iI_p \end{pmatrix}$$

On note P cette dernière matrice.

Procédure de routine (opération par blocs, $L2 \leftarrow L2 - L1$):

$$\begin{vmatrix} I_p & 0 \\ -I_p & I_p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I_p & iI_p \\ I_p & -iI_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_p & iI_p \\ 0 & -2iI_p \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{vmatrix} I_p & iI_p \\ I_p & -iI_p \end{vmatrix} = (-2i)^p$$

Donc $\det P \neq 0$ et par suite Ψ est une base de E^* . Si e

est sa base anté-duale, alors pour tout $x = \sum_{k=1}^{2p} y_k e_k =$

$$\sum_{k=1}^{2p} \psi_k(x) e_k \in E$$

$$q_p(x) = \sum_{k=1}^{2p} y_k^2.$$

et donc $\mathcal{M}_\zeta(q)_p, e) = I_{2p}$ CQFD.

N.B : Rien n'empêche d'utiliser la méthode de Gauss pour une forme quadratique q d'un $\mathbf{C}$ -ev E . Elle permettrait de prouver l'existence d'une base de formes linéaires $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ et de scalaires complexes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(x)^2$$

q est alors non dégénérée si et seulement si tous les coefficients α_k sont non nuls, et dans ce cas en considérant pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un complexe β_k tel que $\beta_k^2 = \alpha_k$, $\psi'_k = \frac{1}{\beta_k} \psi_k$ et e' la base anté-duale de $(\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_n)$, nous aurions

$$\forall x = \sum_{k=1}^n y_k e'_k, q(x) = \sum_{k=1}^n y_k^2$$

Ainsi par "transitivité", si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ et $\dim E$ est paire alors (E, q) est un espace de Artin $\iff q$ est non dégénérée

- ④ Là on se retrouve en terrain connu, celui des formes quadratique réelles.

Il suffit de trouver une base e' de $\mathbf{R}^{2p}$ telle que

$$\mathcal{M}_1(q)_p, e') = \mathcal{M}_1(q)', c) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$$

ou encore une base e' telle que pour tout $x = \sum_{i=1}^{2p} y_i e'_i$,

$$q_p(x) = \sum_{i=1}^p y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} y_i^2. \text{ On reconnaît là l'écriture}$$

canonique d'une forme quadratique de signature (p, p) .
il suffit donc de montrer que la signature de q_p est (p, p) .

$$\text{Soit } x = \sum_{i=1}^{2p} x_i e_i \in \mathbf{R}^{2p}$$

$$q_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (x_i + x_{i+p})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=p+1}^{2p} (x_{i-p} - x_i)^2$$

il reste à justifier que la famille de formes linéaires $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{2p})$ définies par $\psi(x) = x_i + x_{i+p}$ si $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\psi_i(x) = x_{i-p} - x_i$ si $i \in \llbracket p+1, 2p \rrbracket$ est libre. Pour cela, il suffit de justifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{pmatrix}$$

est inversible.

N.B : Là encore, en déployant un raisonnement similaires à celui fait à la fin de la question précédente, on prouve que si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\dim E = 2p$ alors

(E, q) est un espace de Artin $\iff$ la signature de q est (p, p) .

- ⑤ Soit (F, q) un espace de Artin de dimension $2p$, et soit donc f une isométrie de $(\mathbf{K}^{2p}, q_p)$ sur (F, q) .

Le sous espace vectoriel $V = \text{Vect } cp$ de $\mathbf{K}^{2p}$ est de di-

mension p et il vérifie : $\forall x \in V, q_p(x) = 0$.

Son image $f(V)$ est un sous espace vectoriel de F de dimension p (f est un isomorphisme) et elle vérifie : $\forall x \in V, q(f(x)) = q_p(x) = 0$.

Partie IV

- ① ① Soit $\psi \in E^*$. h est un isomorphisme puisque q est non dégénérée, soit donc l'unique vecteur $x \in E$ tel que $\psi = h(x)$.

$$\text{On peut alors écrire } \psi = \sum_{i=1}^n h(x)(e_i) e_i^* = \sum_{i=1}^n \varphi(x, e_i) e_i^* \text{ et}$$

par suite

$$\psi \in \text{Vect}\{e_{p+1}^*, e_{p+2}^*, \dots, e_n^*\} \iff \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \varphi(x, e_i) = 0 \iff$$

$$\text{et donc : } \psi \in \text{Vect}\{e_{p+1}^*, e_{p+2}^*, \dots, e_n^*\} \iff \psi \in h(F^\perp)$$

$$\text{Ainsi } h(F^\perp) = \text{Vect}\{e_{p+1}^*, e_{p+2}^*, \dots, e_n^*\}$$

- ② h est un isomorphisme donc $\dim F^\perp = \dim h(F^\perp) = n - p$. soit

$$\dim F + \dim F^\perp = n$$

- ③ Soit $x \in F$ alors pour tout $y \in F^\perp$, $\varphi(x, y) = 0$ et donc $x \in (F^\perp)^\perp$. Ce qui montre que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Ensuite les relations $\dim F + \dim F^\perp = \dim F^\perp + \dim (F^\perp)^\perp = n$ donnent $\dim F = \dim (F^\perp)^\perp$ et ainsi $(F^\perp)^\perp = F$.

- ② ① Un vecteur de $(F + G)^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de F et à tout vecteur de G donc $(F + G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ et inversement un vecteur qui est à la fois orthogonal à tout vecteur de F et à tout vecteur de G va être orthogonal à tout vecteur de $F + G$, soit $F^\perp \cap G^\perp \subset (F + G)^\perp$.

Alors $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

- ② Il suffit d'appliquer le résultat du a) à $F^\perp$ et $G^\perp$ et de passer ensuite à l'orthogonal.
- ③ Notons que $F^{\perp_{\varphi_F}} = \{x \in F / \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\} = F \cap F^\perp$.
 - [1 $\Rightarrow$ 2)] Supposons que F est non singulier. φ_F est donc non dégénérée et donc d'après (I.A.3), $F^{\perp_{\varphi_F}} = \{0\}$ soit $F \cap F^\perp = \{0\}$.
 - [2 $\Rightarrow$ 3)] Supposons que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Nous avons $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ donc $F \oplus F^\perp = E$.
 - [3 $\Rightarrow$ 4)] Supposons que $F \oplus F^\perp = E$. Alors $F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = \{0\}$ et donc $(F^\perp)^{\perp_{\varphi_{F^\perp}}} = \{0\}$. Alors $\varphi_{F^\perp}$ est non dégénérée et donc $F^\perp$ est non singulier.
 - [4 $\Rightarrow$ 1)] Supposons que $F^\perp$ est non singulier. L'implication 1 $\Rightarrow$ 4) ayant été justifiée, il suffit de l'appliquer à $F^\perp$ pour s'assurer que F est non singulier.
- ④ Supposons que F et G sont orthogonaux et non singuliers.
 Notons que le fait que F et G soient orthogonaux signifie que $F \subset G^\perp$. Puisque $G \cap G^\perp = \{0\}$ alors $F \cap G = \{0\}$ et donc la somme $F + G$ est bien directe.
 Soit maintenant $x \in (F \oplus G) \cap (F \oplus G)^\perp$, et posons $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.
 $(F \oplus G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ donc $x \in F^\perp \cap G^\perp$.
 $x \in F^\perp$ donc pour tout $u \in F$, $\varphi(x, u) = \varphi(x_F, u) = 0$, et donc $x_F \in F \cap F^\perp$. F est non singulier donc $x_F = 0$.
 De même $x \in G^\perp$ donne $x_G = 0$.
 Alors $x = 0$ et donc $(F \oplus G) \cap (F \oplus G)^\perp = \{0\}$. $F \oplus G$ est donc non singulier.

- ① Avec les formes quadratiques de $\mathbf{R}^2$, $q(x, y) = 2xy$ et $q'(x, y) = x^2 - y^2$, nous avons
 $\varphi((x, y), (x', y')) = xy' + yx'$ et $\varphi'((x, y), (x', y')) = xx' - yy'$
 $((1, 1), (1, -1))$ est une base q -orthogonale de $\mathbf{R}^2$,
 $((1, 0), (0, 1))$ en est une base q' -orthogonale.

- ② Soit $e_1 = (a, b)$ un vecteur non nul de $\mathbf{R}^2$ et voyons s'il peut exister un vecteur $e_2 = (x, y)$ tel que (e_1, e_2) soit une base de $\mathbf{R}^2$ à la fois q -orthogonale et q' -orthogonale. On devrait avoir

$$(S) \begin{cases} bx + ay = 0 \\ ax - by = 0 \end{cases}$$

ce système linéaire a pour déterminant $\delta = -b^2 - a^2$. e_1 est non nul donc $\delta \neq 0$. (S) a donc pour unique solution la solution nulle.

Ainsi il n'existe aucune base de $\mathbf{R}^2$ qui soit à la fois q -orthogonale et q' -orthogonale.

- ③ D'après des résultats démontrés dans la premières parties pour toute base e de E , $\mathcal{M}_\ell(h), e, e^* = (\varphi(e_i, e_j))_{ij}$.
 On voit ainsi que e est une base q -orthogonale si et seulement si $\mathcal{M}_\ell(h), e, e^*$ est diagonale. Plus exactement e est q -orthogonale si et seulement si

$$\mathcal{M}_\ell(h), e, e^* = \text{diag}(q(e_1), q(e_2), \dots, q(e_n)).$$

Notons aussi que puisque q est non dégénérée $\mathcal{M}_\ell(h), e, e^*$ est inversible et donc dans le cas où e est une base q -orthogonale alors $q(e_i) \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Supposons que e est une base à la fois q -orthogonale et q' -orthogonale de E alors

$$\mathcal{M}_\ell(h)^{-1} \circ h', e = \mathcal{M}_\ell(h)^{-1}, e^*, e \mathcal{M}_\ell(h)', e, e^* = \text{diag} \left(\frac{q'(e_1)}{q(e_1)}, \frac{q'(e_2)}{q(e_2)}, \dots, \frac{q'(e_n)}{q(e_n)} \right)$$

$M_{\ell}(h)^{-1} \circ h', e)$ est diagonale donc la base e est formée de vecteurs propres de $h^{-1} \circ h'$.

- ④ Supposons que $h^{-1} \circ h'$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, il est donc diagonalisable. Soit e une base de diagonalisation et posons pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $h^{-1} \circ h'(e_i) = \lambda_i e_i$ ou encore $h'(e_i) = \lambda_i h(e_i)$. Vu la définition des applications h et h' ceci signifie que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in E, \varphi'(x, e_i) = \lambda_i \varphi(x, e_i)$$

Ainsi pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, un vecteur x qui serait orthogonal aux vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_p$ pour q le serait aussi pour q' .

Posons alors pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $V_p = \text{Vect } e_p$. Si $p \geq 2$ alors $V_p \cap V_{p-1}^\perp$ est non nul, car sinon nous aurions $\dim V_p + \dim V_{p-1}^\perp \leq n$ soit $p + (n - p + 1) = n + 1 \leq n$. Considérons alors une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ telle que

$$\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_p \in V_p \cap V_{p-1}^\perp \setminus \{0\} & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

Pour tout $p \geq 2$, u_p est orthogonal aux vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_{p-1}$ pour q donc aussi pour q' et donc il est orthogonal aux vecteurs $u_1, u_2, \dots, u_{p-1}$ (car ils sont tous dans $V_{p-1} = \text{Vect } e_{p-1}$) pour q et pour q' . Au final la famille $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est à la fois q -orthogonale et q' -orthogonale.

- ① $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $q(x) = 0$. (on dit que x est un vecteur q -isotrope).

- ① q est non dégénérée, donc $x \notin E^\perp$, il existe donc au moins un vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(x, v) \neq 0$. En posant $z = (1/\varphi(x, v))v$ nous avons $\varphi(x, z) = 1$.

- ② Avec $y = z - (q(z)/2)x$ nous avons

$$q(y) = q(z) + \frac{q(z)^2}{4}q(x) - 2 \cdot \frac{q(z)}{2} \cdot \varphi(z, x) = 0$$

- ③ $\varphi(x, y) = \varphi(x, z) - (q(z)/2)q(x) = \varphi(x, z) = 1$. Donc y est non colinéaire à x car sinon nous aurions $\varphi(x, y) = 0$. Soit Π le plan engendré par x et y . Pour tout vecteur $v = \alpha x + \beta y \in \Pi$

$$q(v) = \alpha^2 q(x) + \beta^2 q(y) + 2\alpha\beta\varphi(x, y) = 2\alpha\beta$$

Alors $(\Pi, q|_\Pi)$ est un espace de Artin.

- ② F un sous-espace vectoriel singulier de E et $(e_1, e_2, \dots, e_s)$ une base de $F \cap F^\perp$. G un supplémentaire de $F \cap F^\perp$ dans F : $F = (F \cap F^\perp) \oplus G$.

- ① $F^\perp = (F^\perp + F) \cap G^\perp$ donc $F \cap F^\perp = [F \cap (F^\perp + F)] \cap G^\perp = F \cap G^\perp$.

Comme $G \subset F$ alors $G \cap G^\perp \subset F \cap F^\perp$, mais $G \cap G^\perp \subset G$ et $G \cap (F \cap F^\perp) = \{0\}$ donc $G \cap G^\perp = \{0\}$.

D'après la question (II.A.3), G est non singulier.

- ② Si $s = 1$, $F \cap F^\perp = \mathbf{K}e_1$. $e_1 \in F^\perp$ donc $\varphi(e_1, e_1) = 0$ et pour tout $v \in G$, $\varphi(e_1, v) = 0$. Donc $q(e_1) = 0$ et $e_1 \in G^\perp$. Considérons la restriction q_1 de q sur $G^\perp$.

D'après la question (II.C.1) il existe un plan artinien P_1 pour q_1 dans $G^\perp$ contenant e_1 . P_1 est naturellement orthogonal à G pour q . Ce qu'on nous voulions démontrer.

Si $s \geq 2$, supposons que la propriété est vraie pour tout sous-espace F' tel que $\dim F' \cap F'^\perp = s - 1$.

Posons $F' = \text{Vect } e_{s-1}$ et $E' = (G \oplus \mathbf{K}e_s)^\perp$.

$G \oplus \mathbf{K}e_s \subset F$ donc $F^\perp \subset E' \cdot F' \subset F \cap F^\perp \subset F^\perp$ donc $F' \subset E'$.

De plus $F' \subset F^\perp$ et $F^\perp \subset F'^\perp$ donc $F' \subset F'^\perp$ soit $F' \cap F'^\perp = F'$. $\{0\}$ est le seul supplémentaire de $F' \cap F'^\perp$ dans F' .

$\dim F' \cap F'^\perp = s - 1$ donc par hypothèse de récurrence il existe des plans artiniens $P_1, P_2, \dots, P_{s-1}$ dans E' qui sont deux à deux orthogonaux et qui pour chaque $k \in \llbracket 1, s-1 \rrbracket$, P_k contient e_k .

Ses plans, puisqu'ils sont dans E' , sont tous orthogonaux à G et au vecteur e_s .

Considérons maintenant le sous-espace $E'' = (G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_{s-1})^\perp$. $e_s \in E''$ et $q(e_s) = 0$ donc il existe un plan artinien P_s de E'' contenant e_s .

Finalement

- [•] Pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, P_k est un plan artinien contenant e_k .
- [•] Les plans P_k sont deux à deux orthogonaux
- [•] Ils sont tous orthogonaux à G .

CQFD

③ $\bar{F} = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s$, les plans P_k étant deux à deux orthogonaux et tous orthogonaux à G .

Soit $x \in \bar{F} \cap \bar{F}^\perp$ et posons

$$x = y + \sum_{k=1}^s x_k, \quad \text{où } y \in G \text{ et } x_k \in P_k \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, s \rrbracket.$$

Soit $v \in G$. $x \in \bar{F}^\perp \subset G^\perp$, donc $\varphi(x, v) = 0$. Les plans P_k sont orthogonaux à G donc pour tout $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\varphi(x_k, v) = 0$.

On en déduit que $\varphi(y, v) = 0$ et ceci pour tout $v \in G$. Alors $y \in G \cap G^\perp$ et donc $y = 0$.

Ensuite, soit pour $k \in \llbracket 1, s \rrbracket$, un vecteur quelconque v_k de P_k , alors $\varphi(x, v_k) = 0$ puisque $\bar{F}^\perp \subset P_k^\perp$, et $\varphi(x_i, v_k) = 0$ si $i \neq k$ puisque dans ce cas P_k est orthogonal à P_i .

D'où $\varphi(x_k, v_k) = 0$, et ceci pour tout $v_k \in P_k$. Mais $(P_k, q|_{P_k})$ est artinien donc $q|_{P_k}$ est non dégénérée, par suite $x_k = 0$.

Finalement $x = 0$, et donc $\bar{F} \cap \bar{F}^\perp = \{0\}$.

④ Notons qu'en général :

- [•] $\bar{F} = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s$ donc $\dim \bar{F} = \dim G + 2s = \dim F + \dim F \cap F^\perp$.

- [•] $q|_F = 0 \iff \varphi|_{F \times F} = 0 \iff \forall (u, v) \in F^2, \varphi(u, v) = 0 \iff F \subset F^\perp$.

Ainsi si $q|_F = 0$, alors $\dim F \leq n - \dim F$ et donc $\dim F \leq n/2$.

⑤ Supposons que $n = 2p$.

Supposons que (E, q) est un espace de Artin, il existe donc une base e de E telle que

$$\forall x = \sum_{i=1}^{2p} x_i e_i \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^p x_i x_{i+p}$$

Si on pose $F = \text{Vect } e_p$, on voit alors que pour tout $x \in F$, $q(x) = 0$. $\dim F = p$ et nous avons bien $q|_F = 0$.

Réciproquement s'il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p et tel que $q|_F = 0$.

$F \subset F^\perp$ donc $F \cap F^\perp = F$ et donc $\bar{F} = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_p$ où $P_1, P_2, \dots, P_p$ sont des plans artiniens deux à deux orthogonaux. Nous avons alors $\dim \bar{F} = 2p$ et donc $\bar{F} = E$.

Soit pour tout k une base (e_k, u_k) de P_k telle que $q(e_k) = q(u_k) = 0$ et $\varphi(e_k, u_k) = 1$.
 $b = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_p)$ est une base de E , puisque $E = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_p$.

Maintenant pour tout $x = \sum_{k=1}^p (x_k e_k + x_{k+p} u_k) \in E$, les vecteurs $x_k e_k + x_{k+p} u_k$ étant deux à deux orthogonaux (car les plans P_k le sont) on aura

$$q(x) = \sum_{k=1}^p q(x_k e_k + x_{k+p} u_k) = 2 \sum_{k=1}^p x_k x_{k+p}$$

Ainsi E est un espace de Artin.

N.B : avec $\dim E = 2p$ et $\dim F = p$ et donc aussi $\dim F^\perp = p$

$$q|_F = 0 \iff F \subset F^\perp \iff F = F^\perp$$

Résumons : Si E est un $\mathbf{K}$ -ev de dimension $2p$ muni d'une forme quadratique q , alors

$$(E, q) \text{ est un espace de Artin} \iff \begin{cases} q \text{ est non dégénérée} \\ \text{il existe un sev } F \text{ de } E \text{ tel que } F^\perp = F \end{cases}$$

Partie II

① ① L'identité de polarisation est votre amie

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Soient ensuite $f \in \mathcal{O}(E, q)$ et un sous-espace vectoriel F de E .

Soient $y_1 \in f(F^\perp)$ et $y_2 \in f(F)$, et soient $x_1 \in F^\perp$ et $x_2 \in F$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Nous avons

alors

$$\varphi(y_1, y_2) = \varphi(x_1, x_2) = 0$$

donc $f(F^\perp) \subset f(F)^\perp$. Comme f est **par définition** un automorphisme alors $\dim f(F^\perp) = \dim F^\perp = n - \dim F$ et $\dim f(F)^\perp = n - \dim f(F) = n - \dim F$

et ainsi $\dim f(F^\perp) = \dim f(F)^\perp$. Alors $f(F^\perp) = f(F)^\perp$

N.B : Si jamais F est stable par f (et donc $f(F) = F$), ce qui précède démontre que $f(F^\perp) = F^\perp$.

② Posons pour tout $(x, y) \in E$, $\psi(x, y) = \varphi(f(x), f(y))$, $M = \mathcal{M}_\zeta(f, e)$ et $\Omega = \mathcal{M}_\zeta(q, e)$.

Soient $x, y \in E$ et soient $X = [x]_e$ et $Y = [y]_e$, nous avons alors

$$\psi(x, y) = \varphi(f(x), f(y)) = {}^t(MX)\Omega(MY) = {}^tX^t M \Omega M Y$$

donc $\mathcal{M}_\zeta(\psi, e) = {}^t M \Omega M$.

③ $f \in \mathcal{O}(E, q) \iff \psi = \varphi \iff \mathcal{M}_\zeta(\psi, e) = \mathcal{M}_\zeta(\varphi, e) \iff \Omega = {}^t M \Omega M$.

④ Si $f \in \mathcal{O}(E, q)$ alors ${}^t M \Omega M = \Omega$ et en passant au déterminant on aura $\det(M)^2 \det(\Omega) = \det(\Omega)$. q est non dégénérée donc Ω est inversible et donc $\det(M)^2 = 1$.

Ainsi $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

② F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . s la symétrie de E d'axe F et de direction G .

① Supposons que $s \in \mathcal{O}(E, q)$.

Pour tout $x \in F$ et $y \in G$, $\varphi(s(x), s(y)) = \varphi(x, -y) = -\varphi(x, y)$ et donc $\varphi(x, y) = -\varphi(x, y)$ soit $\varphi(x, y) = 0$. F et G sont donc orthogonaux.

Réciproquement, supposons que F et G sont orthogonaux.

Soit $x \in E$. $x + s(x) \in F$ et $x - s(x) \in G$ donc $\varphi(x + s(x), x - s(x)) = 0$, ce qui donne $\varphi(x, x) - \varphi(s(x), s(x)) = 0$ ou encore $q(s(x)) = q(x)$.

Alors $f \in \mathcal{O}(E, q)$.

- ② Une symétrie est dans $\mathcal{O}(E, q)$ si et seulement si son axe F et sa direction G sont orthogonaux, F et G étant naturellement supplémentaires nous aurions forcément $G = F^\perp$ (car $G \subset F^\perp$ et $\dim G = \dim F^\perp = n - \dim F$).
- ③ Soit s la réflexion de E d'axe H . Soit e un vecteur directeur de la droite $H^\perp$ et $(e_2, e_3, \dots, e_n)$ une base de H . H est non singulier donc H et $H^\perp$ sont supplémentaires et donc $b = (e, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{M}(s, b) = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.
Alors $\det(s) = -1$ et donc $s \in \mathcal{O}^-(E, q)$.
- ④ $x, y \in E$ tels que $q(x) = q(y)$ et $q(x - y) \neq 0$. Soit $H = \{x - y\}^\perp = (\mathbf{K} \cdot (x - y))^\perp$.
Notons que $q(x - y) \neq 0$ implique que $H^\perp \cap H = \{0\}$ et donc que H est non singulier.
Soit maintenant s la réflexion d'axe H .
 $x = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x - y)$ avec

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x - y) \in H^\perp \\ \frac{1}{2}(x + y) \in H \text{ car } \varphi(x - y, x + y) = q(x) - q(y) = 0 \end{cases}$$
donc $s(x) = \frac{1}{2}(x + y) - \frac{1}{2}(x - y) = y$

N.B : si $x \neq y$, $q(x) = q(y)$ mais $q(x - y) = 0$, il ne peut exister de réflexions s de E telle que $s(x) = y$.

En effet, si une telle réflexion existait et H désignait son axe, alors $s(x - y) = y - s^2(x) = y - x$ et donc $x - y \in H^\perp$ ou encore $H^\perp = \mathbf{K} \cdot (x - y)$. Mais comme $q(x - y) = 0$, alors $x - y \in \{x - y\}^\perp = H$. H est donc non singulier, il ne peut être l'axe d'une symétrie orthogonale.

- ① E est un espace de Artin de dimension $2p$ et F un sous-espace de E tel que $q|_F = 0$.

Soit $f \in \mathcal{O}(E, q)$ tel que $f(F) = F$.

On reprend la base $b = (e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_p)$ construite dans (II.C.5) et qui vérifie pour rappel les conditions suivantes

- $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de F
- Les plans $P_k = \text{Vect}\{e_k, u_k\}$ sont 2 à 2 orthogonaux
- $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, q(e_k) = q(u_k) = 0$ et $\varphi(e_k, u_k) = 1$.

Dans cette base, les matrices Ω et M de φ et de f sont de la forme (F étant stable par f)

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ où } A, B, C \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K}).$$

D'après (III.A.1.c), nous avons $\Omega = {}^t M \Omega M$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^t C A \\ {}^t A C & {}^t B C + {}^t C B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que ${}^t C A = I_p$ et donc

$$\det(f) = \det(A) \det(C) = \det({}^t C) \det(A) = \det({}^t C A) = 1.$$

Alors $f \in \mathcal{O}^+(E, q)$.

- ② F un sous-espace de E tel que $\bar{F} = E$ et $f \in \mathcal{O}(E, q)$ telle que

$$f|_F = id_F.$$

Soit $s = \dim F \cap F^\perp$.

Il existe par définition du complété $\bar{F}$ des plans artiniens deux à deux orthogonaux et tous orthogonaux à G tels que $E = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s$.

G est non singulier donc $G \oplus G^\perp = E$. Le sous-espace $H = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_s$ est inclus dans $G^\perp$, car les plans P_k le sont tous. De plus $\dim G^\perp = \dim H = n - \dim G$, donc $G^\perp = H = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_s$.

Maintenant, $f|_G = id_G$, en particulier $f(G) = G$ et donc $f(H) = H$. G et H sont ainsi des sous-espaces supplémentaires dans E , tous les deux stables par f donc $\det(f) = \det(f|_G) \det(f|_H) = \det(f|_H)$.

H est un espace de Artin puisque $F \cap F^\perp \subset H$, $\dim F \cap F^\perp = \frac{1}{2} \dim H$ et $q|_{F \cap F^\perp} = 0$. De plus $f|_F = id_F$ donc $f(F \cap F^\perp) = F \cap F^\perp$. D'après la question précédente nous avons donc $\det(f|_H) = 1$.

Par suite $\det(f) = 1$.

Une deuxième façon : sans utiliser la question précédente.

Il existe une base $b = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2s}, e_1, \dots, e_s, u_1, \dots, u_s)$ de E telle que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2s})$ soit une base de G , $(e_1, e_2, \dots, e_s)$ une base de $F \cap F^\perp$ et pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, (e_k, u_k) une base de P_k avec $q(e_k) = q(u_k) = 0$ et $\varphi(e_k, u_k) = 1$.

Dans cette base, les matrices de φ et de f sont de la forme

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & I_s & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} I_{n-2s} & 0 & A \\ 0 & I_s & B \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

La matrice Δ étant celle de $\varphi|_{G \times G}$, la forme de M est due au fait que $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-2s}, e_1, \dots, e_s)$ est une base de F et que $f|_F = id_F$.

La relation $\Omega = {}^t M \Omega M$ donne ici

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ {}^t A \Delta & {}^t C & {}^t B C + {}^t C B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & I_s & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier $C = I_s$ et donc $\det f = \det C = 1$.

- ③ $f \in \mathcal{O}(E, q)$ tel que : $\forall x \in E, q(x) \neq 0 \implies (f(x) - x \neq 0 \text{ et } q(f(x) - x) = 0)$.

F un sous-espace de E stable par f .

- ① Puisque q est non dégénérée, il existe au moins un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$.

$q(x - f(x)) = 0$ donc forcément la famille $(x, x - f(x))$ est libre (et donc déjà $\dim E \geq 2$).

Ensuite $q(x - f(x)) = 0$ donc $x - f(x)$ est orthogonal à lui même. De plus

$0 = q(x - f(x)) = q(x) + q(f(x)) - 2\varphi(x, f(x)) = 2(q(x) - \varphi(x, f(x)))$ donc $\varphi(x, f(x)) = q(x)$. On en déduit que $\varphi(x, x - f(x)) = 0$, et donc que $x - f(x)$ est aussi orthogonal à x .

Alors $x - f(x) \in \text{Vect}\{x, f(x) - x\}^\perp$ avec $x - f(x) \neq 0$. q est non dégénérée donc forcément $\text{Vect}\{x, f(x) - x\}$ est inclus strictement dans E .

Alors $\dim E \geq 3$.

- ② $V = \text{Ker}(f - id_E)$.

Soit $x \in V$, alors $f(x) - x = 0$ et donc par contre-apposée de l'hypothèse faite sur f , $q(x) = 0$. Ainsi

$$q|_V = 0.$$

- ③ Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et soit $H = \{x\}^\perp$.
 $\dim H \geq n - 1$ selon que $x = 0$ ou non. Comme $n \geq 3$
alors $\dim H > n/2$. On ne peut donc avoir $q|_H = 0$,
selon (II.4.C).

Soit maintenant $y \in H$ tel que $q(y) \neq 0$. $x \in H^\perp$ donc
 $\varphi(x, y) = 0$ et donc $q(x + y) = q(x) + q(y) = q(y)$. De
même $q(x - y) = q(y)$.

- ④ $U = \text{Im}(f - id_E)$.

Soit $z \in U$ et soit donc $x \in E$ tel que $z = f(x) - x$.

Si $q(x) \neq 0$ alors $q(z) = q(f(x) - x) = 0$.

Si $q(x) = 0$ alors il existe $y \in E$ tel que $q(x + y) =$
 $q(x - y) = q(y) \neq 0$.

$q(y) \neq 0$ donc $q(f(y) - y) = 0$.

$q(x + y) \neq 0$ donc $q(f(x + y) - (x + y)) = q(z + f(y) -$
 $y) = 0$ et donc $q(z) + 2\varphi(z, f(y) - y) = 0$.

De même $q(x - y) \neq 0$ donne $q(z) - 2\varphi(z, f(y) - y) = 0$.
La somme de ces deux dernières relations donne $q(z) =$
 0 .

N.B : Nous avons ainsi démontré qu'en fait : $\forall x \in$
 $E, q(f(x) - x) = 0$.

- ⑤ $q|_U = q|_V = 0$ donc $\dim U \leq n/2$ et $\dim V \leq n/2$.
D'après la formule du rang $\dim U + \dim V = n$ donc n
est forcément paire et $\dim U = \dim V = n/2$.

$q|_U = 0$ donc $U \subset U^\perp$, $\dim U^\perp = n - \dim U = n/2 =$
 $\dim U$ donc $U^\perp = U$.

Soient ensuite $z \in U$ et $x \in V$. $f(x) = x$ et il existe $y \in E$
tel que $z = f(y) - y$.

$\varphi(z, x) = \varphi(f(y) - y, x) = \varphi(f(y), f(x)) - \varphi(y, x) = 0$.
Donc $V \subset U^\perp$. L'égalité des dimensions donne alors
 $V = U^\perp$.

- ⑥ E est de dimension paire et V est un sev de E de dimen-
sion $n/2$ tel que $q|_V = 0$. D'après (II.C.5), E est un espace
de Artin.

De plus $V = \text{Ker}(f - id_E)$ donc $f(V) = V$ et donc
d'après (III.B.1) $f \in \mathcal{O}^+(E, q)$.

Partie III

N.B : Il est aisé de vérifier que $(\mathcal{O}(E, q), \circ)$ est un
groupe.

Si F est un sous-espace non singulier de E , on notera dans la suite
 s_F la symétrie orthogonale de E d'axe F .

- ① Si $n = 1$, posons $E = \mathbf{K}e$. Soit f un automorphisme de E et
posons $f(e) = \lambda e$. $q(f(e)) = q(e)$ si seulement si $\lambda^2 = 1$, soit
 $\lambda = \pm 1$. Dans ces cas $f = \pm id_E$. Les deux endomorphismes
 id_E et $-id_E$ sont effectivement des isométries de E , ce sont
donc les seules. $-id_E$ est la réflexion de E d'axe $\{0\}$.

- ② Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$ et $q(x) \neq 0$.

$q(x) \neq 0$ donc $H = (\mathbf{K}x)^\perp$ est un hyperplan non singulier,
la forme quadratique $q|_H$ est donc non dégénérée. $\mathbf{K}x$ est sta-
ble par f donc H est stable par f . Soit f' l'endomorphisme
induit par f sur H . f' est un automorphisme de H et pour
tout $x \in H$, $q|_H(f'(x)) = q(f(x)) = q(x) = q|_H(x)$. Donc
 $f' \in \mathcal{O}(H, q|_H)$.

Par hypothèse de récurrence, f' est la composée d'au plus
 $n - 1$ réflexions $s'_{H'_1}, s'_{H'_2}, \dots, s'_{H'_r}$ de H .

Posons pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $H_k = Kx \oplus H'_k$. Kx et H'_k sont orthogonaux et tous les deux non singuliers donc H_k est un hyperplan non singulier de E (d'après (II.A.4)).

Nous avons ensuite

$$\begin{cases} s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_r}(x) = x = f(x) \\ \forall y \in H, s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_r}(y) = s'_{H'_1} \circ \cdots \circ s'_{H'_r}(y) = f'(y) = f(y) \end{cases}$$

donc $f = s_{H_1} \circ \cdots \circ s_{H_r}$. f est ici la composée d'au plus $n - 1$ réflexions de E .

- ③ Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $q(x - f(x)) \neq 0$.

Nous avons $q(f(x)) = q(x)$ et $q(f(x) - x) \neq 0$ donc d'après (III.A.2.d), la réflexion s_H où $H = \{f(x) - x\}^\perp$ vérifie $s_H(f(x)) = x$.

Posons $g = s_H \circ f$. Alors $g \in O(E, q)$ et $g(x) = x$ avec $q(x) \neq 0$. Nous retrouvons les hypothèses du cas précédent. Il existe donc au plus $n - 1$ réflexions $s_{H_1}, s_{H_2}, \dots, s_{H_r}$ de E telle que $g = s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \cdots \circ s_{H_r}$.

Sachant que $s_H^2 = id_E$, nous avons donc $f = s_H \circ s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \cdots \circ s_{H_r}$.

Alors f est la composée d'au plus n réflexions.

- ④ Le cas restant : il n'existe aucun vecteur $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$ et $(f(x) = x \text{ ou } q(x - f(x)) \neq 0)$.
Autrement dit : $\forall x \in E, q(x) \neq 0 \implies f(x) - x \neq 0$ et $q(f(x) - x) = 0$

Nous retrouvons ainsi les hypothèses de la question (III.B.3). Alors E est un espace de Artin et le sous-espace $U = \text{Ker}(f - id_E) = \text{Im}(u - id_E)$ est de dimension $p = n/2$ et vérifie $q|_U = 0$. De plus $n \geq 3$ donc en fait $n \geq 4$ et $p \geq 2$.

Soit (e_1, e_2) une famille libre de U . $U = \text{Im}(f - id_E)$ donc il existe des vecteurs v_1 et v_2 dans E tel que $(f - id_E)(v_1) = e_1$ et $(f - id_E)(v_2) = e_2$.

(v_1, v_2) est une famille libre car sinon son image par $f - id_E$, ie (e_1, e_2) serait liée.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ des scalaires tels que

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 = 0$$

Puisque $e_1, e_2 \in \text{Ker}(f - id_E)$ en appliquant $f - id_E$ à cette relation nous obtenons $\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 = 0$ et donc $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Par suite nous avons aussi $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

La famille $v = (e_1, e_2, v_1, v_2)$ est libre. Considérons alors le sous-espace $F = \text{Vect}(v)$. Nous avons

$f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2, f(v_1) = e_1 + v_1$ et $f(v_2) = e_2 + v_2$ donc F est stable par f . Soit f' l'endomorphisme induit par f sur F . La matrice de f' dans la base v de F est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de rapidement voir que $\text{Ker}(f' - id_F) = \text{Im}(f' - id_F) = \text{Vect}\{e_1, e_2\}$. Notons U' ce sous-espace.

$U' \subset U$ donc $q|_{U'} = 0$. Ce qui permet d'affirmer que $\forall x \in F, q(x) \neq 0 \implies x \notin U' \implies f'(x) - x \neq 0$ et $q(x - f'(x)) = 0$

À son tour f' vérifie les mêmes hypothèses que vérifiait l'isométrie f de E donc $(F, q|_F)$ est un espace de Artin. $q|_F$ est non dégénérée donc F est non singulier et par suite $F \oplus F^\perp = E$.

Les vecteurs v_1 et v_2 ayant rempli leurs mission, oublions les et considérons plutôt deux vecteurs u_1 et u_2 tels que

(e_1, e_2, u_1, u_2) soit une base "artinienne" de F , ie telle que $q(u_1) = q(u_2) = 0$, $\varphi(e_1, u_1) = \varphi(e_2, u_2) = 1$ et $\text{Vect}\{e_1, u_1\} \perp \text{Vect}\{e_2, u_2\}$ $f(u_1) - u_1$ et $f(u_2) - u_2$ sont des vecteurs de U' donc on peut écrire

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 + \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 \\ f(u_2) = u_2 + \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 \end{cases}$$

$\varphi(f(u_1), u_1) = q(u_1) = 0$ donne $\alpha_1 = 0$ et de même $\beta_2 = 0$.

$\varphi(f(u_1), f(u_2)) = \varphi(u_1, u_2) = 0$ donne $0 = \varphi(u_1 + \beta_1 e_2, u_2 + \alpha_2 e_1) = \alpha_2 + \beta_1$.

Notre écriture devient alors

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 + \alpha e_2 \\ f(u_2) = u_2 - \alpha e_1 \end{cases} \quad \text{où } \alpha \neq 0 \text{ car } u_1 \notin U'$$

Soit maintenant le sous-espace $G_1 = \text{Vect}\{e_2, u_2\}^\perp$ de E (noter qu'alors $e_1, u_1 \in G_1$) et posons $g = s_{G_1} \circ f$.

F est stable par f et par s_{G_1} donc stable par g et la matrice de l'isométrie g' induite par g sur F dans la base $u = (e_1, e_2, u_1, u_2)$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

g' est la symétrie orthogonale de F d'axe $\text{Vect}\{e_1, e_2\}$ et de direction $\text{Vect}\{e_3, e_4\}$ (diagonaliser B pour le voir) avec

$$\begin{cases} e_1 = e_1 - \alpha e_2 + 2u_1 & \text{et} & e_2 = e_1 + \alpha e_2 - 2u_1 \\ e_3 = \alpha e_1 + e_2 + 2u_2 & \text{et} & e_4 = \alpha e_1 - e_2 + 2u_2 \end{cases}$$

Les vecteurs e_k sont choisis non isotropes et formant une base orthogonale de F .

Si nous posons $G_2 = \text{Vect}\{e_3, e_4\}^\perp$ alors $(s_{G_2} \circ g)/F = id_F$.

Passons à $F^\perp$ maintenant. F est stable par g donc $F^\perp$ aussi.

Par hypothèse de récurrence l'isométrie g'' induite par g sur $F^\perp$ est la composée d'au plus $n - 4$ réflexions $s_{H'_1}, s_{H'_2}, \dots, s_{H'_r}$ de $F^\perp$. Posons alors pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$ $H_k = H'_k + F$. H'_k et F sont non singuliers et orthogonaux ($H'_k \subset F^\perp$), donc H_k est non singulier. C'est aussi un hyperplan de E , soit donc la réflexion s_{H_k} de E d'axe H_k . et posons $h = s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \dots \circ s_{H_r}$. Nous avons alors

$$\begin{cases} \forall x \in F^\perp, s_{G_2} \circ g(x) = g(x) = h(x) \\ \forall x \in F, s_{G_2} \circ g(x) = x = h(x) \end{cases}$$

car si $x \in F^\perp$, nous avons $F^\perp \subset G_2$ et $g(x) \in F^\perp$ donc $s_{G_2} \circ g(x) = g(x)$.

Et si $x \in F$, alors pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $x \in H_k$ donc $s_{H_k}(x) = x$ et donc $h(x) = x$.

Ainsi $s_{G_2} \circ g = h$, soit $s_{G_2} \circ s_{G_1} \circ f = s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \dots \circ s_{H_r}$, ou encore

$$f = s_{G_1} \circ s_{G_2} \circ s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \dots \circ s_{H_r}$$

Il suffit ensuite de voir que les symétries s_{G_1} et s_{G_2} sont chacune la composée de deux réflexions (par exemple $s_{G_2} = s_{\{e_1\}^\perp} \circ s_{\{e_1\}^\perp}$) pour conclure que f est la composée d'au plus n réflexions.

MAKING OF : Il s'agissait d'imiter la démarche suivie dans les cas précédents, donc de trouver une symétrie orthogonale s_G telle que $H = \text{Ker}(s_G \circ f - id_E)$ soit non nul et d'appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par $s_G \circ f$ sur $H^\perp$ (forcément stable par $s_G \circ f$).

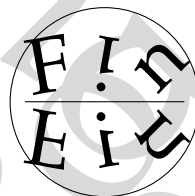


En aucun cas S_G ne devrait être une réflexion car dans ce cas un vecteur non nul x de H , va vérifier $s_G \circ f(x) = x$ donc $f(x) = s_G(x)$ et donc $f(x) - x \in G^\perp$, mais $f(x) - x$ est isotrope et donc $G^\perp \subset G$. G est donc non singulier et ne peut donc être l'axe d'une réflexion. Noter que de toute façon, on aurait toujours $f(x) - x \in G^\perp$ si $s_G \circ f(x) = x$, et donc $G^\perp$ doit contenir au moins un vecteur non nul de U .

On commence par essayer d'appréhender f quand $\dim E = 4$ (la dimension minimale que peut prendre E), on confectionne dans le

cas général un sous-espace de E de dimension 4 stable par f et on injecte.

N.B : la réponse est trop longue, mais après plusieurs essais infructueux, c'est le mieux que j'ai pu faire. Je suis preneur pour toute idée alternative. Mon adresse eMail se trouve dans les métadonnées du fichier PDF (menu fichier $\rightarrow$ propriétés dans Adobe ReaderTM) ou au début du fichier source LaTeX.
Le corrigé est inachevé.



À la prochaine

Devoir Libre

11 Coniques-Quadriques

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?

- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon



Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.

Son nom est lié à la suite de matrices (H_{2^k}) définie de la façon suivante : $H_1 = (1)$, $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$. Elles sont utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Mathématicien du jour

❑ Exercice 1 : Extrait e3a 2009, MP

On considère trois réels α , β et γ non nuls et la quadrique (Σ) dont une équation est :

$$\alpha^2 (x + y + z)^2 + \beta^2 (-x + y)^2 + \gamma^2 (2y + z)^2 = 1$$

dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace affine de dimension trois.

1) a) Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + y + z = 0$ et $-x + y = 0$ sont orthogonaux.

b) On note $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les deux vecteurs unitaires, d'abscisses positives, normaux respectivement aux plans (P) et (Q). Déterminer les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ ainsi que le vecteur $\vec{K}$ tel que le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit orthonormé direct.

c) Déterminer une équation de la quadrique (Σ) dans le repère $\mathcal{R}'$.
On notera X, Y et Z les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

d) Que peut-on dire de la nature de la quadrique (Σ) ?

2) On note $(\mathcal{E})$ la conique obtenue comme intersection de la quadrique (Σ) avec le plan d'équation $Z = 0$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

Réduire l'équation de la conique $(\mathcal{E})$. En déduire qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ tel que l'équation dans le repère $\mathcal{R}''$ de la quadrique (Σ) soit de la forme :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < a < b$. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}''$ sont notées X' , Y' et Z' .

3) Soit k un réel quelconque ; on appelle (P_k) le plan dont une équation dans le repère $\mathcal{R}''$ est :

$$\frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

a) En considérant l'expression :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} (X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$$

montrer que l'intersection (C_k) du plan (P_k) et de la quadrique (Σ) est l'intersection du plan (P_k) avec une sphère (S_k) dont on précisera le centre Ω_k et le rayon R_k .

b) Montrer que l'ensemble (C_k) est un cercle dont on précisera le rayon.

c) Que peut-on dire du rayon du cercle (C_k) ? Pouvait-on le prévoir ?

❏ Exercice 2 : Extrait e3a 2004, MP

On note $M_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $(3, 3)$ à coefficients réels, et I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$. Une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est dite **définie positive**.

Pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \|Ax\| = 1\}.$$

1. Soit P dans $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que P est une matrice orthogonale. Déterminer $\mathcal{E}(P)$.
2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tous non nuls. Soit D la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathcal{E}(D)$ est un ellipsoïde.

- 3 Soit A dans $M_3(\mathbb{R})$. On suppose A **inversible**.

- (i) Justifier que tAA est une matrice symétrique définie positive.
- (ii) En déduire qu'il existe une matrice diagonale D , avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$${}^tAA = {}^tP D^2 P.$$

- (iii) On pose $S = {}^tP D P$. Démontrer que S est une matrice symétrique définie positive.
 - (iv) Montrer alors qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $A = QS$.
 - (v) En déduire que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.
 - (vi) Démontrer que $\mathcal{E}(A)$ est un ellipsoïde.
- 4 Soient S et S' dans $M_3(\mathbb{R})$. On suppose que S et S' sont des matrices **symétriques définies positives** et que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.
 - (i) Soit v un vecteur non nul. En considérant le vecteur $v/\|S(v)\|$, démontrer que $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$.
 - (ii) En déduire que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \langle S(v), S(w) \rangle = \langle S'(v), S'(w) \rangle.$$

On pourra commencer par exprimer le produit scalaire de deux vecteurs x et y en fonction des normes des vecteurs $x + y$ et $x - y$.

- (iii) En déduire que $S^2 = S'^2$.
- (iv) Soit α une valeur propre de S . A l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé, montrer que $\ker(S - \alpha I) \oplus \ker(S + \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$. En déduire que $\ker(S - \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$.



❑ Corrigé Exercice 1, Pr. Dufait

1. (i) $t \mapsto M(t)$ est C^1 sur $[-\pi, \pi]$ et $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $M'(t) = \begin{pmatrix} -5 \sin t \\ 3 \cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc la tangente à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ est la droite d'équation $\begin{vmatrix} x - 5 \cos t & -5 \sin t \\ y - 3 \sin t & 3 \cos t \end{vmatrix} = 0$ soit $(T_t) : 3 \cos t x + 5 \sin t y = 15$.

(ii) On remarque que $O \notin T_t$ donc, pour tout $P \in T_t$, la droite (OP) existe dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$. Le point P est solution si et seulement si $P \in T_t$ et $\overrightarrow{OP} \perp \vec{T}_t$ c'est à dire si et seulement si P est le projeté orthogonal de O sur T_t . D'où l'existence et l'unicité de P .

(iii) À un sommet S de $\mathcal{E}$, la tangente à $\mathcal{E}$ est orthogonale à l'axe (OS) . Comme S appartient à cette tangente, si S est un sommet alors $P = S$.

(iv) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ est orthogonal à T_t donc colinéaire à $\begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}$ donc il existe $\lambda_t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \lambda_t \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 5 \sin t \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $P \in T_t$ donc $3 \cos t X(t) + 5 \sin t Y(t) = 15$. On obtient $\lambda_t (9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t) = 15$ soit $\lambda_t = \frac{15}{9 \cos^2 t + 25 \sin^2 t} = \frac{15}{9 + 16 \sin^2 t}$. Donc $\begin{cases} X(t) = \frac{45 \cos t}{9 + 16 \sin^2 t} \\ Y(t) = \frac{75 \sin t}{9 + 16 \sin^2 t} \end{cases}$

2. (i) On a immédiatement :

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$X'(t)$	0	—
$X(t)$	1	$\searrow$ 0

(ii) $\diamond (t \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } Y'(t) = 0) \sin t = \frac{3}{4}$ donc $\exists ! \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[, Y'(\alpha) = 0$ et on a $\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)$.

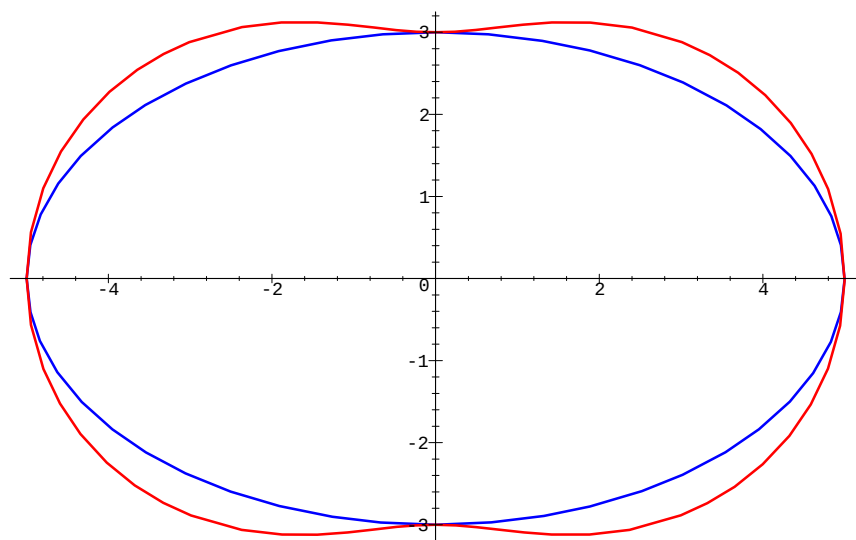
$\diamond \sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ donc $\sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}$ et $\sin^2$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

$\diamond$ On a $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ et $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ d'où $\begin{cases} X(\alpha) = \frac{5}{8} \sqrt{7} \\ Y(\alpha) = \frac{25}{8} \end{cases}$

(iii) On a donc :

t	0	α	$\frac{\pi}{2}$
$Y'(t)$		+	—
$Y(t)$	0	$\nearrow$ $\frac{25}{8}$	$\searrow$ 3

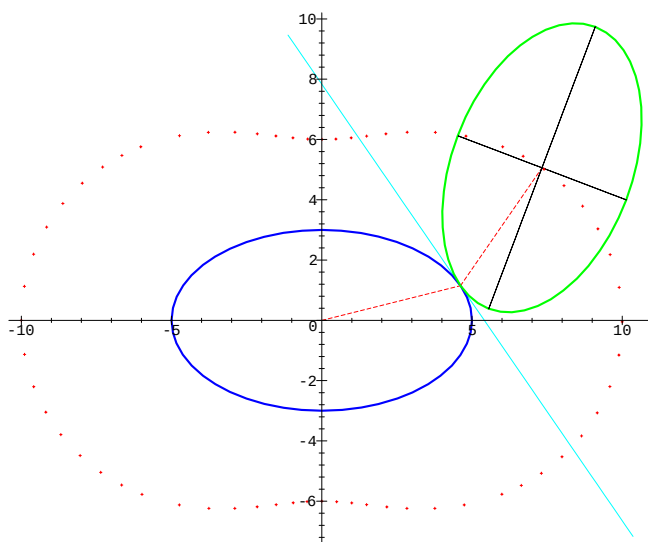
3. On a $\begin{cases} X(t + \pi) = -X(t) \\ Y(t + \pi) = -Y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} X(-t) = X(t) \\ Y(-t) = -Y(t) \end{cases}$ donc il suffit d'étudier l'arc $t \mapsto P_t$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis de le compléter par une symétrie par rapport à O et une symétrie orthogonale par rapport à $(O, \vec{i})$.



4. QUESTION HORS PROGRAMME

Notons S le sommet $S = O + \vec{r}$ de $\mathcal{E}$. À l'instant $\theta = 0$, il coïncide avec le sommet S' de $\mathcal{E}'$. La condition de roulement sans glissement est qu'à l'instant θ les deux ellipses sont en contact en $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}'$ tels que la longueur de l'arc $\widehat{SM}$ soit égale à celle de l'arc $\widehat{S'M'}$. Si on prend comme paramétrage de $\mathcal{E}'$ celui obtenu par la translation τ , c'est à dire, par exemple, que $S' = M'(\pi)$, on a donc que, si à l'instant θ le contact a lieu en $M(t)$ sur $\mathcal{E}$ alors il a lieu en $M'(\pi - t)$ sur $\mathcal{E}'$. Le point $M(\pi - t)$ étant symétrique du point $M(t)$ par rapport à $(O, \vec{j})$, l'angle entre les droites $(OM(\pi - t))$ et $T_{\pi-t}$ est l'opposé, modulo π , de l'angle entre les droites $(OM(t))$ et T_t . D'autre part, c'est aussi l'angle entre les droites $(O'M'(\pi - t))$ et $T'_{\pi-t}$. Comme $T_t = T'_{\pi-t}$ à l'instant θ , les droites $(OM(t))$ et $(O'M'(\pi - t))$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à T_t , donc en particulier, O' est, à l'instant θ , le symétrique de O par rapport à T_t . On a donc $\overrightarrow{OO'} = 2\overrightarrow{OP}$ et donc le lieu de O' est l'image de $\mathcal{F}$ par l'homothétie de centre O et rapport 2.

ILLUSTRATION :



❑ Corrigé Exercice 2, Mma Gayout

1) a) Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1, 1, 1)$ et un vecteur normal au plan (Q) est $\vec{m}(-1, 1, 0)$.
On a : $\vec{n} \cdot \vec{m} = 0$. Donc les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

b) On prend $\vec{I}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $\vec{J}(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$, soit $\vec{K}(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

c) D'après les formules de changement de bases, en notant P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

à la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{\sqrt{6}}{6}Z \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y + \frac{\sqrt{6}}{6}Z \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}X - 2 \times \frac{\sqrt{6}}{6}Z \end{cases}$ et on a aussi :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^tP \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + y + z) \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ Z = \frac{\sqrt{6}}{6}(x + y - 2z) \end{cases}.$$

Donc $(x + y + z)^2 = 3X^2$, $(-x + y)^2 = 2Y^2$ et $(2y + z)^2 = (\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2$.

Une équation de (Σ) dans le repère $\mathcal{R}'$ est donc : $3\alpha^2 X^2 + 2\beta^2 Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2 = 1$.

d) On en déduit que (Σ) est un cylindre d'axe dirigé par le vecteur $\vec{K}$.

2) $(\mathcal{E})$ a pour équation : $3\alpha^2 X^2 + 2\beta^2 Y^2 + \gamma^2(\sqrt{3}X - \sqrt{2}Y)^2 = 1$, soit

$$3(\alpha^2 + \gamma^2)X^2 - 2\gamma^2\sqrt{6}XY + 2(\beta^2 + \gamma^2)Y^2 = 1.$$

La matrice associée à la forme quadratique $q(X, Y) = 3(\alpha^2 + \gamma^2)X^2 - 2\gamma^2\sqrt{6}XY + 2(\beta^2 + \gamma^2)Y^2$

$$\text{est : } M = \begin{pmatrix} 3(\alpha^2 + \gamma^2) & -\sqrt{6}\gamma^2 \\ -\sqrt{6}\gamma^2 & 2(\beta^2 + \gamma^2) \end{pmatrix}.$$

Par le théorème spectral, on sait que M admet deux valeurs propres réelles, que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont orthogonaux et que M est diagonalisable dans une base orthonormale $(\vec{I}', \vec{J}')$ constituée de vecteurs propres.

Après calculs, on trouve comme valeurs propres : $a' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 + \sqrt{\theta})$

$$\text{et } b' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 - \sqrt{\theta}) \text{ où } \theta = 9\alpha^4 + 4\beta^4 + 25\gamma^4 - 12\alpha^2\beta^2 - 4\beta^2\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma^2.$$

Un vecteur propre associé à a' est $\vec{U}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - a')$ et un vecteur propre associé à b' est $\vec{V}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - b')$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J})$.

On pose : $\vec{I}' = \frac{1}{\|\vec{U}\|}\vec{U}$ et $\vec{J}' = \frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$. On sait de plus que : $a' + b' = \text{Tr}(M) = 3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 > 0$

et que $a'b' = \det(M) = 6(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) > 0$. Donc on a : $0 < b' < a'$.

Dans la repère orthonormal $(O, \vec{I}', \vec{J}')$, $(\mathcal{E})$ a pour équation réduite : $aX'^2 + bY'^2 = 1$.

$(\mathcal{E})$ est donc une ellipse et (Σ) un cylindre elliptique.

مَمُونِي مَوْلَايِ اسْمَاعِيلِ

On pose $\vec{K}' = \vec{K}$, $a = \frac{1}{\sqrt{a'}}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{b'}}$. On a : $0 < a < b$ et l'équation de (Σ) dans le repère orthonormal

$\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ est alors : $\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$.

3) a) On a :

$$(*) \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} X'^2 - \frac{1}{b^2} Z'^2 = \left(\frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} \right) \left(\frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b} \right).$$

Soit $M \in (C_k)$; alors ses coordonnées (X', Y', Z') dans le repère $\mathcal{R}''$ vérifient :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

Donc, en remplaçant dans $(*)$, on obtient $(**)$: $1 - \frac{1}{b^2} (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = k \left(\frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b} \right)$, soit

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \frac{kb \sqrt{b^2 - a^2}}{a} X' + kb Z' = b^2, \text{ soit } \left(X' + \frac{kb \sqrt{b^2 - a^2}}{2a} \right)^2 + Y'^2 + \left(Z' + \frac{kb}{2} \right)^2 = \frac{b^2 (k^2 b^2 + 4a^2)}{4a^2}.$$

Donc M appartient aussi à la sphère (S_k) de centre Ω_k de coordonnées $\left(-\frac{kb \sqrt{b^2 - a^2}}{2a}, 0, -\frac{kb}{2} \right)$ dans le repère

$\mathcal{R}''$ et de rayon $R_k = \frac{b \sqrt{k^2 b^2 + 4a^2}}{2a}$.

Réciproquement, si $M \in (S_k) \cap (P_k)$, on a la relation $(**)$ et $\frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k$, d'où :

$$1 - \frac{1}{b^2} (X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \left(\frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} \right) \left(\frac{X' \sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b} \right) = \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2} (X'^2 + Y'^2 + Z'^2), \text{ donc}$$

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1. \text{ Donc } M \in (\Sigma). \text{ D'où l'égalité : } \boxed{(C_k) = (P_k) \cap (\Sigma) = (P_k) \cap (S_k)}.$$

b) En tant qu'intersection d'un plan et d'une sphère, (C_k) est soit vide, soit un point, soit un cercle. C'est un cercle ssi la distance d de Ω_k au plan (P_k) est strictement inférieure à R_k .

Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore, le rayon de (C_k) , noté r_k , est égal à : $\sqrt{R_k^2 - d^2}$.

$$\text{On a : } R_k = \frac{b \sqrt{k^2 b^2 + 4a^2}}{2a} \text{ et } d = d(\Omega_k, (P_k)) = \left| -\frac{k(b^2 - a^2)}{2a^2} + \frac{k}{2} - k \right| = \frac{kb^2}{2a}.$$

$$\text{D'où } R_k - d = \frac{b}{2a} \left(\sqrt{k^2 b^2 + 4a^2} - kb \right) > 0 \text{ car } a > 0. \text{ Donc } (C_k) \text{ est un cercle de rayon } r_k = b.$$

c) Le rayon du cercle (C_k) est égal à la demi-longueur du grand axe de l'ellipse $(\mathcal{E})$.

On pouvait le prévoir puisque l'ellipse $(\mathcal{E})$ est l'image du cercle (C_k) par la projection orthogonale sur le plan d'équation $Z' = 0$.

Or, (C_k) est inclus dans le plan (P_k) dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{J}'$ aussi vecteur directeur du plan $Z' = 0$. Donc un diamètre de (C_k) dirigé selon $\vec{J}'$ a sa longueur inchangée par la projection orthogonale considérée.

DL 12 Fonctions harmoniques

Blague du jour

Pour une question bien précise :

- Un ingénieur pense que ses équations sont une approximations de la réalité.
- Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.
- Un mathématicien s'en moque.



John Machin (1680 - 1751)

Mathématicien anglais, connu principalement pour avoir calculé en 1706, les 100 décimales de π grâce à la formule qui porte son nom : $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan 1239$. Malgré un nom de famille très drôle, John Machin a enseigné les mathématiques à Brook Taylor. Il était aussi professeur d'astronomie, secrétaire de la Royal Society et membre de la commission qui décida de la priorité de Calcul entre Leibniz et Newton en 1712.

Mathématicien du jour

❑ Énoncé : Mines-Ponts 2004, MP

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable ; le laplacien de la fonction f est, par définition, la fonction, notée Δf , définie dans l'ouvert U par la relation suivante :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable, est harmonique dans U si et seulement si son laplacien est nul dans U :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Exemple : en électrostatique, le potentiel électrique dans le vide est harmonique.

Le but du problème est de donner des exemples de telles fonctions puis de démontrer certaines propriétés de ces fonctions : le principe du maximum, la propriété de moyenne, le fait que les fonctions bornées harmoniques dans tout le plan sont constantes.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne.

Quelques exemples de fonctions harmoniques :

1. Démontrer que les fonctions complexes f et g_n , $n \in \mathbb{N}$, définies dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations ci-dessous, sont harmoniques :

$$f(x, y) = e^{x + iy}, \quad g_n(x, y) = (x + iy)^n.$$

2. Déterminer les fonctions u réelles, de classe C^2 , définies sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, telles que chaque fonction h , définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O ($\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$) par la relation ci-dessous, soit harmonique

$$h(x, y) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Poser si nécessaire : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Déterminer les fonctions v réelles, de classe C^2 , définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telles que chaque fonction k , définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe yOy ($\mathbb{R}^2 \setminus yOy$) par la relation ci-dessous, soit harmonique.

$$k(x, y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations suivantes :

$$u_n(x, y) = (-1)^n \frac{(x + iy)^n}{(2n)!}.$$

4. Soit K un ensemble fermé borné quelconque du plan $\mathbb{R}^2$; démontrer que la restriction $u_n|_K$ de la fonction u_n au fermé K est le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente.

En déduire que la série de fonctions de terme général u_n converge en tout point du plan et que sa somme, la fonction φ , définie par la relation suivante

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y),$$

est continue dans le plan.

5. Démontrer que cette fonction φ est harmonique dans tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Principe du maximum :

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon strictement positif r ($r > 0$) ; soit C le cercle de centre O et de rayon r :

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}, \\ C &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}. \end{aligned}$$

Étant donné un entier strictement positif p ($p > 0$), soit f_p la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante :

$$f_p(x, y) = f(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{p}.$$

6. Démontrer l'existence d'un point M_p de coordonnées a_p et b_p , appartenant au disque fermé D en lequel la fonction f_p atteint son maximum :

$$f_p(a_p, b_p) = \max_{(x, y) \in D} f_p(x, y).$$

7. Démontrer que, si le point M_p appartient à l'intérieur du disque D , les deux dérivées secondes de la fonction f_p , obtenues en dérivant deux fois par rapport à x ou deux fois par rapport à y , sont, en ce point M_p , négatives ou nulles :

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0 ; \quad \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0.$$

8. En déduire, en calculant par exemple le laplacien de la fonction f_p , que le point M_p est situé sur le cercle C .

9. Démontrer qu'il existe un point P de coordonnées a et b du cercle C en lequel la fonction f atteint son maximum sur D :

$$f(a, b) = \max_{(x, y) \in D} f(x, y).$$

10. En déduire que deux fonctions harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$ égales le long d'un cercle C du plan (de rayon strictement positif), sont égales dans tout le disque D de frontière C .

Propriété de la moyenne

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans le plan $\mathbb{R}^2$. Étant donné un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et un réel ρ positif ou nul, soit F la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$ par la relation suivante :

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) d\theta.$$

11. Démontrer que la fonction F est définie et continue sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$.
12. Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F'(\rho)$.
13. Démontrer que le produit $\rho.F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x, y) dx + B(x, y) dy$ le long d'un arc orienté Γ :

$$\rho.F'(\rho) = \int_{\Gamma} (A(x, y) dx + B(x, y) dy).$$

Préciser la forme différentielle α et l'arc orienté Γ .

14. Démontrer que la fonction F est une fonction constante ; préciser sa valeur.
15. Soit D le disque fermé de centre le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) et de rayon r ($r > 0$) ; démontrer que l'intégrale double I de la fonction f étendue au disque D se calcule simplement en fonction de $f(x_0, y_0)$ suivant la relation :

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \pi r^2 f(x_0, y_0).$$

Fonctions harmoniques bornées dans le plan :

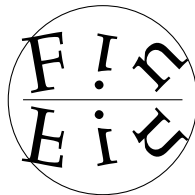
Soit f une fonction définie dans tout le plan, réelle, harmonique et bornée : il existe donc une constante C telle qu'en tout point (x, y) du plan :

$$|f(x, y)| \leq C.$$

16. Soient deux disques fermés D_1 et D_2 de centres, distincts l'un de l'autre, O et M_0 , de coordonnées respectives $(0, 0)$ et (x_0, y_0) . Soit r le rayon commun de ces disques. La distance d des centres O et M_0 (égale à $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$) est supposée strictement inférieure au rayon r ($0 < d < r$). Soit L_2 l'ensemble des points du disque D_2 qui ne sont pas dans le disque D_1 .

En considérant par exemple un disque contenu dans l'intersection des disques D_1 et D_2 , démontrer que l'aire de L_2 est majorée par l'expression $\pi r d$.

17. À l'aide par exemple de la question 15, donner un majorant de la valeur absolue de la différence $f(x_0, y_0) - f(0, 0)$ au moyen de la constante C , du rayon r et de d .
En déduire que la fonction f est constante.



À la prochaine

DL 12 Fonctions harmoniques

Blague du jour

Pour une question bien précise :

- Un ingénieur pense que ses équations sont une approximations de la réalité.
- Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.
- Un mathématicien s'en moque.



John Machin (1680 - 1751)

Mathématicien anglais, connu principalement pour avoir calculé en 1706, les 100 décimales de π grâce à la formule qui porte son nom : $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan 1239$. Malgré un nom de famille très drôle, John Machin a enseigné les mathématiques à Brook Taylor. Il était aussi professeur d'astronomie, secrétaire de la Royal Society et membre de la commission qui décida de la priorité de Calcul entre Leibniz et Newton en 1712.

Mathématicien du jour

❑ Énoncé : Mines-Ponts 2004, MP

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable ; le laplacien de la fonction f est, par définition, la fonction, notée Δf , définie dans l'ouvert U par la relation suivante :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable, est harmonique dans U si et seulement si son laplacien est nul dans U :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Exemple : en électrostatique, le potentiel électrique dans le vide est harmonique.

Le but du problème est de donner des exemples de telles fonctions puis de démontrer certaines propriétés de ces fonctions : le principe du maximum, la propriété de moyenne, le fait que les fonctions bornées harmoniques dans tout le plan sont constantes.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne.

Quelques exemples de fonctions harmoniques :

1. Démontrer que les fonctions complexes f et g_n , $n \in \mathbb{N}$, définies dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations ci-dessous, sont harmoniques :

$$f(x, y) = e^{x + iy}, \quad g_n(x, y) = (x + iy)^n.$$

2. Déterminer les fonctions u réelles, de classe C^2 , définies sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, telles que chaque fonction h , définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O ($\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$) par la relation ci-dessous, soit harmonique

$$h(x, y) = u\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Poser si nécessaire : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3. Déterminer les fonctions v réelles, de classe C^2 , définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telles que chaque fonction k , définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe yOy ($\mathbb{R}^2 \setminus yOy$) par la relation ci-dessous, soit harmonique.

$$k(x, y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions définies dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations suivantes :

$$u_n(x, y) = (-1)^n \frac{(x + iy)^n}{(2n)!}.$$

4. Soit K un ensemble fermé borné quelconque du plan $\mathbb{R}^2$; démontrer que la restriction $u_n|_K$ de la fonction u_n au fermé K est le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente.

En déduire que la série de fonctions de terme général u_n converge en tout point du plan et que sa somme, la fonction φ , définie par la relation suivante

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y),$$

est continue dans le plan.

5. Démontrer que cette fonction φ est harmonique dans tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Principe du maximum :

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon strictement positif r ($r > 0$) ; soit C le cercle de centre O et de rayon r :

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}, \\ C &= \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}. \end{aligned}$$

Étant donné un entier strictement positif p ($p > 0$), soit f_p la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante :

$$f_p(x, y) = f(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{p}.$$

6. Démontrer l'existence d'un point M_p de coordonnées a_p et b_p , appartenant au disque fermé D en lequel la fonction f_p atteint son maximum :

$$f_p(a_p, b_p) = \max_{(x, y) \in D} f_p(x, y).$$

7. Démontrer que, si le point M_p appartient à l'intérieur du disque D , les deux dérivées secondes de la fonction f_p , obtenues en dérivant deux fois par rapport à x ou deux fois par rapport à y , sont, en ce point M_p , négatives ou nulles :

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0 ; \quad \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0.$$

8. En déduire, en calculant par exemple le laplacien de la fonction f_p , que le point M_p est situé sur le cercle C .

9. Démontrer qu'il existe un point P de coordonnées a et b du cercle C en lequel la fonction f atteint son maximum sur D :

$$f(a, b) = \max_{(x, y) \in D} f(x, y).$$

10. En déduire que deux fonctions harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$ égales le long d'un cercle C du plan (de rayon strictement positif), sont égales dans tout le disque D de frontière C .

Propriété de la moyenne

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans le plan $\mathbb{R}^2$. Étant donné un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et un réel ρ positif ou nul, soit F la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$ par la relation suivante :

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) d\theta.$$

11. Démontrer que la fonction F est définie et continue sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$.
12. Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F'(\rho)$.
13. Démontrer que le produit $\rho.F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x, y) dx + B(x, y) dy$ le long d'un arc orienté Γ :

$$\rho.F'(\rho) = \int_{\Gamma} (A(x, y) dx + B(x, y) dy).$$

Préciser la forme différentielle α et l'arc orienté Γ .

14. Démontrer que la fonction F est une fonction constante ; préciser sa valeur.
15. Soit D le disque fermé de centre le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) et de rayon r ($r > 0$) ; démontrer que l'intégrale double I de la fonction f étendue au disque D se calcule simplement en fonction de $f(x_0, y_0)$ suivant la relation :

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \pi r^2 f(x_0, y_0).$$

Fonctions harmoniques bornées dans le plan :

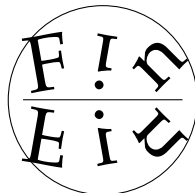
Soit f une fonction définie dans tout le plan, réelle, harmonique et bornée : il existe donc une constante C telle qu'en tout point (x, y) du plan :

$$|f(x, y)| \leq C.$$

16. Soient deux disques fermés D_1 et D_2 de centres, distincts l'un de l'autre, O et M_0 , de coordonnées respectives $(0, 0)$ et (x_0, y_0) . Soit r le rayon commun de ces disques. La distance d des centres O et M_0 (égale à $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$) est supposée strictement inférieure au rayon r ($0 < d < r$). Soit L_2 l'ensemble des points du disque D_2 qui ne sont pas dans le disque D_1 .

En considérant par exemple un disque contenu dans l'intersection des disques D_1 et D_2 , démontrer que l'aire de L_2 est majorée par l'expression $\pi r d$.

17. À l'aide par exemple de la question 15, donner un majorant de la valeur absolue de la différence $f(x_0, y_0) - f(0, 0)$ au moyen de la constante C , du rayon r et de d .
En déduire que la fonction f est constante.



À la prochaine

Devoir Libre

13 Courbes & Surfaces

Blague du jour

- ☛ Qu'est ce qu'un taureau avec un sac à main ?
- Un vache folle
- ☛ Qu'est ce qu'est un oiseau migrateur ?
- C'est un oiseau qui se gratte que d'un côté.
- ☛ Qu'est-ce qu'on obtient si on croise un pitbull et un yorkshire ?
- Un yorkshire mort...



Joseph Liouville (1809-1882)

Mathématicien français. Diplômé de l'École Polytechnique et de l'École des ponts et chaussées, il préfère suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Liouville publia dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie. Il fut le premier à reconnaître les travaux inédits d'Évariste Galois

Mathématicien du jour

Énoncé : e3a 2009, PSI

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour $t \in \mathbf{R}$:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \quad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

① On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbf{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

a Soit $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par : $h(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$.

i Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

ii Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par h , c'est-à-dire :

$$\{(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)), t \in \mathbf{R}\}.$$

b Soit $f_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.

Étudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2 , c'est-à-dire :

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbf{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$x + y^2 = 1, \text{ avec } -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

c Soit $f_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t) \sin(t), \sin(t))$.

Étudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3 , c'est-à-dire :

$$C_3 = \{(\cos(t) \sin(t), \sin(t)), t \in \mathbf{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B} : (2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$.

② On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbf{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

a Soit $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2 .

b Soit $\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / \begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \right\}$.

Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?

c Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1 .

De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en

tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2 .

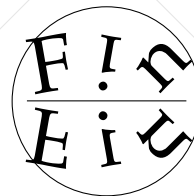
En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ .

d Déterminer un paramétrage de Γ , en utilisant les coordonnées cylindriques : c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ .

En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ .

e Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose : $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbf{R}\}$. Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

f Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy , xOz et yOz , en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.



À la prochaine

Corrigé : Pr Skler, CPGE France

① On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

a Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $h(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t))$.

i Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1$$

et préciser la nature de cette courbe.

Correction : on a

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

c'est l'équation du cercle de centre le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

ii Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par h , c'est-à-dire :

$$\{(\cos^2(t), \cos(t) \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Correction : on a pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$(2 \cos^2(t) - 1)^2 + (2 \sin(t) \cos(t))^2 = (\cos(2t))^2 + (\sin(2t))^2 = 1$$

On en déduit que la courbe paramétrée par h est incluse dans C_1 .

Réciproque : soit M un point de coordonnées (x, y) appartenant à C_1 , on a

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1 \Leftrightarrow \theta \in \mathbb{R} \quad / \quad 2x - 1 = \cos(\theta) \quad \text{et} \quad 2y = \sin(\theta)$$

on pose $t = \frac{\theta}{2}$, on a alors $2x - 1 = \cos(2t)$ et $2y = \sin(2t)$, d'où

$$x = \cos^2(t) \quad \text{et} \quad y = \cos(t) \sin(t)$$

Tout point du cercle C_1 est aussi un point de la courbe paramétrée par h .

Conclusion : C_1 est le support de la courbe paramétrée par h

b Soit $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.

Étudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2 , c'est-à-dire :

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$x + y^2 = 1, \quad \text{avec} \quad -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

Correction : soit $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos^2(t) + (\sin(t))^2 = 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1$$

donc la courbe C_2 est incluse dans la courbe définie par $x + y^2 = 1$, avec $-1 \leq y \leq 1$.

Réciproquement : soit un point de coordonnées (x, y) tel que $x + y^2 = 1$, avec $-1 \leq y \leq 1$. Comme $y \in [-1, 1]$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $y = \sin(t)$. On a alors $x = 1 - y^2 = \cos^2(t)$. La courbe C_2 est donc définie par $x + y^2 = 1$, avec $-1 \leq y \leq 1$.

C'est une portion de parabole.

Etude de la courbe paramétrée : f_2 est 2π périodique. On a

de plus

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_2(-t) = (\cos^2(t), -\sin(t))$$

la courbe admet l'axe des abscisses comme axe de symétrie. On peut donc restreindre l'étude à $[0, \pi]$, cependant on peut remarquer que

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f_2(\pi - t) = f_2(t)$$

La courbe définie pour $t \in [0, \pi]$ est donc parcourue 2 fois on peut donc restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$ avant la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

La fonction f_2 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad f'_2(t) = (-2 \sin(t) \cos(t), \cos(t))$$

d'où le tableau de variation :

t	0	$\frac{\pi}{2}$
$x'_2(t)$	0	-
$x_2(t)$	1	0
$y_2(t)$	0	1
$y'_2(t)$	+	0

c Soit $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t) \sin(t), \sin(t))$.

Étudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3 , c'est-à-dire :

$$C_3 = \{(\cos(t) \sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B} : (2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$.

Correction : la fonction f_3 est 2π périodique. On a

$$\forall t \in [-\pi, \pi] \quad f_3(t) = -f_3(t)$$

la courbe admet donc O comme centre de symétrie. On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$

De plus

$$\forall t \in [0, \pi] \quad f_3(\pi - t) = (-\cos(t) \sin(t), \sin(t))$$

la courbe admet donc l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. On peut donc restreindre l'étude à $[0, \frac{\pi}{2}]$. Avec

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} \sin(2t), \sin(t)\right) \text{ on a}$$

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad f'_3(t) = (\cos(2t), \cos(t))$$

d'où le tableau de variations

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$x'_3(t)$	+	0	-
$x_3(t)$	0	$\frac{1}{2}$	0
$y_3(t)$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$y'_3(t)$	+	+	0

$\forall t \in \mathbb{R}, (2x_3(t))^2 + (1 - 2y_3(t)^2)^2 = \sin^2(2t) + (1 - 2\sin^2(t))^2 = \sin^2(2t) + \cos^2(2t) = 1$. La courbe C_3 est bien incluse dans la courbe définie par $(2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$. Soit un point de coordonnées (x, y) appartenant à cette

courbe,

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad / \quad 2x = \sin(\theta) \text{ et } 1 - 2y^2 = \cos(\theta)$$

On pose $t = \frac{1}{2}\theta$ et on obtient $x = \cos(t) \sin(t)$ et $y^2 = \sin^2(t)$.

Si $y = \sin(t)$ alors on obtient bien un point de C_3 . Si $y = -\sin(t)$ on a $y = \sin(t + \pi)$ et $x = \cos(t) \sin(t) = \cos(t + \pi) \sin(t + \pi)$. c'est encore un point de C_3 . Donc C_3 est bien la courbe définie par l'équation $(2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$

- ② On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

a Soit $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2 .

Correction : S_1 est le cylindre d'axe parallèle à Oz et de directrice le cercle C_1 , et S_2 est la sphère de centre O et de rayon 1.

b Soit $\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \right\}$.

Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?

Correction : Γ est l'intersection des deux surfaces S_1 et S_2

c Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1 .

De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2 .

En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ .

Correction : en un point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ une équation du plan tangent à la surface d'équation

$f(x, y, z) = 0$ est

$$\left(\text{Vect grad } (f) (x_0, y_0, z_0) \mid \overrightarrow{M_0 M} \right) = 0$$

ou encore

$$\frac{\partial f}{\partial x} (x_0, y_0, z_0) (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} (x_0, y_0, z_0) (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z} (x_0, y_0, z_0) (z - z_0) = 0$$

On trouve donc : pour S_1

$$(2x_0 - 1) \cdot (x - x_0) + 2y_0 \cdot (y - y_0) = 0$$

et donc, avec $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S_1$

$$(2x_0 - 1) \cdot x + 2y_0 \cdot y + 2x_0 = 0$$

Pour S_2

$$2x_0 \cdot (x - x_0) + 2y_0 \cdot (y - y_0) + 2z_0 \cdot (z - z_0) = 0$$

et donc, avec $M_0 \in S_2$

$$x_0 \cdot x + y_0 \cdot y + z_0 \cdot z = 1$$

Lorsque les plans tangents aux surfaces ne sont pas confondus, la tangente au point d'intersection des deux surfaces est alors l'intersection des deux plans tangents.

d Déterminer un paramétrage de Γ , en utilisant les coordonnées cylindriques : c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ .

En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ .

Correction : Soit M un point de coordonnées $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$. On a

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow r \cos(\theta) = r^2 \text{ et } r^2 + z^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (r = 0 \text{ ou } r = \cos(\theta)) \text{ et } z^2 = 1 - r^2 = 1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta).$$

On obtient alors $r = \cos(\theta)$ et $z = \sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, ou $r = \cos(\theta)$ et $z = -\sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Ces deux paramétrages donnent la même courbe.

On obtient alors pour paramétrage de Γ : $x = \cos^2(\theta), y = \cos(\theta) \sin(\theta), z = \sin(\theta), \theta \in \mathbb{R}$.

Soit C le cône de sommet $S = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ s'appuyant sur Γ on a .

$$M \in C \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \exists M_0 \in \Gamma \quad \overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SM_0}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \left(\cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right) \\ y = \lambda \cos(\theta) \sin(\theta) \\ z = \lambda \sin(\theta) \end{cases}$$

e Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose : $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

Correction : soit $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(t)^4 + \sin(t)^2 \cos(t)^2 = \cos(t)^2 \quad \text{et}$$

$\cos(t)^4 + \sin(t)^2 \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$
donc $\gamma \subset \Gamma$. La réciproque a été étudiée dans la question d)
donc $\gamma = \Gamma$

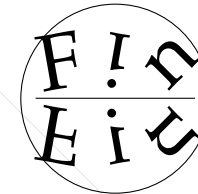
f Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy , xOz et yOz , en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.

Correction : Les trois courbes planes projections orthogonales de Γ sur les plans xOy , xOz et yOz sont obtenues en annulant une coordonnée.

Sur xOy : $z = 0, x = \cos^2(t), y = \cos(t) \sin(t), t \in \mathbb{R}$: courbe C_1 ;

sur xOz : $y = 0, x = \cos^2(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: analogue à la courbe C_2 ;

sur yOz : $x = 0, y = \cos(t) \sin(t), z = \sin(t), t \in \mathbb{R}$: analogue à la courbe C_3



À la prochaine

Devoir Surveillé

4 Calcul Différentiel, Courbes & Surfaces

Blague du jour

Lors d'un discours prononcé devant une assemblée de professeurs de mathématiques, George W. Bush les met en garde contre le mauvais usage des mathématiques pour inculquer aux jeunes américains des visions politiques extrémistes.

Si j'ai bien compris, dit le président, dans vos cours d'algèbre vous apprenez à vos étudiants la résolution des problèmes et d'équations avec l'aide des radicaux. Je ne peux pas dire que j'approuve ceci...



Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813)

En italien Giuseppe Lodovico Lagrangia, est un mathématicien, mécanicien et astronome franco-italien. Né en Italie, mais de famille française par son arrière-grand-père. Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, son nom figure partout en mathématiques. Il développe la mécanique analytique, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie. Il élabore le système métrique avec Lavoisier et enseigne les mathématiques à l'école normale et à l'école polytechnique.

Mathématicien du jour

❑ Problème : extrait X 2004, MP

Courbures des surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Ce problème propose une étude des surfaces de l'espace $\mathbb{R}^3$ et de leurs courbures totale et moyenne. Pour tout entier $n > 0$, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera muni de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement $(\cdot | \cdot)$ et $\|\cdot\|$. La première partie est consacrée à des préliminaires algébriques.

Première partie

- Soient $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ des éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_j^{(i)})_{j=1, \dots, n+1}$ les composantes de $x^{(i)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $k = 1, \dots, n+1$ on note V_k le produit par $(-1)^{k+1}$ du déterminant de la matrice $(x_j^{(i)})$ où $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n+1$. On note V le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes V_k .
 - Montrer que V est orthogonal à tous les $x^{(i)}$.
 - Comparer les conditions suivantes :
 - $V = 0$
 - la famille $(x^{(i)})_{i=1, \dots, n}$ est liée.
 - Exprimer en fonction de $\|V\|$ le déterminant des $n+1$ vecteurs $V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. a) Montrer que, pour tout n -uple de vecteurs $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ linéairement indépendants, il existe un unique vecteur $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ ayant les propriétés suivantes
- i) $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est de norme 1 et orthogonal à tous les $x^{(i)}$
 - ii) le déterminant des $n+1$ vecteurs $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est strictement positif.

- b) Vérifier que, pour toute rotation R de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a

$$W(R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})) = R(W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})).$$

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, Q la matrice de coefficients $q_{i,j} = (e_i | e_j)$.

- a) Montrer que Q est inversible et diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

- b) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées v_i dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Exprimer le vecteur ligne $(v_1, \dots, v_n)$ en fonction de Q et du vecteur ligne $((v | e_1), \dots, (v | e_n))$.

Dans la suite du problème, on désigne par U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, par $u = (u_1, \dots, u_n)$ un élément quelconque de U , par F une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$, par $\partial_i F$ (resp. $\partial_i \partial_j F$) ses dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2). On suppose que les n vecteurs $(\partial_i F)(u)$ sont linéairement indépendants pour tout u , et on pose $W(u) = W((\partial_1 F)(u), \dots, (\partial_n F)(u))$.

4. a) Vérifier que l'application $u \mapsto W(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

- b) Comparer $((\partial_k W)(u) | (\partial_i F)(u))$ et $(W(u) | (\partial_i \partial_k F)(u))$.

- c) Démontrer l'existence et l'unicité de nombres réels $a_{i,j}(u)$ tels que l'on ait

$$(\partial_i W)(u) = \sum_j a_{i,j}(u) (\partial_j F)(u).$$

- d) On note respectivement $A(u)$, $S(u)$, $Q(u)$ les matrices de coefficients respectifs $a_{i,j}(u)$, $(W(u) | \partial_i \partial_j F)(u)$, $((\partial_i F)(u) | (\partial_j F)(u))$. Vérifier que $A(u) = -S(u)Q(u)^{-1}$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose $n = 2$; on a donc un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une application F de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^3$ telle que les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ soient linéairement indépendants pour tout u de U . On a en outre

$$W(u) = \frac{(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)}{\|(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)\|}$$

où $\cdot \wedge \cdot$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On pose

$$K(u) = \det A(u), \quad H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A(u))$$

où $A(u)$ est la matrice définie à la question 4.d). On note $F_i(u)$, $i = 1, 2, 3$, les composantes de $F(u)$; on suppose que U contient le point 0 et on fait l'étude de la surface $F(U)$ au voisinage du point $F(0)$.

5. Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$. Montrer que les objets $\hat{K}(0)$ et $\hat{H}(0)$ associés à l'application $\hat{F} = R \circ F$ sont égaux respectivement à $K(0)$ et $H(0)$.

6. On suppose que, pour u suffisamment voisin de 0, $F(u)$ est de la forme

$$F(u) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

avec $f(0) = (\partial_1 f)(0) = (\partial_2 f)(0) = 0$.

- a) Calculer $K(0)$ et $H(0)$ en fonction des nombres

$$r = (\partial_1 \partial_1 f)(0), \quad s = (\partial_1 \partial_2 f)(0), \quad t = (\partial_2 \partial_2 f)(0).$$

- b) (Cas d'un cylindre) On suppose que $f(u_1, u_2)$ est fonction de u_1 seul, soit $f(u_1, u_2) = g(u_1)$. Exprimer $H(0)$ en fonction de la courbure de la courbe Γ , intersection du cylindre avec le plan $x_2 = 0$.

7. Dans cette question, on considère le cas d'une surface de révolution :

$$F(u) = (f(u_1) \cos u_2, f(u_1) \sin u_2, u_1)$$

où f est une fonction strictement positive de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle I .

a) Dire pour quelles valeurs de u les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ sont linéairement indépendants.

b) Vérifier que

$$A(u) = f(u_1)^{-1} (1 + f'(u_1)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} f(u_1)f''(u_1) & 0 \\ 0 & -(1 + f'(u_1)^2)^2 \end{pmatrix}.$$

c) Donner une fonction f élémentaire pour laquelle $H(u)$ est nul pour tout u .

d) Montrer que, pour tous nombres réels α et β , $\alpha > 0$, il existe f satisfaisant

$$H(u) = 0 \text{ pour tout } u, f(0) = \alpha, f'(0) = \beta.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

e) Calculer $K(u)$ pour une telle fonction f .

8. Indiquer, sans aucun calcul, des surfaces pour lesquelles $K(u)$ et $H(u)$ sont des constantes.

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet d'un changement de paramétrage sur les fonctions H et K .

Dans la situation du début de la deuxième partie on note $\frac{\partial F}{\partial u}$ la matrice (jacobienne) de coefficients $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_{i,j} =$

$\partial_j F_i$. Notation analogue pour $\frac{\partial W}{\partial u}$.

9. Vérifier que $\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} {}^t A(u)$.

On se donne maintenant un difféomorphisme Φ de U sur un autre ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et on pose $\Psi = \Phi^{-1}$.

Pour tout $u \in U$ on écrira aussi $\tilde{u} = \Phi(u)$; on pose $\tilde{F}(\tilde{u}) = F(u)$, c'est-à-dire $\tilde{F} = F \circ \Psi$, et on note $\tilde{W}(\tilde{u})$, $\tilde{A}(\tilde{u})$, $\tilde{K}(\tilde{u})$, $\tilde{H}(\tilde{u})$ les objets définis à partir de $\tilde{F}$ et $\tilde{u}$ comme $W(u)$, $A(u)$, $K(u)$, $H(u)$ l'ont été à partir de F et u . On suppose U connexe par arcs.

10. a) Exprimer $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$, puis $(\partial_1 \tilde{F})(\tilde{u}) \wedge (\partial_2 \tilde{F})(\tilde{u})$ en fonction de $(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)$ et $\det \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tel que l'on ait $\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u)$ pour tout $u \in U$.

c) Exprimer $\tilde{A}(\tilde{u})$ en fonction de ε , $A(u)$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

d) Comparer $\tilde{H}(\tilde{u})$ et $H(u)$, $\tilde{K}(\tilde{u})$ et $K(u)$.

❑ Problème : Mines-Ponts 2004, MP

Soit φ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\text{si } |t| < 1, \varphi(t) = \exp \left(\frac{1}{t^2 - 1} \right); \quad \text{si } |t| \geq 1, \varphi(t) = 0.$$

. Un difféomorphisme f de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ est dit difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ si la fonction f est indéfiniment dérivable.

Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

18. Démontrer que la restriction φ_I de la fonction φ à l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ est indéfiniment dérivable et que, pour tout entier n , il existe un polynôme P_n tel que la dérivée $\varphi_I^{(n)}$ de φ_I d'ordre n s'écrive sous la forme suivante :

$$\varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2 - 1)^2} \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right).$$

19. En déduire que la fonction φ est indéfiniment dérivable sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Justifier, sans calcul, l'existence d'un majorant M de la valeur absolue de la dérivée première φ' sur la droite réelle :

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|.$$

Étant donné un réel λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), soit ψ_λ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\psi_\lambda(x) = x + \lambda \varphi(x).$$

20. Démontrer que, si la valeur absolue du réel λ est strictement majorée par $1/M$, ($|\lambda| < 1/M$), la fonction ψ_λ est une bijection de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$.

Quelle est, dans ces conditions ($|\lambda| < 1/M$), l'image du segment $\bar{I} = [-1, 1]$ par l'application $x \mapsto \psi_\lambda(x)$? Que dire de la restriction de l'application $x \mapsto \psi_\lambda(x)$ aux demi-droites fermées $]-\infty, -1]$ et $[1, \infty[$?

Un difféomorphisme de classe C^1 du plan $\mathbb{R}^2$, défini par des fonctions indéfiniment dérivables est appelé difféomorphisme de classe C^∞ .

Difféomorphismes du plan $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ :

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne et rapporté à un repère orthonormé Oxy .

Étant donné un réel λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), un réel strictement positif r ($r > 0$) et un point P du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (p, q) , soit $\theta_{\lambda, r}^P$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par la relation suivante :

$$\theta_{\lambda, r}^P : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \lambda \varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right) \\ y \end{pmatrix}.$$

L'image du point de coordonnées (x, y) par l'application $\theta_{\lambda, r}^P$ est le point de coordonnées :

$$\left(x + \lambda \varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right), y \right).$$

21. Quelle est l'image par cette application $\theta_{\lambda, r}^P$ du point P ? du cercle C_r^P de centre le point P et de rayon égal à r ? de l'ouvert Ω_r^P des points du plan situé à une distance du point P strictement supérieure à r ?

Existence de difféomorphismes du plan de classe C^∞ :

22. Démontrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que, si le réel λ a une valeur absolue strictement inférieure à m ($|\lambda| < m$), l'application $\theta_{\lambda, r}^P$ est une bijection du plan $\mathbb{R}^2$ sur lui-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

Soient n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ du plan $\mathbb{R}^2$, deux à deux distincts, et deux points B et B' , distincts entre eux et distincts des points A_i , $1 \leq i \leq n$. Les coordonnées des points A_i , $1 \leq i \leq n$, sont (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$; celles de B et B' respectivement (b, c) et (b', c') .

Le but des questions 23 à 26 est de montrer qu'il existe un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ transformant B en B' et laissant les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ invariants. Un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ laissant les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ invariants est dit avoir la propriété $\mathcal{A}$.

Il est admis que l'ensemble des difféomorphismes de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ est un groupe pour la loi de composition des applications. Trois cas sont envisagés :

1^{er} cas : Les points B et B' ont même ordonnée ; les ordonnées des points A_i , $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B ($y_i \neq c = c'$).

23. Démontrer, dans ce cas, que, si les points B et B' sont suffisamment proches, il existe une application $\theta_{\lambda, r}^P$ transformant B en B' et laissant les A_i , $1 \leq i \leq n$ invariants.

24. Démontrer, toujours dans ce cas, que, quelle que soit la position des points B et B' , il existe une suite finie de bijections $\theta_{\lambda_i, r_i}^{P_i}$, $0 \leq i \leq k$, telle que la composée F de ces applications transforme B en B' et ait la propriété $\mathcal{A}$.

$$F = \theta_{\lambda_k, r_k}^{P_k} \circ \theta_{\lambda_{k-1}, r_{k-1}}^{P_{k-1}} \circ \dots \circ \theta_{\lambda_0, r_0}^{P_0}.$$

2^{ième} cas : Les points B et B' ont même abscisse ; les abscisses des points A_i , $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B ($x_i \neq b = b'$).

25. Indiquer comment modifier l'application $\theta_{\lambda, r}^P$ en $\eta_{\lambda, r}^P$ pour construire un endomorphisme G transformant B en B' et ayant la propriété $\mathcal{A}$.

☒ Corrigé Problème I : Pr. Duval, CPGE France

Première partie

- 1a) $(V | x^{(\ell)}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k x_k^{(\ell)} \det(X_k)$ où X est la matrice de terme général $x_j^{(i)}$ et X_k la matrice déduite de X en supprimant la k -ème ligne. La somme précédente est égale à l'opposé au déterminant de la matrice X complétée par la colonne $x^{(\ell)}$ sur sa gauche. Cette matrice a deux colonnes égales donc son déterminant vaut zéro.
- 1b) $V = 0$ si et seulement si tous les mineurs d'ordre n extraits de X sont nuls, ce qui équivaut au fait que $\text{rg}(X) < n$, ou aussi à la liaison de la famille $(x^{(i)})$.
- 1c) En reprenant le raisonnement de 1a, pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^{n+1}$ on a $(u | V) = \det(u, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, déterminant calculé dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. En particulier $\|V\|^2 = \det(V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$.
- 2a) Si $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est libre alors le vecteur $W = V/\|V\|$ vérifie i et ii. Par ailleurs, $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}^\perp$ est une droite vectorielle (orthogonal d'un hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$) donc les seuls vecteurs orthogonaux à tous les $x^{(i)}$ sont les multiples de W et les conditions i et ii imposent que le coefficient de proportionnalité vaut 1. Ceci prouve l'unicité de W .
- 2b) La notion de rotation n'est pas claire. S'agit-il de la composée de deux réflexions ou d'un endomorphisme orthogonal positif quelconque (les deux notions coïncident en dimension 2 et 3, la deuxième est plus générale dans le cas n quelconque) ? On considère ici qu'il s'agit d'un endomorphisme orthogonal positif. Soit donc $R \in \mathcal{O}^+(\mathbf{R}^{n+1})$ et $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ une famille libre de $\mathbf{R}^{n+1}$. La famille image est aussi libre par injectivité de R . De plus, comme R conserve la norme et le produit scalaire, on a $R(W) \perp R(x^{(i)})$ pour tout i et $\|R(W)\| = 1$. Enfin, $\det(R(W), R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})) = \det(R) \det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) > 0$ car $\det(R) = 1$.
- 3a) Q est diagonalisable car symétrique réelle. La forme quadratique q associée à Q est définie par $q(a_1, \dots, a_n) = \|a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\|^2$, donc elle est définie positive puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. On en déduit $\text{Spec}(Q) \subset \mathbf{R}^{+*}$ et en particulier Q est inversible.
- 3b) $(v | e_i) = (v_1 \dots v_n) Q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le « 1 » est en i -ème ligne. On en déduit : $((v | e_1) \dots (v | e_n)) = (v_1 \dots v_n) Q$.
- 4a) Chaque vecteur $x^{(i)} = \partial_i F(u)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de u . Le vecteur V défini en 1 est une fonction polynomiale des $x_j^{(i)}$, donc est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et $V \neq 0$ pour tout u par hypothèse. On en déduit que $\|V\|$ et $W = V/\|V\|$ sont aussi des fonctions de u de classe $\mathcal{C}^1$.
- 4b) En dérivant la relation $(W(u) | \partial_i F(u)) = 0$ par rapport à la k -ème coordonnée de u et à l'aide du théorème de Schwarz on obtient : $(\partial_k W(u) | \partial_i F(u)) = -(W(u) | \partial_k \partial_i F(u)) = -(W(u) | \partial_i \partial_k F(u))$.
- 4c) De même, la relation $(W(u) | W(u)) = 1$ donne par dérivation : $(W(u) | \partial_i W(u)) = 0$. Donc le vecteur $\partial_i W(u)$ appartient à $W(u)^\perp = \langle \partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u) \rangle$. Les coefficients $a_{ij}(u)$ sont les composantes de $\partial_i W(u)$ dans la base $(\partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u))$ de $W(u)^\perp$, d'où leur existence et leur unicité.
- 4d) Conséquence immédiate des résultats obtenus en 3b et 4b.

Deuxième partie

- 5) R étant linéaire, $\partial_i \hat{F} = R \circ (\partial_i F)$ donc $\hat{W} = R \circ W$ d'après 2b. Comme R conserve le produit scalaire et commute avec les dérivations, on en déduit $\hat{S} = S$ et $\hat{Q} = Q$, d'où $\hat{A} = A$ d'après 4d, et enfin $\hat{K} = K$, $\hat{H} = H$.

6a) $\partial_1 F(u) = (1, 0, \partial_1 f(u))$, $\partial_2 F(u) = (0, 1, \partial_2 f(u))$ donc $W(u) = (-\partial_1 f(u), -\partial_2 f(u), 1) / \sqrt{(\partial_1 f(u))^2 + (\partial_2 f(u))^2 + 1}$ et $W(0) = (0, 0, 1)$. $S(0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, $Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A(0) = -S(0)$ d'où $K(0) = rt - s^2$, $H(0) = -\frac{r+t}{2}$.

6b) Ici $s = t = 0$ donc $H(0) = -\frac{1}{2}r$. Pour définir la courbure d'une courbe dans le plan d'équation $x_2 = 0$, il est nécessaire d'orienter ce plan. On convient de l'orienter de sorte que la base (e_3, e_1) soit directe (ce qui revient à orienter la normale $\langle e_2 \rangle$ dans le sens de e_2). D'après la relation générale $c = \det(\vec{M}', \vec{M}'') / \|\vec{M}'\|^3$ donnant la courbure d'une courbe plane paramétrée, on a ici $c(0) = -r$ donc $H(0) = \frac{1}{2}c(0)$.

7a) $\partial_1 F(u) = (f'(u_1) \cos u_2, f'(u_1) \sin u_2, 1)$ et $\partial_2 F(u) = (-f(u_1) \sin u_2, f(u_1) \cos u_2, 0)$ sont liés si et seulement si $\partial_2 F(u) = 0$ vu la troisième composante, soit si et seulement si $f(u_1) = 0$, ce qui est exclu dans l'énoncé.

7b) Calcul sans difficulté.

7c) On veut $ff'' = 1 + f'^2$, ce qui est réalisé pour $f(t) = \text{ch } t$ par exemple. La surface obtenue est appelée *caténoïde*, voir <http://www.mathcurve.com/surfaces/catenoid/catenoid.shtml> pour une description de cette surface et de ses propriétés.

7d) En essayant $f(t) = \lambda \text{ch}(\mu t + \nu)$ on obtient les équations : $\lambda^2 \mu^2 = 1$, $\lambda \text{ch } \nu = \alpha$, $\lambda \mu \text{sh } \nu = \beta$ qui ont pour solution $\nu = \text{argsh } \beta$, $\lambda = \alpha / \sqrt{1 + \beta^2}$ et $\mu = 1/\lambda$.

Interprétation géométrique : $f(0) = \alpha$ est la distance du point $F(0)$ à l'axe de révolution et $f'(0) = \beta$ est la pente de la méridienne passant par $F(0)$. On vient donc de constater que *par tout point du plan $\langle e_1, e_2 \rangle$ autre que l'origine et pour toute droite sécante à $\langle e_3 \rangle$ passant par ce point, il existe une surface de révolution autour de $\langle e_3 \rangle$ à courbure moyenne nulle, passant par ce point et tangente à cette droite...*

7e) $K(u) = \frac{-f''(u_1)}{f(u_1)(1 + f'^2(u_1))^2} = \frac{-\mu^2}{\text{ch}^4(\mu u_1 + \nu)}$.

8) En prenant f constante non nulle, la matrice A est constante et donc K et H le sont. Les surfaces correspondantes sont les cylindres de révolution autour de $\langle e_3 \rangle$. On peut aussi penser aux sphères d'axe $\langle e_3 \rangle$, soit $f(t) = \sqrt{R^2 - t^2}$, qui conviennent (avec un peu de calcul) : $A(u) = I/R$ où I est la matrice identité.

Troisième partie

9) Conséquence immédiate de 4c.

10a) Remarque : la classe de Φ n'est pas précisée. On suppose ici que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}} = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi \right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} \text{ (produit de matrices jacobiniennes).}$$

En notant $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a donc $\partial_1 \tilde{F} = (a\partial_1 F + c\partial_2 F) \circ \Psi$ et $\partial_2 \tilde{F} = (b\partial_1 F + d\partial_2 F) \circ \Psi$,

d'où $\partial_1 \tilde{F} \wedge \partial_2 \tilde{F} = (ad - bc)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi) = \det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi)$.

10b) D'après la relation précédente, $\tilde{W} = \text{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)\right)(W \circ \Psi)$, et le signe de $\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est constant sur $\tilde{U}$ ($\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est une fonction continue jamais nulle et $\tilde{U} = \Phi(U)$ est connexe par arcs).

10c) $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\frac{\partial W}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} \times \mathbf{A}\right) \circ \Psi\right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi\right) \times (\mathbf{A} \circ \Psi) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}\right) \times \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)^{-1} (\mathbf{A} \circ \Psi) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

La matrice $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ est inversible puisque $\frac{\partial F}{\partial u}$ l'est. On en déduit : $\tilde{A}(\tilde{u}) = \varepsilon^t\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right) \times A(u) \times \varepsilon^t\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)^{-1}$.

10d) En prenant la demi-trace et le déterminant : $\tilde{H}(\tilde{u}) = \varepsilon H(u)$ et $\tilde{K}(\tilde{u}) = K(u)$.

❑ Corrigé Problème II : Pr. Patte, CPGE France

Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

18. La fonction φ_I est la composée de l'exponentielle et d'une fonction rationnelle sans pôle dans I , donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Soit $n \in \mathbb{N}$.

S'il existe un polynôme P_n tel que $\forall t \in I, \varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$, alors $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned} \varphi_I^{(n+1)}(t) &= \left(\frac{P'_n(t)}{(t^2-1)^{2n}} + P_n(t) \frac{-2n \cdot 2t}{(t^2-1)^{2n+1}} + \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}} \cdot \frac{-2t}{(t^2-1)^2} \right) \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{(t^2-1)^2 P'_n(t) - 4nt(t^2-1)P_n(t) - 2tP_n(t)}{(t^2-1)^{2(n+1)}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

Donc, avec le polynôme $P_{n+1}(t) = (t^2-1)^2 P'_n(t) - 4nt(t^2-1)P_n(t) - 2tP_n(t)$, on obtient :

$$\forall t \in I, \varphi_I^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)}{(t^2-1)^{2(n+1)}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).$$

Comme $\forall t \in I, \varphi_I^{(0)}(t) = \varphi_I(t) = \frac{P_0(t)}{(t^2-1)^{2 \cdot 0}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$ avec $P_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[X], \forall t \in I, \varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).$$

19. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions à $] -\infty, -1[$, $] -1, 1[$ et $] 1, +\infty[$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi^{(n)}$ a pour limite 0 en 1 et en -1 (en 1 à gauche et en -1 à droite par croissances comparées). Donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Comme φ' est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors du compact $[-1, 1]$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. D'où l'existence de $M = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'|$.

20. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction ψ_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \psi'_\lambda(x) = 1 + \lambda \varphi'(x)$. Comme $|\lambda \varphi'(x)| \leq |\lambda| M$, si $|\lambda| < 1/M$, alors $\psi'_\lambda(x) \geq 1 - |\lambda| M > 0$ et la fonction ψ_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Mieux, c'est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\psi_\lambda(\mathbb{R}) =] \lim_{-\infty} \psi_\lambda, \lim_{+\infty} \psi_\lambda[$.

De plus, si $x \notin [-1, 1]$, $\psi_\lambda(x) = x$. Donc $\lim_{+\infty} \psi_\lambda = +\infty$. De même que $\lim_{-\infty} \psi_\lambda = -\infty$. Donc la fonction ψ_λ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

21. Par la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$, le point P est envoyé sur le point de coordonnées $(p + \frac{\lambda}{e}, q)$. En notant $M = (x, y)$ et PM la distance usuelle de P à M , on a $\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2} = \frac{PM^2}{r^2}$ et $\varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right) = 0$ dès que $PM \geq r$. Donc la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$ fixe tout point hors du disque ouvert de centre P et de rayon r ; en particulier les points du cercle C_r^P et de l'ouvert Ω_r^P .

Existence de difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

22. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le plan $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème d'inversion globale, il suffit que la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$ soit bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que son jacobien ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ pour que ce soit un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Étude du jacobien : au point (x, y) , il vaut :

$$J(x, y) = \det \begin{pmatrix} 1 + \lambda \frac{2(x-p)}{r^2} \varphi' \left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2} \right) & * * * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 + \lambda \frac{2(x-p)}{r^2} \varphi' \left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2} \right).$$

Si $(x-p)^2 + (y-q)^2 \geq r^2$, alors $J(x, y) = 1$; sinon $|x-p| \leq r$, donc $\left| \lambda \frac{2(x-p)}{r^2} \varphi' \left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2} \right) \right| \leq \frac{2|\lambda|M}{r}$, donc $J(x, y) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$.

Finalement, sur tout le plan, $J(x, y) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$.

Donc, si on choisit λ et r tels que $1 - \frac{2|\lambda|M}{r} > 0$, i.e. $|\lambda| < \frac{r}{2M}$, le jacobien J ne s'annule pas sur le plan.

Bijektivité de $\theta_{\lambda,r}^P$ sous cette condition en λ :

Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X, Y) = \theta_{\lambda,r}^P(x, y)$. Or

$$(X, Y) = \theta_{\lambda,r}^P(x, y) \Leftrightarrow X = x + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right) \text{ et } Y = y \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow y = Y \text{ et } X = f(x)$$

où $f(x) = x + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (Y-q)^2}{r^2}\right)$. Il suffit donc de montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ pour obtenir l'existence et l'unicité de (x, y) tel que $(X, Y) = \theta_{\lambda,r}^P(x, y)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = 1 + \lambda \frac{2(x-p)}{r^2} \varphi'\left(\frac{(x-p)^2 + (Y-q)^2}{r^2}\right) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$. Comme $1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$ est une constante strictement positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; mieux, f est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Au voisinage de l'infini, $\frac{(x-p)^2 + (Y-q)^2}{r^2} > 1$, donc $f(x) = x$ et, comme à la question 20, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, sous la condition $|\lambda| < \frac{r}{2M}$, la fonction $\theta_{\lambda,r}^P$ est bijective du plan sur lui-même. Avec l'étude du jacobien, $\theta_{\lambda,r}^P$ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

23. L'application $\theta_{\lambda,r}^B$ transforme B en B' dès que $b' = b + \frac{\lambda}{e}$, i.e. $\lambda = e(b' - b)$. C'est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme du plan si $|\lambda| < \frac{r}{2M}$. Elle laisse les points A_i invariants dès que $\forall i, BA_i \geq r$, i.e. $r \leq \min_{1 \leq i \leq n} BA_i$.

Il suffit donc de trouver un couple (λ, r) tel que $\lambda = e(b' - b)$ et $2M|\lambda| < r \leq \min_{1 \leq i \leq n} BA_i$, i.e. $\lambda = e(b' - b)$

et $2Me|b' - b| < r \leq \min_{1 \leq i \leq n} BA_i$. C'est possible dès que $2Me|b' - b| < \min_{1 \leq i \leq n} BA_i$, i.e. $|b' - b| < \frac{\min_{1 \leq i \leq n} BA_i}{2Me}$.

On pose alors $\lambda = e(b' - b)$; on choisit r dans l'intervalle $[2Me|b' - b|, \min_{1 \leq i \leq n} BA_i]$: l'application $\theta_{\lambda,r}^B$ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme du plan transformant B en B' et conservant les points A_i .

Remarque : on peut remplacer $\min_{1 \leq i \leq n} BA_i$ par $\min_{1 \leq i \leq n} |y_i - c|$ sans changement.

24. On partage le segment $[B, B']$ en $k+1$ sous-segments de sorte que $\frac{|b' - b|}{k+1} < \frac{\min_{1 \leq i \leq n} |y_i - c|}{2Me}$. On note B_i le point de coordonnées $(b + i\frac{b' - b}{k+1}, 0)$. Les couples (B_i, B_{i+1}) vérifient les hypothèses de la question 23 : $B_i B_{i+1} = \frac{|b' - b|}{k+1} < \frac{\min_{1 \leq i \leq n} |y_i - c|}{2Me}$. On pose alors $\lambda = e\frac{(b' - b)}{k+1}$; on choisit r dans l'intervalle $[2Me\frac{|b' - b|}{k+1}, \min_{1 \leq i \leq n} |y_i - c|]$: l'application $\theta_{\lambda,r}^{B_i}$ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme du plan transformant B_i en B_{i+1} et conservant les points A_j . L'application $F = \theta_{\lambda,r}^{B_k} \circ \dots \circ \theta_{\lambda,r}^{B_1} \circ \theta_{\lambda,r}^{B_0}$ est alors un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme du plan transformant B en B' et conservant les points A_j .

25. On échange le rôle des coordonnées : on utilise l'application $\eta_{\lambda,r}^P$ définie par $\eta_{\lambda,r}^P(x, y) = \left(x, y + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right)\right)$.

26. Deux cas :

Cas particulier : aucun point A_i n'appartient à la droite (BB') .

On se ramène au cas étudié dans la question 24 par rotation. On note θ l'angle entre l'axe $y = 0$ et la droite (BB') et, pour $\tau \in \mathbb{R}$, on note R_τ la rotation d'angle τ autour de l'origine. Les points $\hat{B} = R_{-\theta}(B)$ et $\hat{B}' = R_{-\theta}(B')$ et la suite finie constituée des points $\hat{A}_i = R_{-\theta}(A_i)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ sont dans la configuration de la question 24. On considère un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme du plan : F , transformant $\hat{B}$ en $\hat{B}'$ et conservant les points $\hat{A}_i$. Soit $G = R_\theta \circ F \circ R_{-\theta}$. Comme les rotations sont des $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphismes du plan, G aussi et G transforme B en B' et conserve les points A_i .

Cas général : on utilise un point A tel qu'aucun point A_i n'appartienne aux droites (BA) et (AB') .

D'après le cas particulier, il existe des $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphismes du plan F_1 et F_2 conservant les points A_i et transformant respectivement B en A et A en B' . L'application $F_2 \circ F_1$ est un $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme du plan conservant les points A_i et transformant B en B' .

Existence de A : il suffit de choisir A sur le cercle (C) de diamètre $[B, B']$ autre que B, B' , et les points (en nombre fini) d'intersection du cercle (C) et des droites (BA_i) et $(B'A_i)$.

27. On procède par récurrence sur n .

Devoir Surveillé

1 Calcul Différentiel, Courbes & Surfaces

Blague du jour

Lors d'un discours prononcé devant une assemblée de professeurs de mathématiques, George W. Bush les met en garde contre le mauvais usage des mathématiques pour inculquer aux jeunes américains des visions politiques extrémistes.

Si j'ai bien compris, dit le président, dans vos cours d'algèbre vous apprenez à vos étudiants la résolution des problèmes et d'équations avec l'aide des radicaux. Je ne peux pas dire que j'approuve ceci...



Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813)

En italien Giuseppe Lodovico Lagrangia, est un mathématicien, mécanicien et astronome franco-italien. N en Italie, mais de famille française par son arrière-grand-père.

Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, son nom figure partout en mathématiques. Il développe la mécanique analytique, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie. Il élabore le système métrique avec Lavoisier et enseigne les mathématiques à l'école normale et à l'école polytechnique.

Mathématicien du jour

❑ Problème : extrait cnc 2007, PSI

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orienté de direction $\vec{E}$, et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ de $\vec{E}$ se notera $(\vec{e}_1 | \vec{e}_2)$.

Un point M de E peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birégulier et un point M de γ , on note :

- s l'abscisse curviligne de M sur γ ,

- $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent à γ en M et $\vec{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\vec{T}, \vec{N}) = \frac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M ,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\vec{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \frac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\vec{u}(\theta), \vec{T})$ et α l'angle $(\vec{i}, \vec{T})$.

Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1 + \cos \theta$ et on note φ l'application de $\mathbf{R}$ vers E définie par $\theta \mapsto O + (1 + \cos \theta)\vec{u}(\theta)$.

- ① Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.
- ② Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.
- ③ Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 à partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0, \pi], \psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0, \pi]$.
- ② Préciser la nature du pôle O , point du support de γ_1 de paramètre π .
- ③ Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O . Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.
- ④ Étudier la fonction $\rho : \theta \mapsto 1 + \cos \theta$ sur le segment $[0, \pi]$ et dresser son tableau de variations.
- ⑤ Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).
- ⑥ Calculer la longueur de l'arc γ_2 .
- ⑦ Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1 .

Deuxième partie

A- Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orienté dans le sens des θ croissants.

On rappelle que $\vec{MI} = R\vec{N}$, $R = \frac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \frac{f}{f'}$.

- ① Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ , distinct du pôle O , les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ et les angles θ , V et α .
- ② Rappeler la définition de s et exprimer $\frac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f' .
- ③ Calculer $\frac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R .
- ④ Exprimer les coordonnées de I , centre de courbure de γ en M , dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

B- Retour à l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 orientée dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1 , distinct du pôle O , on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

- ① Préciser les coordonnées de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- ② Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta + \pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .
- ③ On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $(OM(\theta))$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ .
- ④ On note γ_I et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de γ_1 , γ_I et γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.
- ⑤ Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.

❏ Exercice I : extrait e3a 2007, MP

✦ Exercice I : extrait e3a 2008, MP

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$:

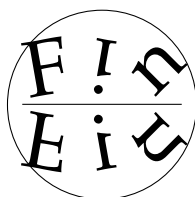
$$f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2).$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f .
 - 1a). Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
 - 1b). Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0) .
 - 1c). Démontrer que les points (x_0, y_0) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ sont exactement les points $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.
 - 1d). Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $(h, k) \mapsto f(1 + h, k)$ au voisinage de $(0, 0)$. Le point $(1, 0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ?
 - 1e). De même, le point $(-1, 0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ? Justifier votre réponse.
 - 1f). Quels sont les extrema locaux de f ? On énoncera avec soin le théorème utilisé.
2. Désormais, soit g la fonction définie sur le disque unité D par $g(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.
 - 2a). Justifier que g admet un maximum A et un minimum a sur D .
 - 2b). Démontrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C .
 - 2c). Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = 2 \cos t(2 \cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les points de C sur lesquels f atteint cette valeur.
 - 2d). Déterminer la valeur de a et les points de C sur lesquels g atteint cette valeur.



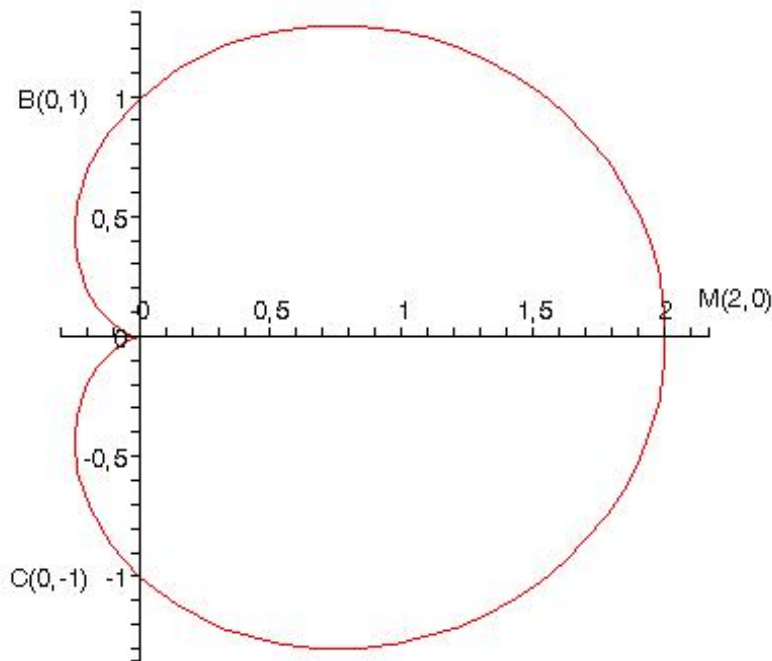
À la prochaine

❑ Corrigé Problème : Pr. Chabchi, CPGE Marrakech

PARTIE I

1. .
 - (a) Le domaine de définition de ρ est $\mathbb{R}$ et ρ est 2π -périodique.
 - (b) Par parité de la fonction cosinus, ρ est aussi paire, donc l'arc γ_1 est symétrique par rapport à l'axe $(O \vec{i})$.
 - (c) Le support de γ_1 est obtenu en prenant le support de γ_2 union son symétrique par rapport à l'axe $(O \vec{i})$.
2. Le pôle O est paramétré par $\theta = \pi$, de plus $\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos(\pi) = 1 \neq 0$. Puisque 2 est pair alors le pôle O est un point de rebroussement du premier espèce et la tangente est portée par $\vec{u}(\pi)$, c'est-à-dire horizontale.
3. Soit $M_0 = \phi(\theta_0)$ un point de γ_1 autre que le pôle O , donc $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ avec $\theta_0 \neq \pi$. On a alors

$$\rho^2(\theta_0) + 2(\rho'(\theta_0))^2 - \rho(\theta_0)\rho''(\theta_0) = 3(1 + \cos(\theta_0)) > 0.$$
 Ainsi la concavité de γ_1 en M_0 est tournée vers le pôle O (ou contient le pôle O).
4. On a la fonction ρ est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\rho'(\theta) = -\sin(\theta) \leq 0$. Donc est décroissante sur $[0, \pi]$: elle décroît de la valeur $\rho(0) = 2$ à la valeur $\rho(\pi) = 0$.
5. Le tracé est ci-contre :



- La tangente à l'origine est horizontale
- Le point $M(2, 0)$ est paramétré par $\theta = 0$, puisque $\rho(0) = 2 \neq 0$ et $\rho'(0) = 0$, la tangente est alors portée par $v(0) = \vec{j}$ c'est-à-dire verticale.

- Le point $B(0,1)$ est paramétré par $\theta = \frac{\pi}{2}$, puisque $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Si $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right), \vec{T}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ désigne l'angle que le vecteur $\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ avec le vecteur tangent, alors ici $\tan\left(V\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$, donc $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$. Dans $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ cette tangente a pour équation : $y = x + 1$
- Par symétrie, la tangente en $C(0,-1)$ dans $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ a pour équation : $y = -x - 1$.

6. L'arc γ_1 étant de classe C^1 , donc sa longueur $l(\gamma_1)$ est donnée par : $l(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} \|\phi'(\theta)\| d\theta = 2 \int_0^{\pi} \|\phi'(\theta)\| d\theta$ par symétrie, donc

$$l(\gamma_1) = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2(\theta) + (1 + \cos(\theta))^2} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos(\theta))} d\theta = 2 \int_0^{\pi} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8$$

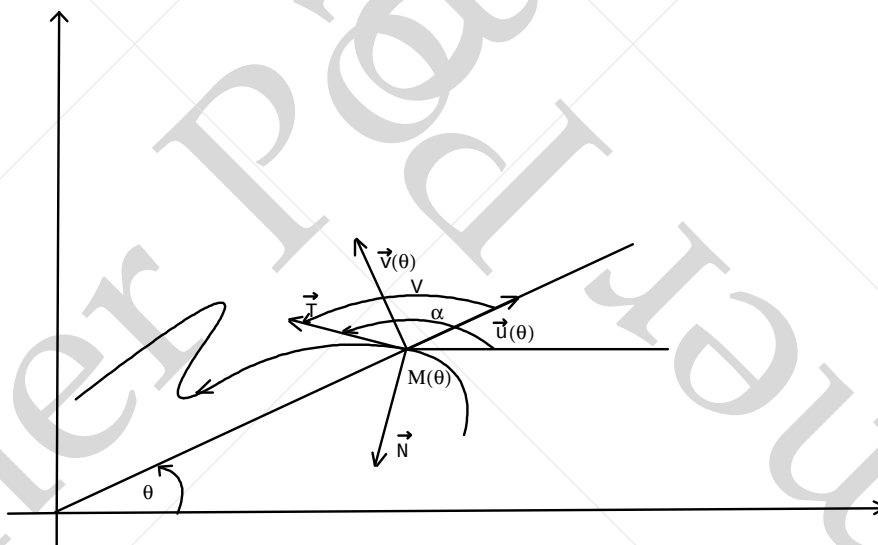
7. L'aire cherché est donnée par la formule de Green-Reimman en polaire: $\text{Aire}(\gamma_1) = \frac{1}{2} \int_{\partial\gamma_1} \rho^2 d\theta$: il s'agit ic d'intégrale curviligne, où $\overleftarrow{\partial\gamma_1}$ désigne la frontière de γ_1 orienté dans le sens direct.

$$\text{Donc } \text{Aire}(\gamma_1) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos(\theta) + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

PARTIE II

A- Questions de cours

- Voir figure ci-contre : (permettez mes outils de dessin vectoriel modestes!)



- L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible de l'arc γ , elle consiste à choisir une origine et de paramétrer chaque point par la longueur (algébrique) de l'arc joignant ce point à l'origine. dans ce cas la courbe est parcourue à vitesse uniforme valant 1.

On choisit pour origine $\theta = 0$, et on oriente γ dans le sens des θ croissant. Alors $s(\theta) = \int_0^{\theta} \|(f(t)\vec{u}(t))'\| dt = \int_0^{\theta} \sqrt{f'^2(t) + f'^2(t)} dt$ et $\frac{ds}{d\theta}(\theta) = \sqrt{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)}$.

- D'abord la fonction angulaire V est dérivable selon le théorème de relèvement, et en dérivant la relation :

$\tan(V(\theta)) = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}$, on obtient :

$$V'(\theta)(1 + \tan^2(V(\theta))) = \frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)}. \text{ D'où } V'(\theta) = \frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)} \times \frac{1}{1 + \frac{f^2(\theta)}{f'^2(\theta)}} = \frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f^2(\theta)}$$

Par ailleurs (à la physicienne, que l'on justifie mathématiquement à l'aide de dérivée de composée), on a $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \times \left(\frac{d\alpha}{d\theta} \right)^{-1}$, or $\alpha = V + \theta$, donc $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta} = 1 + \left(\frac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)} \right)$, ainsi $\frac{d\alpha}{d\theta}(\theta) = \frac{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{(f^2(\theta) + f'^2(\theta))}$ et par suite : $R(\theta) = \frac{(f^2(\theta) + f'^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}$.

4. On a $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, donc les coordonnées de M dans le repère mobile $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ sont $\left(\cos\left(V + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(V + \frac{\pi}{2}\right) \right) = (-\sin V, \cos V)$ où V désigne l'angle $\widehat{(\vec{u}(\theta), \vec{T})}$.

B - Retour à l'arc γ_1

1. L'arc γ_1 privé de son pôle O est décrit lorsque θ parcourt l'intervalle $]-\pi, \pi[$, il est un arc birégulier. Commençons par déterminer l'abscisse curviligne orienté d'origine $\theta = 0$, puis la normale et le rayon de courbure :

- $s(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)} dt = \int_0^\theta \sqrt{4 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = 4 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $s'(\theta) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

- Vecteur tangent et normal : On a $\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \times \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ 1 + \cos \theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))}$,

Ainsi $V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ et $\alpha = V + \theta = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin V \\ \cos V \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))} = \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))}$

- Rayon de courbure : $R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} \times \frac{d\theta}{d\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

- Enfin $\overrightarrow{MI} = R\vec{N}$, donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))} + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} -\cos \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))}$,

d'où

$$\overrightarrow{OI}(\theta) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ -2 \sin \theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \cos \theta (1 - \cos \theta) \\ \sin \theta (1 - \cos \theta) \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$$

2. On a $\overrightarrow{OM}(\theta + \pi) = \begin{pmatrix} -\cos \theta (1 - \cos \theta) \\ -\sin \theta (1 - \cos \theta) \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$, alors le rapport de cette homothétie est $\lambda = -\frac{1}{3}$. Si

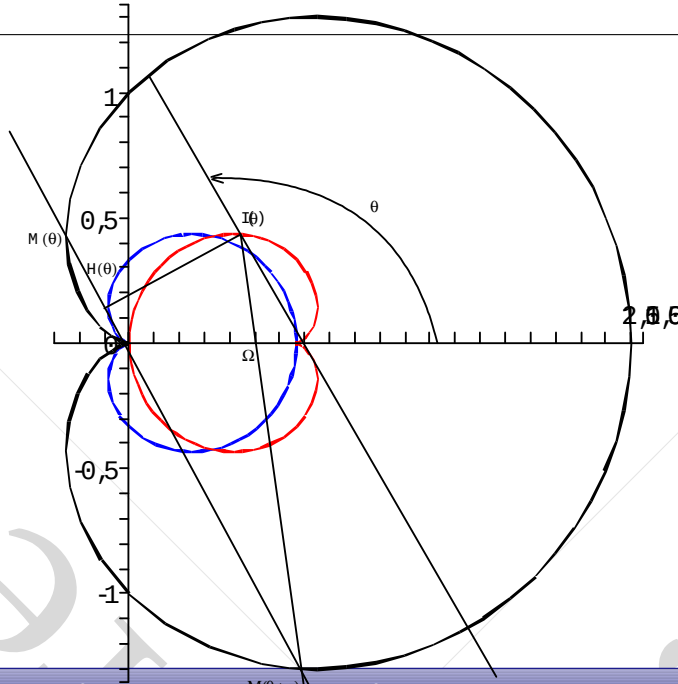
$\Omega = (a, b)$ désigne les coordonnées de son centre dans le repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors on aura $\overrightarrow{\Omega I}(\theta) = -\frac{1}{3} \overrightarrow{\Omega M}(\theta + \pi)$, donc $\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OI}(\theta) = -\frac{1}{3} \overrightarrow{\Omega O} - \frac{1}{3} \overrightarrow{OM}(\theta + \pi)$, en identifiant les coordonnées, on obtient $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. Ainsi le centre de cette homothétie est : $\Omega = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

3. On a $\overrightarrow{OI}(\theta) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ -2 \sin \theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))}$, donc $\overrightarrow{OH}(\theta) = \frac{1}{3} (1 + \cos \theta) \vec{u}(\theta)$. Ainsi $H(\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

4. Voir figure ci-dessous (Merci Maple) : En noir la cardioïde γ_1 , en rouge sa développée γ_I et en bleu la courbe γ_H . (Attention Daltoniens ...)

5. Puisque γ_H se déduit de γ_1 par homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$, alors selon I-(6) et I-(7), on a :

$$l(\gamma_H) = \frac{1}{3} l(\gamma_1) = \frac{8}{3} \text{ et } \text{Aire}(\gamma_H) = \frac{1}{3} \text{Aire}(\gamma_1) = \frac{\pi}{2}$$



❑ Corrigé Exercice I : Pr. Deyris, CPGE France

1a) La fonction f est un polynôme en x et y , donc est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$.

1b) On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3x_0^2 - 3(1 + y_0^2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -6x_0y_0$.

1c) C'est immédiat.

1d) On a, pour tout $(h, k) \in \mathbf{R}^2$: $f(1 + h, k) = (1 + 3h + 3h^2 + h^3) - 3(1 + h)(1 + k^2) = -2 + 3h^2 - 3k^2 + h^3 - 3hk^2$.

Prenons pour norme sur $\mathbf{R}^2$ la norme définie par $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ (les normes sur $\mathbf{R}^2$ étant toutes équivalentes, le choix de la norme n'influe pas sur le résultat). On a alors, pour tout $(h, k) \in \mathbf{R}^2$, $|h| \leq \|(h, k)\|$ et donc $|h^3| \leq \|(h, k)\|^3 = o(\|(h, k)\|^2)$ au voisinage de $(0, 0)$; de même, $hk^2 = o(\|(h, k)\|^2)$ au voisinage de $(0, 0)$. Par suite, toujours au voisinage de $(0, 0)$:

$$f(1 + h, k) = -2 + 3(h^2 - k^2) + o(\|(h, k)\|^2)$$

La forme quadratique $q : (h, k) \mapsto 3(h^2 - k^2)$ n'a pas un signe constant (par exemple $q(1, 0) > 0$ et $q(0, 1) < 0$) ; on sait qu'alors f ne présente pas d'extremum en $(1, 0)$.

1e) De même, on a $f(-1 + h, k) = 2 - 3(h^2 - k^2) + o(\|(h, k)\|^2)$ au voisinage de $(0, 0)$. Pour les mêmes raisons qu'en 1d), f ne présente pas d'extremum en $(-1, 0)$.

1f) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbf{R}^2$. On sait qu'alors, si elle présente un extremum local en un point, ce point est un point critique de f . Or on a vu que ses seuls points critiques sont $(1, 0)$ et $(-1, 0)$, et que f n'y a pas d'extremum ; par suite f n'a pas d'extremum local.

2a) La fonction g , restriction de f à D , est continue sur D . De plus, D est un fermé de $\mathbf{R}^2$ (image réciproque du fermé $[0, 1]$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$), et est clairement borné ; c'est donc un compact de $\mathbf{R}^2$.

On sait que toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes ; donc g a un maximum A en un point de D , et un minimum a en un point de D .

2b) Supposons que A soit atteint en un point (x_0, y_0) de $D' = D \setminus C$. Alors la restriction de g à D' présenterait un maximum en (x_0, y_0) . De plus, D' est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ (c'est le disque unité ouvert) et g est C^1 sur D' ; donc (x_0, y_0) serait un point critique de g , donc de f .

Or on a vu que les seuls points critiques de f sont $(1,0)$ et $(-1,0)$, qui n'appartiennent pas à D' ; les extremums de g ne peuvent donc pas être atteints en un point de D' , ils le sont donc forcément sur C .

2c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$: $g(\cos t, \sin t) = \cos^3 t - 3 \cos t(2 - \cos^2 t) = 2 \cos t(2 \cos^2 t - 3)$.
Quand t décrit $\mathbb{R}$, $\cos t$ décrit $[-1, 1]$. Étudions donc les variations de $\varphi : u \mapsto 2u(2u^2 - 3)$ sur $[-1, 1]$. On a, pour tout $u \in [-1, 1]$, $\varphi'(u) = 6(2u^2 - 1)$ d'où le tableau de variations :

u	-1	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1
$\varphi(u)$	2	$\nearrow 2\sqrt{2}$	$\searrow -2\sqrt{2}$	$\nearrow -2$

Puisque $(\cos t, \sin t)$ décrit C quand t décrit $\mathbb{R}$, et que $g(\cos t, \sin t) = \varphi(\cos t)$ pour tout t , le maximum de g sur C est atteint en chaque point $(\cos t, \sin t)$ pour lequel $\varphi(\cos t)$ est maximal, c'est à dire pour lequel $\cos t = -1/\sqrt{2}$. Par suite $A = 2\sqrt{2}$, et est atteint en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

2d) De même, $a = -2\sqrt{2}$ et est atteint en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

✉ Corrigé Exercice II : Pr. Lemaire, CPGE France

1.

(a) Tout d'abord le théorème de Schwarz permet avec des fonctions de classe C^2 de confondre $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ avec $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

S'il existe a de classe C^1 telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$ alors
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = a(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ d'où $f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f(x, y) a(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

On en déduit que f vérifie $(\mathcal{E})$.

Réciproquement, si f vérifie $(\mathcal{E})$ et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{f(x, y)}$. On a g de classe C^1 par TG et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)f(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)}{f(x, y)^2} = 0$, car f vérifie $(\mathcal{E})$. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe, il existe une fonction a de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = a(x)$, soit $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$.

Conclusion : On a bien l'équivalence

(b) Soit f solution de $(\mathcal{E})$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On a donc l'existence de a et du 1.(a)

Analyse : Si on pose $f(x, y) = F(x)$ (y fixé), alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x)f(x, y)$ s'écrit $F'(x) = a(x)F(x)$, soit à l'aide des équations différentielles du 1er ordre linéaires : $F(x) = \lambda e^{A(x)}$ où A est une primitive de a .

Synthèse : Notons A une primitive de a sur $\mathbb{R}$ (qui existe car a est continue sur $\mathbb{R}$) et considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = f(x, y)e^{-A(x)}$. Comme a est C^1 sur $\mathbb{R}$, A est C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc g est C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Dérivons par rapport à x : $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)e^{-A(x)} - f(x, y)a(x)e^{-A(x)} = 0$. Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, il existe une fonction ψ de

1

2

$A(x)$

classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = \psi(y)$ et donc $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec $\varphi(x) = e^{-Ax}$.

Comme on a $\psi(y) = f(x, y)e^{-A(x)}$, ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par TG et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, alors f est clairement C^2 , ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ et vérifie

$$f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \varphi(x)\psi(y)\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(x)\psi(y)\varphi(x)\psi'(y) = 0.$$

Conclusion : On a bien l'équivalence

On n'a pas l'unicité car si (φ, ψ) convient alors $(2\varphi, \frac{1}{2}\psi)$ convient aussi !

(c) Si f vérifie $\mathcal{E}$ et ne s'annule pas alors il existe φ, ψ C^2 et ne s'annulant pas tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \text{ donc } f(x, 0) = \varphi(x)\psi(0) \text{ et } f(0, y) = \varphi(0)\psi(y).$$

Posons alors $\varphi_0(x) = g(x)$, $\psi_0(y) = \lambda h(y)$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi_0(x)\psi_0(y)$, donc

$$f(x, 0) = \varphi_0(x)\psi_0(0) = g(x)\lambda h(0) \text{ et } f(0, y) = \varphi_0(0)\psi_0(y) = g(0)\lambda h(y). \text{ Comme } g(0) = h(0), \lambda = \frac{1}{g(0)} \text{ convient et}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = g(x) \frac{h(y)}{g(0)}$$

Pour l'unicité si f_1 et f_2 sont 2 telles fonctions, on a $f_1(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, et $f_2(x, y) = \varphi_2(x)\psi_2(y)$, d'où

$$f_1(x, 0) = \varphi_1(x)\psi_1(0) = f_2(x, 0) = \varphi_2(x)\psi_2(0) = g(x) \text{ et}$$

$$f_1(0, y) = \varphi_1(0)\psi_1(y) = f_2(0, y) = \varphi_2(0)\psi_2(y) = h(y) \text{ d'où il existe 2 réels } \alpha \text{ et } \beta \text{ tels que } \varphi_2 = \alpha\varphi_1 \text{ et } \psi_2 = \beta\psi_1$$

On en déduit que $f_1(0, 0) = f_2(0, 0) = \varphi_1(0)\psi_1(0) = \alpha\beta\varphi_1(0)\psi_1(0) = g(0) (= h(0))$ comme tout est non nul, on a donc $\alpha\beta = 1$ et donc $f_1 = f_2$ et l'on a l'unicité.

Conclusion : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = g(x) \frac{h(y)}{g(0)}$ convient et est unique

2.

(a) Petite erreur d'énoncé : lire $y \mapsto f(x_0, y)$ et non $y \mapsto f(x, y_0)$.

Soit (x_0, y_0) un maximum local de f . Soit $r > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ et donc $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ d'où x_0 est un maximum local de $x \mapsto f(x, y_0)$. On fait de même pour $y \mapsto f(x_0, y)$ qui admet un maximum local en y_0 .

Réciproquement soient x_0 un maximum local de $x \mapsto f(x, y_0)$ et y_0 un maximum local de $y \mapsto f(x_0, y)$.

Il existe φ et ψ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Comme f ne s'annule pas, φ et ψ non plus. Par valeurs intermédiaires elles ne changent donc pas de signe. Quitte à changer φ en $-\varphi$ et ψ en $-\psi$, on peut supposer que $\varphi > 0$ et comme f est positive, on en déduit que ψ aussi.

D'autre part, $\varphi(x) = \frac{f(x, y_0)}{\psi(y_0)}$, donc φ admet un maximum en x_0 . De même ψ admet un maximum en y_0 . On a donc l'existence d'un $r > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$ et $\forall y \in [y_0 - r, y_0 + r]$ $\psi(y) \leq \psi(y_0)$ et

Comme tout est strictement positif, on en déduit que

$$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \quad f(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \leq \varphi(x_0)\psi(y_0) = f(x_0, y_0).$$

Conclusion :

f admet un maximum local en (x_0, y_0) SSI x_0 est un max. local de $x \mapsto f(x, y_0)$ et y_0 un max. local de $y \mapsto f(x_0, y)$.

(b) Soit $A = \{x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } x_0 \text{ soit un maximum de } x \mapsto f(x, y_0)\}$ et $B = \{y_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } y_0 \text{ soit un maximum de } y \mapsto f(x_0, y)\}$. On a alors

Conclusion : $A \times B = \{(x_0, y_0) \text{ tel que } f \text{ admet un maximum local en } (x_0, y_0)\}$

3.

(a) Considérons h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t^3 + |t|^3$. On a donc

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 2t^3 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{d'où } h'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 6t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{et } h''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 12t & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Les limites de h , h' et h'' à gauche et à droite en 0 sont toutes égales à 0. Par le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k , h est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On en déduit par TG que f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ ($f(x, y) = h(xy)$).

(b) On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yh'(xy)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xh'(xy)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = h'(xy) + xyh''(xy)$

$$f(x, y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(xy) h'(xy) + xyh''(xy) - yh'(xy)xh'(xy) = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 0 \\ 36x^5y^5 - 36x^5y^5 = 0 & \text{si } xy \geq 0 \end{cases}$$

Conclusion : f vérifie $(\mathcal{E})$

(c) Supposons qu'il existe φ et ψ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ $f(1, 1) = \varphi(1)\psi(1) = 2$ donc $\varphi(1) \neq 0$ et $\psi(1) \neq 0$, $f(-1, -1) = \varphi(-1)\psi(-1) = 2$ donc $\varphi(-1) \neq 0$ et $\psi(-1) \neq 0$ et enfin $f(-1, 1) = \varphi(-1)\psi(1) \neq 0$ or $f(-1, 1) = 0$ car $(-1, 1)$ est dans la zone $xy < 0$: Absurde!

Conclusion : Il n'existe pas φ et ψ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$

Devoir Libre

14 Valeur moyenne d'une fonction

Enoncé : CNC 2006, MP

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications **continues** de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et E_2 le sous ensemble de E formé des applications **de carrés intégrables** sur $\mathbb{R}^+$.

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad \psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Si Φ est un endomorphisme de E , on dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de Φ s'il existe $f \in E$ tel que $\Phi(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$; dans ce cas, on dit que f est un vecteur propre de Φ associé à λ et $\text{Ker}(\Phi - \lambda \text{id}_E)$ s'appelle alors le sous-espace propre de Φ associé à la valeur propre λ .

Première partie

1. Soient a et b deux réels strictement positifs.

1-1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite, on pose $I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$.

1-2. Montrer que $I(a, b) = -I(b, a)$ et que $I(a, b) = I(1, b/a)$.

1-3. On note φ l'application définie, pour tout $x \geq 1$, par $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

1-3-1. Montrer que φ est continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

1-3-2. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$ pour $x \geq 1$.

1-3-3. Que vaut alors $\varphi(x)$ pour $x \geq 1$?

1-4. En déduire soigneusement la valeur de l'intégrale $I(a, b)$ en fonction de a et b .

2. 2-1. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

2-2. Préciser le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^n}{n+1}$.

2-3. Montrer que cette série entière converge uniformément sur le segment $[0, 1]$.

2-4. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; montrer alors que $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}$.

Deuxième partie

1. Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

- 1-1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E .
- 1-2. On suppose que la fonction f tend vers une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$; montrer qu'il en est de même de la fonction $\psi(f)$. Étudier la réciproque.
- 1-3. Que peut-on dire dans le cas où cette limite est égale à $+\infty$?
- 1-4. On pose $h(x) = xf(x)$, $x \geq 0$.
 - 1-4-1. Montrer que $g - \psi(g) = \psi(h)$.
 - 1-4-2. En déduire que si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\psi(h)$ admet 0 comme limite en $+\infty$. Étudier la réciproque.
- 1-5. Montrer que si f est positive alors, $0 \leq \psi(\sqrt{f}) \leq \sqrt{\psi(f)}$; dans quel cas y'a-t-il égalité ?
2. 2-1. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .
- 2-2. Montrer que ψ est injectif.
- 2-3. L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?
3. Soit λ un réel non nul.
 - 3-1. Déterminer les applications f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et vérifiant

$$\forall x > 0, \quad \lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0.$$
 - 3-2. Pour quelles valeurs du réel λ ces fonctions sont-elles prolongeables à droite en 0 ?
4. 4-1. Est-ce que 0 est valeur propre de ψ ?
- 4-2. Montrer que si $f \in E$ est un vecteur propre de ψ associé à une valeur propre μ alors f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.
- 4-3. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de ψ et préciser pour chacune d'elles le sous-espace propre associé.

Troisième partie

1. 1-1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2 , leur produit fg est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
 - 1-2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E .
 - 1-3. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur E_2 .
- Dans la suite, ce produit scalaire se notera $(\cdot | \cdot)$ et $\|\cdot\|$ désignera la norme associée.
2. Soit f un élément de E_2 ; on note toujours g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

2-1. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t}$.

2-2. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t) dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2} dt = -b\psi(f)^2(b) + 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t) dt. \quad (1)$$

2-3. En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t) dt \leq 2 \left(\int_0^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \psi(f)^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2-4. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leq 2\|f\|$.

2-5. On note ψ_2 l'endomorphisme induit par ψ sur E_2 . Que peut-on alors dire de ψ_2 en tant qu'endomorphisme de l'espace vectoriel normé $(E_2, \|\cdot\|)$?

3. Soit f un élément de E_2 .

3-1. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \mapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

3-2. Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

4. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$ et montrer que f est la fonction nulle.

Quatrième partie

1. On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = e^{-ax}$, $x \geq 0$.

1-1. Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

1-2. Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geq 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \geq 0$.

2-1. Calculer $\psi(f)(x)$ pour tout $x \geq 0$.

2-2. Vérifier que $f \in E_2$ et montrer que $(f|\psi(f)) = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t} \right) dt$.

2-3. Trouver une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$ puis calculer $\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$.

3. Montrer plus généralement que si $f \in E_2$ est positive, décroissante et non nulle, alors

$$\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} > \sqrt{2}.$$

4. 4-1. Montrer que l'application $f \mapsto \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue sur $E_2 \setminus \{0\}$.

4-2. En déduire que $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

5. Dans cette question, on va montrer ces deux ensembles coïncident.

5-1. Pour tout $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$ on note f_s la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_s(0) = 0, f_s(t) = t^s \quad \text{si } t \geq 1, \text{ et } f_s \text{ affine sur } [0, 1].$$

5-1-1. Vérifier que $f_s \in E_2$ et calculer $\|f_s\|^2$ en fonction de s puis en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

5-1-2. Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ en fonction de s et en donner un équivalent lorsque s tend vers $-\frac{1}{2}$.

5-1-3. En déduire que la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ vaut 2.

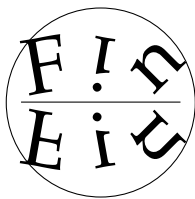
5-2. Soit $\alpha > 0$; on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = t^\alpha \quad \text{si } t \in [0, 1], \text{ et } f(t) = t^{-\alpha-1} \quad \text{si } t \in [1, +\infty[.$$

5-2-1. Vérifier que $f \in E_2$ et calculer $\|f\|^2$ en fonction de α .

5-2-2. Calculer $\|\psi(f)\|^2$ en fonction de α et en donner un équivalent au voisinage de $+\infty$.

5-2-3. En déduire que la borne inférieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est nulle.



À la prochaine

Blague du jour

Le professeur de chimie inscrit la formule HN03 sur le tableau. Il interroge ensuite un élève :

- Que signifie cette formule ?
- Heu, je l'ai sur le bout de la langue, monsieur !
- Crachez-la tout de suite, c'est de l'acide nitrique !



Ibn Battuta, (1304 Tanger-1369 Marrakech)

Explorateur et voyageur marocain, parcourant 120 000 km en 28 ans de voyages qui l'amènent à l'Inde, la Chine, au Kazakhstan, l'Andalousie, au Mali. Ses récits, compilés par Ibn Juzayy en un livre appelé Rihla (voyage) sont plus précis que ceux de Marco Polo, mais contiennent plusieurs passages qui relèvent clairement de la pure imagination, notamment ceux décrivant des êtres surnaturels.

Mathématicien du jour

❑ Corrigé : Pr. Mamouni, CPGE Rabat, Maroc

1ère Partie

- ① **a** Au voisinage de 0 : On sait que $e^t = 1 + t + o(t)$, donc $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = b - a + o(1) \sim b - a$ intégrable au voisinage de 0.

Au voisinage de $+\infty$: On sait que $e^{-at} = o\left(\frac{1}{t}\right)$, donc $\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

- b** $I(a, b) = -I(b, a)$, très évident.

Posons : $u = ta$, donc :

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{b}{a}u}}{u} du =$$

$$I\left(1, \frac{b}{a}\right).$$

i L'application : $f : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbf{R}^*$ en tant que somme, rapport de fonctions continue, qui ne s'annule pas. En $(x, 0)$ on a : $f(x, t) \sim x - 1$ continue, donc f est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbf{R}$.

D'autre part : pour $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$ on a :

$\left| \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \right| = \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} \leq \frac{e^{-t} - e^{-bt}}{t}$ qui est continue, intégrable sur $]0, +\infty[$, donc φ est continue sur $[1, +\infty[$.

ii Pour $x \in [a, b] \subset [1, +\infty[$ on a : $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$ continue, intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, avec $\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

iii D'après le raisonnement fait dans la question précé-

dente, on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$, donc $\varphi(x) = \ln x + K$, or $\varphi(1) = 0$, d'où $K = 0$ et donc $\varphi(x) = \ln x$.

d Si $b \geq a$, alors $x = \frac{b}{a} \geq 1$, donc $I(a, b) = I(1, \frac{b}{a}) = \varphi\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

Si $b \leq a$, alors $x = \frac{a}{b} \geq 1$, donc :

$$I(a, b) = -I(b, a) = -I(1, \frac{a}{b}) = -\varphi\left(\frac{a}{b}\right) = -\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Conclusion : $I(a, b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

② **a** Au voisinage de 0 : on sait que $\ln(1+t) = t + o(t)$, d'où $\frac{\ln(1+t)}{t} \sim 1$ intégrable au voisinage de 0, donc $t \mapsto \frac{\ln(1+t)}{t}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

b Posons $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ est égal

à 1, dont la somme est $\frac{\ln(1+x)}{x}$, puisqu'il s'agit de son développement en série entière.

c Pour $x \in [0, 1]$ fixé, on vérifie faciement que la série

$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n$ est une série alternée, donc vérifie le critère spécial, en particulier la majoration du reste par son 1^{er} terme, donc $\left| \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k \right| \leq \left| \frac{(-1)^n}{n+1} x^n \right| \leq \frac{1}{n+1}$, donc le reste converge uniformément vers 0, et par suite la convergence de la série sur $[0, 1]$ est uniforme.

d $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt$ D'après 2.2

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{n+1} t^n dt$$

Car la convergence est uniforme sur $[0,1]$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}$$

On divise la somme en deux $n = 2p, n = 2p+1$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2}$$

Car $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+2)^2}$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}$

$$= \frac{\pi^2}{12}$$

2ème Partie

① a g est de classe C^1 , en tant que primitive de f qui est continue.

On a $\psi(f)(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour $x > 0$, donc ψ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $x \neq 0$, le théorème des accroissements finie, donc $g(x) - g(0) = xg'(c)$ avec c compris entre 0 et x , d'où $\psi(f)(x) = \frac{g(x)}{x} \rightarrow \frac{g(0)}{0} = \psi(f)(0)$ car $g(0) = 0$ et $g' = f$ continue, donc $\psi(f)$ est continue sur $\mathbf{R}^+$, autrement dit $\psi(f) \in E$.

b $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lambda \implies \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tel que $|f(t) - \lambda| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall t \geq A$, donc pour $x \geq A$ on a :



$$\begin{aligned}
 |\varphi(x) - \lambda| &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t) dt - \lambda x \right| \\
 &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t) dt - \int_0^x \lambda dt \right| \\
 &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x (f(t) - \lambda) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - \lambda| dt \\
 &= \frac{1}{x} \int_0^A |f(t) - \lambda| dt + \frac{1}{x} \int_x^A |f(t) - \lambda| dt \\
 &= \frac{K}{x} + \frac{1}{x} \int_x^A |f(t) - \lambda| dt \\
 &\leq \frac{K}{x} + \frac{1}{x} \int_x^A \frac{\varepsilon}{2} dt \\
 &= \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x} \frac{\varepsilon}{2} \\
 &\leq \frac{K}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{car } \frac{x - A}{x} \leq 1 \\
 &\leq \varepsilon \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x} = 0
 \end{aligned}$$

La réciproque est fausse, prenons pour contre-exemple la fonction $f(t) = \cos t$, on a : $\psi(f)(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ n'existe pas.

c $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty \Rightarrow \forall B > 0, \exists A > 0$ tel que $f(t) \geq \frac{B}{2} \quad \forall t \geq A$, donc

$$\begin{aligned}
 \varphi(f)(x) &= \frac{1}{x} \left(\int_0^A f(t) dt + \int_A^x f(t) dt \right) \\
 &\geq \frac{1}{x} \left(K + \frac{B}{2}(x - A) \right) \\
 &= \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x} \frac{B}{2} \\
 &\geq B \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{K}{x} + \frac{x - A}{x} \frac{B}{2} = \frac{B}{2}
 \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(f)(x) = +\infty$.

d

i Dans $\psi(h)$ on va utiliser une intégration par partie, en posant $u = x, v' = f$, donc $u' = 1, v = g$, d'où :

$$\begin{aligned}
 \psi(h)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{x} \left([t g(t)]_0^x - \int_0^x g(t) dt \right) \\
 &= g(x) - \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt = g(x) - \psi(g)(x)
 \end{aligned}$$

ii f est intégrable sur $[0, +\infty[$, donc $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$, d'après la question 1.2) $\psi(h)$ admet aussi la même limite en $+\infty$, or $\psi(h) = g - \psi(g)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(h)(x) = 0$.

La réciproque n'est pas toujours vraie, prenons pour contre-exemple $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, non intégrable au voisinage de 0, car $\frac{e^{-x}}{x} \sim \frac{1}{x}$, alors que $\psi(h)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t} dt = \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) \rightarrow 0$, quand $x \rightarrow +\infty$.

e $\sqrt{f} \geq 0$ et $x \geq 0$, donc $\psi(\sqrt{f})(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{f(t)} dt \geq 0$.

D'autre part : en utilisant l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, on aura : $\frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{f(t)} dt \leq \frac{1}{x} \sqrt{\int_0^x dt} \sqrt{\int_0^x f(t) dt}$.

$$= \sqrt{\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt} = \sqrt{\psi(f)}$$

On aura égalité, s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-schwarz pour 1 et $\sqrt{f}$, donc s'ils sont proportionnels, c'est à dire f est constante.

- ② **a** Il est clair que $\psi(f + \lambda g) = \psi(f) + \lambda \psi(g)$, n'oubliez pas de le mentionner pour $x = 0$, donc ψ est linéaire.
 D'autre part d'après 1.1) $\psi(f) \in E$, $\forall f \in E$, donc ψ est un endomorphisme de E .

b $f \in \text{Ker}(\psi) \implies \psi(f)(x) = 0, \forall x > 0$
 $\implies g(x) = \int_0^x f(t) dt = 0, \forall x > 0$
 $\implies g'(x) = f(x) = 0, \forall x \geq 0$

Donc ψ est injective.

- c** D'après 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc toute fonction de E qui ne l'est pas ne peut pas être de la forme $\psi(f)$, c'est à dire n'admet pas d'antécédant, donc ψ n'est pas surjective. $F(x) = |x - 1|$ est un exemple de fonction de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, car non dérivable en 1.
- ③ **a** Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients non constant, dont la solution est :

$$f(x) = Ke^{-\int_0^x \frac{\lambda-1}{t} dt} = Ke^{\frac{1-\lambda}{\lambda} \ln x} = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

- b** f est prolongeable en 0^+ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ est finie si et seulement si $\frac{1-\lambda}{\lambda} \geq 0$ si et seulement si $0 < \lambda \leq 1$.

- ④ **a** 0 ne peut pas être une valeur propre de ψ car elle est injective.

- b** Soit $f \in E$ non nulle telle que $\psi(f) = \mu f$, donc $f = \frac{1}{\mu} \psi(f)$ car $\mu \neq 0$ d'après 4.1). De plus d'après 1.1) on peut affirmer que $\psi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$, donc f aussi.

- c** Soit λ valeur propre de ψ et f vecteur propr associé, donc $\psi(f)(x) = \lambda f(x)$, d'où $\int_0^x f(t) dt = \lambda x f(x)$, en dérivant cette égalité on obtient : $\lambda x f'(x) + (\lambda - 1)f(x) = 0$, dont les solutions sont :
 $f(x) = Kx^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$, dérivables sur $]0, +\infty[$ pour tout $\lambda \in]0, 1]$.

3ème partie

- ① **a** Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbf{R}^+$, on a d'après l'inégalité de

Cauchy-Schwarz : $\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt}$

$$\leq M = \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t) dt}$$

Donc fg est intégrable sur $\mathbf{R}^+$

- b** Il est clair que l'application nulle est de carré intégrable, donc appartient à E_2 , d'autre part, soit $(f, g) \in E_2, \lambda \in \mathbf{R}$,

alors :

$(f + \lambda g)^2 = f^2 + 2\lambda fg + g^2$ car f^2, fg, g^2 sont toutes intégrables, donc $f + \lambda g \in E_2$ et par suite E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

c .

☛ Symétrie : $(f, g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)dt = (g, f)$.

☛ Bilinearité : $(f + \lambda g, h) = (f, h) + \lambda(g, h)$, car l'intégrale est linéaire, d'où la linéarité à gauche, à l'aide de la symétrie on conclut la bilinéarité.

☛ Positive : $(f, f) = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt \geq 0$.

☛ Définie : $(f, f) = 0 \implies \int_0^{+\infty} f^2(t)dt = 0 \implies f^2 = 0$, car f^2 continue positive, donc $f = 0$.

② a $\frac{g^2(t)}{t} = g(t)\psi(f)(t) \rightarrow g(0)\psi(f)(0) = 0$, quand $t \rightarrow 0^+$, car g et $\psi(f)$ sont continues sur $\mathbf{R}^+$ et $g(0) = 0$.

b $\frac{g^2(t)}{t^2} = (\psi(f)(t))^2 \rightarrow (\psi(f)(0))^2$, quand $t \rightarrow 0^+$, car $\psi(f)$ est continue sur $\mathbf{R}^+$, donc $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[0, b]$ car prolongeable par continuité en 0^+ .

D'autre part : $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt$, par définition de $\psi(f)$, pour l'autre égalité on va utiliser une intégration par parties, avec $u = g^2(t), v' = \frac{1}{t^2}$, donc $u' = 2g'(t)g(t)$ et

$v = -\frac{1}{t}$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2}dt &= \left[-\frac{g^2(t)}{t} \right]_0^b + 2 \int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2 \int_0^b \frac{g'(t)g(t)}{t}dt \\ &\quad \text{car : } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g^2(t)}{t} = 0 \\ &= -\frac{g^2(b)}{b} + 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \\ &\quad \text{car : } g'(t) = f(t), \frac{g(t)}{t} = \psi(f)(t) \end{aligned}$$

c
$$\begin{aligned} \int_0^b \psi(f)^2(t)dt &\leq 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t)dt \quad \text{D'après (1)} \\ &\leq 2 \sqrt{\int_0^b f^2(t)dt} \sqrt{\int_0^b \psi(f)^2(t)dt} \\ &\quad \text{D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

Si $\int_0^b \psi(f)^2(t)dt = 0$, c'est terminé, sinon on peut simplifier avec et on obtient encore le résultat demandé.

d Découle immédiatement de 2-4) en faisant tendre b vers $+\infty$.

e D'après 2-5) on peut conclure que ψ_2 est 2-lipshitzienne, donc continue.

③ a .

b Faire tendre b vers $+\infty$ dans (1), en utilisant 3-1).

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad ||\psi(f) - 2f||^2 &= (\psi(f) - 2f, \psi(f) - 2f) \\
 &= (\psi(f), \psi(f)) - 4(\psi(f), f) + 4(f, f) \\
 &= ||\psi(f)||^2 - 4(\psi(f), f) + 4||f||^2 \\
 &= -4(\psi(f), f) + 8||f||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)|| = 2||f|| \\
 &= -4(\psi(f), f) + 2||\psi(f)||^2 \quad \text{Car : } ||\psi(f)|| = 2||f|| \\
 &= 0 \quad \text{D'après 3-2)}
 \end{aligned}$$

Donc $\psi(f) - 2f = 0$, ainsi si $f \neq 0$, on aurait 2 est une valeur propre de ψ , impossible puisque les valeurs propres de ψ sont les $\lambda \in]0, 1]$.

4ème partie

① **a** $f_a^2(x) = e^{-2ax}$ est évidemment intégrable sur $\mathbf{R}^+$, avec :

$$||f_a||^2 = \int_0^{+\infty} e^{-2ax} dx = \frac{1}{2a}.$$

b Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f_a)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-at} dt = \frac{1 - e^{-ax}}{ax}$.

Pour $x = 0$, on a : $\psi(f_a)(0) = f_a(0) = 1$.

$$\begin{aligned}
 (f_a, \psi(f_a)) &= \int_0^{+\infty} f_a(x) \psi(f_a)(x) dx \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-2ax}}{x} dx \\
 &= \frac{1}{a} I(a, 2a) \\
 &= \frac{\ln a}{a} \quad \text{D'après 1-4 de la 1ère partie}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{||\psi(f_a)||}{||f_a||} \right)^2 &= 2a(\psi(f_a), \psi(f_a)) \quad \text{D'après 1-1} \\
 &= 4a(f_a, \psi(f_a)) \quad \text{D'après 3-2, 3ème partie} \\
 &= 4 \ln a
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \frac{||\psi(f_a)||}{||f_a||} = 2\sqrt{\ln a}.$$

② **a** Pour $x \neq 0$, on a : $\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \frac{\ln(1+x)}{x}$.
Pour $x = 0$, on a : $\psi(f)(0) = f(0) = 1$.

b Au voisinage de 0 : $f^2(x) \sim 1$

Au voisinage de $+\infty$: $f^2(x) \sim \frac{1}{x^2}$, donc f^2 est intégrable sur $\mathbf{R}^+$, or f continue, donc $f \in E_2$.

$$\begin{aligned}
 (f|\psi(f)) &= \int_0^{+\infty} f(t) \psi(f)(t) dt \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt \\
 &= \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} dt + \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+u}{u}\right)}{1+u} du \quad \text{Avec : } u = \frac{1}{t} \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t(1+t)} + \frac{\ln\left(\frac{1+t}{t}\right)}{1+t} \right) dt \quad \text{On remplace } u \text{ par } t \\
 &= \int_0^1 \frac{(1+t) \ln(1+t) - t \ln t}{t(1+t)} dt \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{t} - \frac{\ln t}{1+t} \right) dt
 \end{aligned}$$

c $(\ln t \ln(1+t))' = \frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$, donc $\ln t \ln(1+t)$ est une primitive de $\frac{\ln(1+t)}{t} + \frac{\ln t}{1+t}$.

Calculons d'abord : $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$, en effet :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = [\ln t \ln(1+t)]_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

Intégration par parties avec :

$$u = \ln(1+t) \quad v' = \frac{1}{t}$$

$$u' = \frac{1}{1+t} \quad v = \ln t$$

$$= - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} dt$$

Car au voisinage de 0^+ : $\ln t \ln(1+t) \sim t \ln t \rightarrow 0$

③ .

④ a les application $f \mapsto \|f\|$ et $f \mapsto \psi(f)$ sont continue, or $f \neq 0$, donc l'application $f \mapsto \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|}$ est continue en tant que composée et rapport d'applications continues.

b $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \text{ tel que } f \in E_2 - 0 \right\}$ est un connexe dans $\mathbf{R}$ en tant qu'image d'un connexe par une application continue, d'autre part : $0 < \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} < 2$, puisque $\psi(f)$ est injective et d'après la question 2-4) 3ème partie, donc c'est un intervalle contenu dans $]0, 2[$.

⑤ a

i L'application f est définie ainsi :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^s & \text{si : } 0 \leq t \leq a \\ &= -a^s(t-a-1) & \text{si : } a \leq t \leq a+1 \\ &= 0 & \text{si : } t \geq a+1 \end{aligned}$$

f^2 est intégrable car son intégrale sur $\mathbf{R}^+$ est égale à celui sur

$$\begin{aligned} [0, a+1], \text{ avec : } \|f\|^2 &= \int_0^a t^{2s} dt - a^{2s} \int_a^{a+1} (t-a-1)^2 dt \\ &= \frac{a^{2s+1}}{2s+1} - \frac{a^{2s}}{3} \sim \frac{a^{2s+1}}{2s+1} \end{aligned}$$

ii D'abord pour $0 \leq x \leq a$, on a :

$$\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^s dt = \frac{x^s}{s+1}, \text{ car :}$$

$$2s+1 > 0 \implies s > -\frac{1}{2} \implies s+1 > 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{s+1} = 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|\psi(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x) dx \geq \int_0^a \psi(f)^2(x) dx = \\ &= \int_0^a \frac{x^{2s}}{(s+1)^2} dx = \frac{a^{2s+1}}{(s+1)^2(2s+1)} = \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)} \cdot \frac{1}{2(s+1)} \geq \\ &= \frac{2a^{2s+1}}{(s+1)(2s+1)}, \text{ car } 2(s+1) = 2s+2 > 1. \end{aligned}$$

iii D'après les deux questions précédentes, en faisant

tendre a vers $+\infty$, on aura : $\text{Sup} \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \geq \frac{2}{s+1} \quad \forall s \in$

$\mathbf{R}$ tel que $2s+1 > 0$, donc pour $s \geq -\frac{1}{2}$, en faisant tendre s vers $-\frac{1}{2}$, on obtient : $\text{Sup} \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \geq 4$, d'où :

$\text{Sup} \left(\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \geq 2$, or d'après la question 4.2) on a :

$\text{Sup} \left(\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \leq 2$, d'où l'égalité.

b

i

ii Au voisinage de $+\infty$ on a : $f^2(t) = \frac{1}{t^{2\alpha+2}}$ est bien intégrable car $2\alpha + 2 > 1$, avec :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_0^{+\infty} f^2(t) dt = \int_0^1 t^{2\alpha} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha+2}} dt \\ &= \frac{1}{2\alpha+1} + \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{2}{2\alpha+1} \end{aligned}$$

iii Déterminons d'abord $\psi(f)(x)$ pour $x \geq 0$.

1^{er} cas : $0 \leq x \leq 1$, alors :

$$\psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^\alpha dt = \frac{x^\alpha}{\alpha+1}.$$

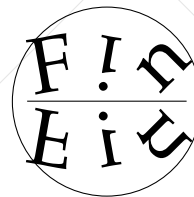
2^{ème} cas : $x \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned} \psi(f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{x} \left(\int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\int_0^1 t^\alpha dt + \int_1^x \frac{1}{t^{\alpha+1}} dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{x^\alpha} - 1 \right) \right) \\ &= \frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\psi(f)\|^2 &= \int_0^{+\infty} \psi(f)^2(x) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{(\alpha+1)^2} dx + \int_1^{+\infty} \left(\frac{2\alpha+1}{x\alpha(\alpha+1)} - \frac{1}{\alpha x^{\alpha+1}} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{(2\alpha+1)^2}{\alpha^2(\alpha+1)^2} - \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2(\alpha+1)^2} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &= \frac{1}{(2\alpha+1)(\alpha+1)^2} + \frac{4\alpha^2-1}{\alpha^2(\alpha+1)^2} + \frac{1}{\alpha^2(2\alpha+1)} \\ &\sim_{+\infty} \frac{4}{\alpha^2} \end{aligned}$$

iv D'après les deux questions précédentes, on aura :

$$\begin{aligned} \text{Inf} \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) &\leq \frac{2(2\alpha+1)}{\alpha^2} \text{ pour } \alpha > 0 \text{ assez grand, quand} \\ \alpha &\rightarrow +\infty, \text{ on obtient } \text{Inf} \left(\frac{\|\psi(f)\|^2}{\|f\|^2} \right) \leq 0, \text{ or d'après la ques-} \\ &\text{tion 4.2) on a : } \text{Inf} \left(\frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} \right) \geq 0, \text{ d'où l'égalité.} \end{aligned}$$



À la prochaine

Devoir Libre

1 Transformée de Fourier, de Lebesgue. Séries de Dirichlet

Enoncé : CCP 2011, PSI

Notations.

On note

$|z|$ le module du nombre complexe z .

J un intervalle de $[0, +\infty[$.

f une fonction définie sur J à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

g une fonction définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Sous réserve de son existence, on note $\tilde{f}_g(x) = \int_J f(t)g(xt) dt$ pour $x > 0$.

Chaque fois qu'aucune confusion ne sera possible, on notera $\tilde{f}(x)$ au lieu de $\tilde{f}_g(x)$.

Objectifs.

Pour différentes hypothèses sur la fonction f , sur l'intervalle J et pour deux choix de g , on se propose de déterminer la limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Dans la partie 1, on étudie un exemple explicite avec application à des calculs de sommes de séries.

Dans la partie 2, on considère une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et l'objectif est d'obtenir la limite en $+\infty$ de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = |\sin(t)|$, lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ ou lorsque f est continue par morceaux.

Partie I : Une étude de séries.

Etude de la fonction L .

Pour tout x réel tel que la série entière $\sum_{k \geq 1} \left((-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \right)$ converge, on note $L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$ sa somme.

1.1 Préciser le rayon de convergence de cette série entière, montrer que la fonction L est définie sur $] -1, 1[$ et expliciter $L(x)$ pour $x \in] -1, 1[$.

1.2 Montrer, avec soin, que la fonction L est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. En déduire que $L(1) = \ln(2)$.

Etude de la série $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} \cos \left(\frac{2k\pi}{3} \right) \right)$.

On considère la suite

$(a_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ définie par

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, a_{3p} = -\frac{2}{3p}; \forall p \in \mathbf{N}, a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1} \text{ et } a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}$$

2.1 Montrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1 + \frac{h}{p}}$$

2.2 déterminer la limite de $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque $p \rightarrow +\infty$ (on pourra considérer la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable).

En déduire la convergence de la série $\sum (a_k)_{k \geq 1}$ et préciser sa somme.

- 2.3 En déduire que la série $\sum \left(\frac{1}{k} \cos \left(\frac{2k\pi}{3} \right) \right)_{k \geq 1}$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$.

Etude des séries $\sum \left(\frac{\cos(k\alpha)}{k} \right)_{k \geq 1}$ et $\sum \left(\frac{\sin(k\alpha)}{k} \right)_{k \geq 1}$. Pour $t \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\varphi(t) = \frac{1}{e^{it} - 1}$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^n e^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera $\pi \leq \alpha < 2\pi$.

- 3.1 Montrer que $S_n(t) = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$.
- 3.2 Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1([\pi, \alpha])$.
- 3.3 Montrer que l'intégrale $\int_{\pi}^{\alpha} e^{i(n+1)t} \varphi(t) dt$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
- 3.4 Expliciter $\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum \left(\frac{e^{ik\alpha}}{k} \right)_{k \geq 1}$. Expliciter la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$.
- 3.5 Exprimer $e^{it} \varphi(t)$ en fonction de $\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}$ où $t \in [\pi, \alpha]$.

- 3.6 En déduire la convergence des séries $\sum \left(\frac{\cos(k\alpha)}{k} \right)_{k \geq 1}$ et $\sum \left(\frac{\sin(k\alpha)}{k} \right)_{k \geq 1}$. Expliciter leur somme respective. Le résultat est-il conforme avec celui obtenu en 1.2.3 ?

Partie II : Limite d'une intégrale.

Dans cette partie, on désigne par f une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs réelles et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ soit convergente. On désigne par g une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$ à valeurs complexes et (sous réserve d'existence) on note $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(xt) dt$ pour $x > 0$.

Existence de $\tilde{f}_g(x)$.

On suppose que la fonction g est bornée sur $\mathbf{R}^+$.

1. Justifier l'existence de $\tilde{f}_g(x)$ pour tout $x > 0$. Montrer que la fonction $\tilde{f}_g$ est continue et bornée sur $\mathbf{R}^{+*}$.

Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$ et à valeurs réelles. Soit $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt$.

- 2.1. Justifier l'affirmation :

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel positif A tel que

$$\int_A^{+\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$$

2.2. Le nombre réel A étant fixé, montrer que l'intégrale $\int_0^A f(t)e^{ixt} dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

2.3. En déduire la limite de $\tilde{f}_g(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{ixt} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Dans toute la suite, on suppose $g(t) = |\sin(t)|$ et on note simplement

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)| dt$$

Etude pour une fonction f particulière.

On suppose (dans cet exemple) que f désigne la fonction E définie par $E(t) = e^{-t}$ pour $t \geq 0$. et donc $\tilde{E}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)| dt$ pour $x > 0$.

3.1. Pour $\gamma \in \mathbf{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy$.

3.2. Montrer que pour $x > 0$,

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$$

3.3. Exprimer pour $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

3.4. Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\sum (e^{-\frac{k\pi}{x}})_{k \geq 0}$. Préciser sa somme.

3.5. Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Etude générale.

On désigne de nouveau par f une fonction quelconque continue par morceaux sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge et on note

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{+\infty} f(t)|\sin(xt)| dt \text{ pour } x > 0$$

4.1. Lemme préliminaire.

Pour tout réel t tel que la série $\sum \left(\frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1} \right)_{k \geq 1}$ converge, on

pose $h(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$. Montrer que la fonction h est définie et continue sur $\mathbf{R}$. Justifier l'égalité

$$\forall t \in \mathbf{R}, |\sin(t)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t)$$

4.2. Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas $\mathcal{C}^1$.

On suppose de plus que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^+$. En utilisant les résultats obtenus dans la partie 2.2 et la question précédente, déterminer la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Le résultat est-il conforme à celui obtenu pour la fonction E ?

4.3. Cas d'une fonction continue par morceaux.

4.3.1 Une limite.

Etant donnés deux nombres réels β et δ tels que $0 \leq \beta < \delta$, on considère, pour $x > 0$, l'intégrale $F(x) = \int_\beta^\delta |\sin(xt)| dt$. Montrer que $F(x) = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du$.

On pose p la partie entière de $\frac{\beta x}{\pi}$ et q celle de $\frac{\delta x}{\pi}$. Pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$, donner un encadrement de $F(x)$ en fonction de p, q et x .

En déduire que $F(x)$ tend vers $\frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

4.3.2 Limite de $\tilde{f}(x)$ dans le cas d'une fonction continue par morceaux.

Si J est un intervalle de $\mathbf{R}^+$ et si f est une fonction continue par morceaux sur J à valeurs réelles et telle que

l'intégrale $\int_J |f(t)| dt$ existe, on note toujours

$$\tilde{f}(x) = \int_J f(t) |\sin(tx)| dt$$

Quelle est la limite de $\tilde{f}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$:

- lorsque J est un segment et f une fonction en escalier ?
- lorsque J est un segment et f une fonction continue par morceaux ?
- lorsque $J = \mathbf{R}^+$ et f une fonction continue par morceaux ?

Pr. Verschueren, Lycée Daudet à Nîmes

Partie I Une étude de séries.

Question I. 1. 1. Pour $k \geq 1$, considérons la série entière de terme général $u_k(x) = (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.

Pour $x > 0$, on a $\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \left| \frac{kx}{k+1} \right| \rightarrow x$ quand $k \rightarrow \infty$, donc avec le critère de d'Alembert, si $x > 1$, on a divergence absolue de $\sum u_k(x)$ et si $x < 1$, on a convergence absolue de cette même série.

Ainsi $R = 1$, et la somme totale de la série entière est définie et de classe C^∞ sur $] -1, 1[$.

En $x = 1$, la série $\sum u_k(1)$ est une série de Riemann alternée vérifiant le thm spécifique (car $|u_k(1)| \rightarrow 0$ en décroissant) donc convergente. En $x = -1$, la série $\sum u_k(-1)$ est la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$ divergente.

L est définie sur $] -1, 1[$. On reconnaît le D.S.E. de $\ln(1+x)$, et $L(x) = \ln(1+x)$ sur $] -1, 1[$.

Question I. 1. 2. Pour $x \in [0, 1]$, la série numérique $\sum u_k(x)$ est une série alternée, car $|u_k(x)| = \frac{x^k}{k}$. Cette série alternée vérifie les hypothèses du thm spécifique car $|u_k(x)| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, et en décroissant avec $\left| \frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)} \right| = \left| \frac{kx}{k+1} \right| < 1$. On retrouve ainsi la convergence de

la série $\sum u_k(x)$, sur $[0, 1]$, que l'on a déjà assurée, et le résultat complémentaire que le reste est majoré : $|L(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)|$

Ainsi, pour $n \geq 1$, en notant $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$, on a :

$$\forall x \in [0, 1], |L(x) - S_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

Cette fonction est bornée, et $N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \leq \frac{1}{n+1}$ Quand

$n \rightarrow \infty$, on a donc que $N_\infty^{[0,1]}(L - S_n) \rightarrow 0$, et on a assuré la convergence uniforme de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sur $[0, 1]$ vers L . Les S_n , qui sont des polynômes (sommes partielles d'une série entière) sont continues, et par le thm de continuité sous convergence uniforme,

L est continue sur $[0, 1]$ Alors $L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x)$ donc $L(1) = \ln(2)$

Question I. 2. 1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{q=1}^{q=p} a_{3q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+1} +$

$\sum_{q=0}^{q=p-1} a_{3q+2}$ en distinguant les entiers k modulo 3.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{k=1}^{k=3p} a_k &= -\frac{2}{3} \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+1} + \sum_{q=0}^{q=p-1} \frac{1}{3q+2} = -\sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{q} + \sum_{q=1}^{q=p} \frac{1}{3q} + \\ &= -\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{k=3p} \frac{1}{k} \text{ en retrouvant, cette fois, tous les entiers } k \text{ m} \end{aligned}$$

Et $\sum_{k=1}^{k=3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{k=3p} \frac{1}{k} = \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{p+h} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}}$ par changement d'indice $k = p + h$, et factorisation de $\frac{1}{p}$.

Question I. 2. 2. Une **somme de Riemann** de la fonction f sur le segment $[a, b]$, qu'on partage en subdivision

équidistante, est $SR_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{h=1}^{h=n} f\left(a + h \frac{b-a}{n}\right)$, et on sait que pour f continue sur $[a, b]$, la suite $(SR_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$. Il en est de même de la **suite extraite** $(SR_{2p}(f))_{p \in \mathbb{N}^*}$.

Pour $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ le segment $[a, b] = [0, 2]$ et $n = 2p$, on a donc que $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{p}$ et $a + h \frac{b-a}{n} = 1 + \frac{h}{p}$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{h=2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}} = \int_a^b f(t) dt = \int_0^2 \frac{dt}{1+t} = \ln(3)$$

Les deux suites de termes généraux $A_{3p+1} = A_{3p} + \frac{1}{3p+1}$ et

$A_{3p+2} = A_{3p} + \frac{1}{3p+1} + \frac{1}{3p+2}$ ont même

limite, et les 3 suites extraites $(A_{3p})_{p \in \mathbb{N}^*}$, $(A_{3p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(A_{3p+2})_{p \in \mathbb{N}}$ tendent vers la même limite $\ln(3)$.

Ce qui assure que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et que

la série $\sum a_n$ converge vers sa somme totale $\ln(3)$

Question I. 2. 3. Le réel $\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ vaut selon la classe de k mod-

$$\text{ulo } 3 : \begin{cases} \text{si } k = 3p : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = 1 \\ \text{si } k = 3p + 1 : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \\ \text{si } k = 3p + 2 : \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} a_k$, série qui converge et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \ln(3) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Question I. 3. 1. Pour $t \in]0, 2\pi[$, on a $e^{it} \neq 1$ et $S_n(t)$ qui apparaît comme la somme des termes successifs de la

suite géométrique de raison e^{it} , vaut donc $S_n(t) = \sum_{k=1}^n (e^{it})^k = \frac{e^{it} - e^{(n+1)it}}{1 - e^{it}}$

Question I. 3. 2. Sur $]0, 2\pi[$ le dénominateur de φ est non nul et de classe C^∞ , avec $e^{it} - 1 = \cos(t) - 1 + i \sin(t)$.

La fonction φ est donc C^1 sur $]0, 2\pi[$ et sur le segment $[\pi, \alpha]$.

D'ailleurs $\varphi(t) = \frac{\cos(t) - 1 - i \sin(t)}{(\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sin(t)}{2(1 - \cos(t))}$ en séparant parties réelle et imaginaire.

Note : L'hypothèse $\alpha \in [\pi, 2\pi[$ ne sert que pour l'écriture sans ambiguïté des segments $[\pi, \alpha]$, qu'on devrait

écrire, à strictement parler, $[\alpha, \pi]$ si $0 < \alpha < \pi$, dans les questions suivantes.

Question I. 3. 3. Puisque φ est C^1 sur le segment $[\pi, \alpha]$, ainsi que la fonction $t \mapsto e^{(n+1)it}$, on peut effectuer une

intégration par partie : $\int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt = \left[\frac{e^{(n+1)it} \varphi(t)}{(n+1)i} \right]_{t=\pi}^{t=\alpha} -$

$$\int_{\pi}^{\alpha} \frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \varphi'(t) dt$$

φ et φ' sont continues sur le segment $[\pi, \alpha]$ donc bornées, respectivement par $M_{\varphi} = \sup_{[\pi, \alpha]} |\varphi(t)|$ et $M_{\varphi'} = \sup_{[\pi, \alpha]} |\varphi'(t)|$

et ainsi : $\left| \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt \right| \leq \left| \left[\frac{e^{(n+1)it} \varphi(t)}{(n+1)i} \right]_{t=\pi}^{t=\alpha} \right| +$

$$\left| \int_{\pi}^{\alpha} \frac{e^{(n+1)it}}{(n+1)i} \varphi'(t) dt \right| \leq \frac{2M_{\varphi}}{n+1} + \frac{|\alpha - \pi| M_{\varphi'}}{n+1}$$

Le numérateur est une constante réelle, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt = 0$

Question I. 3. 4. Pour $\alpha \in]0, 2\pi[$, $\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt =$

$$\sum_{k=1}^n \left(\int_{\pi}^{\alpha} e^{kit} dt \right) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{e^{kit}}{ki} \right]_{\pi}^{\alpha} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha} - e^{ki\pi}}{k}$$

$$\text{et } e^{ki\pi} = (e^{i\pi})^k = (-1)^k \text{ donc } \int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt =$$

$$-i \left[\sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha}}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right]$$

Mais aussi avec I. 3. 1. on a $\int_{\pi}^{\alpha} S_n(t) dt = \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt - \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$

$$\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{e^{ki\alpha}}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + i \int_{\pi}^{\alpha} e^{(n+1)it} \varphi(t) dt - i \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

On a assuré l'existence des limites des termes de droite quand $n \rightarrow \infty$, on assure donc la convergence de la série

$$\text{et la valeur de sa somme totale : } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ki\alpha}}{k} = -\ln(2) - i \int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt$$

Question I. 3. 5. Pour tout $t \in]0, 2\pi[$, on a $e^{it} \neq 1$ et $e^{it} \varphi(t) = \frac{e^{it}}{e^{it} - 1} = \frac{e^{-i\frac{t}{2}} e^{i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}} (e^{it} - 1)} = \frac{e^{i\frac{t}{2}}}{2i \sin(\frac{t}{2})}$

Question I. 3. 6. Ainsi $e^{it} \varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2i \sin(\frac{t}{2})}$ et

$$\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} (\alpha - \pi) - i \left[\ln \left(\sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) \right]_{t=\pi}^{t=\alpha}$$

$\int_{\pi}^{\alpha} e^{it} \varphi(t) dt = \frac{1}{2} (\alpha - \pi) - i \ln \left(\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)$. En séparant parties réelle et imaginaire, on a montré la convergence des deux séries et calculé leurs sommes totales :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} = -\ln(2) - \ln\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \frac{\pi - \alpha}{2}$$

ce qui est vrai pour $\alpha \in]0, 2\pi[$,
en échangeant les bornes des intégrales.

En particulier pour $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, on a $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\alpha)}{k} =$

$$-\ln(2) - \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\ln(\sqrt{3})$$

on retrouve ainsi le résultat de I. 2. 3. **Note** : pour $\alpha = \pi$, on

retrouve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Partie II Limite d'une intégrale.

Question II. 1. Si g est bornée par $M_g = \sup_{[0, \infty[} |g(t)|$, alors pour $x > 0$, on a $|f(t)g(xt)| \leq M_g |f(t)|$ si $t \in [0, \infty[$.

Puisque l'intégrale $\int_0^{\infty} |f(t)| dt$ converge, alors $\int_0^{\infty} |f(t)g(xt)| dt$

converge et $\tilde{f}_g(x)$ existe pour tout $x > 0$

De plus la fonction $\varphi_0 : t \mapsto M_g |f(t)|$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $[0, \infty[$, elle domine

la fonction à deux variables : $F_g : (x, t) \mapsto f(t)g(xt)$, qui est continue par rapport à x à t fixé et continue par morceaux par rapport à t , à x fixé. On a ainsi les hypothèses du thm de continuité des intégrales à paramètres

sous domination : $\tilde{f}_g$ est continue sur $]0, \infty[$. Enfin : $\forall x >$

$$0, |\tilde{f}_g(x)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)g(xt)| dt \leq M_g \int_0^{\infty} |f(t)| dt$$

donc $\tilde{f}_g$ est bornée sur $]0, \infty[$

Question II. 2. 1. Si g est la fonction $t \mapsto e^{it}$, on a les hypothèses, de la question précédente, avec $M_g = 1$.

Par définition de la convergence d'une intégrale : $\int_0^{\infty} |f(t)| dt =$

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A |f(t)| dt \text{ donc } \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^{\infty} |f(t)| dt = 0$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, tel que $0 \leq \int_A^{\infty} |f(t)| dt \leq \varepsilon$

Question II. 2. 2. Pour A ainsi fixé, on peut effectuer une intégration par partie, puisque les fonctions sont C^1 sur

le segment $[0, A]$: $\int_0^A e^{ixt} f(t) dt = \left[\frac{e^{ixt}}{ix} f(t) \right]_{t=0}^{t=A} -$

$$\int_0^A \frac{e^{ixt}}{ix} f'(t) dt$$

Ainsi $\left| \int_0^A e^{ixt} f(t) dt \right| \leq \frac{|f(A)| + |f(0)|}{x} + \frac{1}{x} \int_0^A |f'(t)| dt$ et

puisque A est fixé, le majorant est de la forme $\frac{K}{x}$

où K est constante. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ixt} f(t) dt = 0$

Question II. 2. 3. Assurons que $\lim_{x \rightarrow \infty} |\tilde{f}_g(x)| = 0$, en montrant que $|\tilde{f}_g(x)|$ peut être majoré par n'importe quel

$2\varepsilon > 0$, pour x suffisamment grand. Considérons donc $\varepsilon > 0$, quelconque mais fixé.

• Pour ce $\varepsilon > 0$, avec **II. 2. 1.** il existe $A > 0$, tel que $\forall x > 0$, $\left| \int_A^\infty e^{ixt} f(t) dt \right| \leq \int_A^\infty |f(t)| dt \leq \varepsilon$

• Pour un A ainsi choisi, il existe $x_0 > 0$, tel que $\forall x \in]0, \infty[$, $(x \geq x_0) \implies \left(\left| \int_0^A e^{ixt} f(t) dt \right| < \varepsilon \right)$
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$, tel que $\forall x \in]0, \infty[$, $(x \geq x_0) \implies \left(\left| \int_0^\infty e^{ixt} f(t) dt \right| < 2\varepsilon \right)$.

On a donc montré que $\lim_{x \rightarrow \infty} |\tilde{f}_g(x)| = 0$

Question II. 3. 1. Si g est la fonction $t \mapsto |\sin(t)|$, on a les hypothèses de **II. 1.**, avec $M_g = 1$.

Pour $f = E$, la fonction E est C^1 sur $[0, \infty[$, à valeurs réelles et $\int_0^\infty |E(t)| dt$ existe et vaut 1.

La conclusion de **II. 2. 3.** est assurée. On peut calculer $\theta(\gamma)$ de deux façons différentes :

• En calculant $\int_0^\pi e^{\gamma y} e^{iy} dy = \left[\frac{e^{(\gamma+i)y}}{\gamma+i} \right]_{y=0}^{y=\pi}$ car $\gamma - i \neq 0$.

D'où $\int_0^\pi e^{\gamma y} e^{iy} dy = \frac{1}{\gamma+i} [e^{(\gamma+i)\pi} - 1] = \frac{i-\gamma}{\gamma^2+1} [e^{\gamma\pi} + 1]$ et

donc $\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = \frac{e^{\gamma\pi} + 1}{\gamma^2 + 1}$

• En effectuant deux intégrations par parties successives, les

fonctions étant C^1 sur le segment $[0, \pi]$:

$$\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = [e^{\gamma y} (-\cos(y))]_{y=0}^{y=\pi} + \gamma \int_0^\pi e^{\gamma y} \cos(y) dy = e^{\gamma\pi} + 1 + \gamma \left[[e^{\gamma y} (\sin(y))]_{y=0}^{y=\pi} - \int_0^\pi \gamma e^{\gamma y} \sin(y) dy \right]$$

d'où $\int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy = e^{\gamma\pi} + 1 - \gamma^2 \int_0^\pi e^{\gamma y} \sin(y) dy$ et le même résultat.

Question II. 3. 2. On a $\tilde{E}(x) = \int_0^\infty e^{-t} |\sin(xt)| dt$, intégrale convergente (**II. 1.**) dans laquelle on peut effectuer

le changement de variable $\left(\begin{matrix} u = xt \\ t \in]0, \infty[\end{matrix} \right) \iff \left(\begin{matrix} t = \frac{1}{x} u \\ u \in]0, \infty[\end{matrix} \right)$ qui

est C^1 -difféomorphe entre ces intervalles, donc conserve la convergence des intégrales et leur valeur.

Ainsi $\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du$ pour tout $x > 0$

Question II. 3. 3. Avec le changement de variable (translation) $v = u - k\pi$, pour tout $x > 0$,

$$\text{on a } \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du = \int_0^\pi e^{-\frac{v+k\pi}{x}} |\sin(v)| dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \int_0^\pi e^{-\frac{v}{x}} \sin(v) dv = e^{-\frac{k\pi}{x}} \theta\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Question II. 3. 4. On note $u_k = e^{-\frac{k\pi}{x}} = \left(e^{-\frac{\pi}{x}}\right)^k$, alors $\sum u_k$ est une série géométrique de raison $e^{-\frac{\pi}{x}} \in]0, 1[$

donc absolument convergente, et sa somme totale est

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k\pi}{x}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}} \text{ pour tout } x > 0.$$

Question II. 3. 5. Avec la règle de Chasles, on peut décomposer l'intégrale sur $[0, (n+1)\pi]$ en somme totale

d'une série d'intégrales sur les segments $[k\pi, (k+1)\pi]$, ainsi, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\int_0^{(n+1)\pi} e^{-t} |\sin(xt)| dt = \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-t} |\sin(xt)| dt = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin(u)| du = \frac{1}{x} \theta \left(-\frac{1}{x} \right) \sum_{k=0}^n e^{-\frac{k\pi}{x}}$$

Quand $n \rightarrow \infty$: $\tilde{E}(x) = \frac{1}{x} \theta \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}} \text{ sur }]0, \infty[$ ou

$$\tilde{E}(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \left(\frac{1 + e^{-\frac{\pi}{x}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{x}}} \right) \text{ sur }]0, \infty[$$

Quand $x \rightarrow \infty$, $e^{-\frac{\pi}{x}} = 1 - \frac{\pi}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $\tilde{E}(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) \left(\frac{2 + O\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{\pi}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)} \right)$ d'où $\lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{E}(x) = \frac{2}{\pi}$

Question II. 4. 1. a. Notons h_k la fonction $t \mapsto \frac{\cos(2kt)}{4k^2 - 1}$. Pour $k \geq 1$, la fonction h_k est paire, π -périodique,

de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et bornée : $N_\infty(h_k) = \sup_{\mathbb{R}} |h_k(t)| = \frac{1}{4k^2 - 1}$.

La série $\sum \frac{1}{4k^2 - 1}$ est convergente par équivalence à une série de

Riemann $\sum \frac{1}{4k^2}$ d'exposant $2 > 1$,

donc la série des fonctions $\sum h_k$ est **normalement convergente** sur $\mathbb{R}$, donc uniformément convergente :

par continuité de chaque h_k , la somme totale h est définie et continue sur $\mathbb{R}$

Question II. 4. 1. b. La fonction $g : t \mapsto |\sin(t)|$ est continue, de classe C^1 par morceaux, paire et π -périodique.

On peut déterminer son développement en série de Fourier et appliquer le thm complémentaire au thm de

Dirichlet, qui assure la convergence normale de la série de Fourier de g vers g , sur $\mathbb{R}$.

Calculons les coefficients de Fourier de g . On a la période $T = \pi$, la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ et :

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n(g) = 0$, par parité.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\sin(t)| \cos(n\omega t) dt =$

$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(2nt) dt$, par parité.

$$\text{D'où } a_n(g) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)] dt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\left[\frac{-\cos((2n+1)t)}{2n+1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{-\cos((2n-1)t)}{2n-1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} \right]$$

$$\text{Ainsi } a_n(g) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right] = -\frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{4n^2-1} \right) \text{ pour}$$

tout $n \in \mathbb{N}$.

Dans l'introduction, nous avons assuré les hypothèses du thm de Dirichlet qui assure que la série de Fourier de g

$$\text{converge sur } \mathbb{R}, \text{ de somme totale } S(t) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(g) \cos(n\omega t) + b_n(g) \sin(n\omega t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}$$

$$\text{qui égale } g(t) \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ donc que } \forall t \in \mathbb{R}, \quad \left| \sin(t) \right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(t)$$

Question II. 4. 2. Si de plus f est de classe C^1 sur $[0, \infty[$, on a pour tout $x > 0$:

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} f(t) |\sin(xt)| dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} h(xt) \right] dt = \int_0^{\infty} f(t) \left[\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kxt)}{4k^2-1} \right] dt$$

où l'on voit apparaître l'intégrale d'une série des fonctions $\sum f h_k$.

Chacune de ces fonctions est C^0 sur $\mathbb{R}$,

la série converge simplement (et même normalement) sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto f(t) h(xt)$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

Chacune des fonctions est intégrable, car $|f(t) h_k(t)| =$

$$\frac{|\cos(2kxt)|}{4k^2-1} |f(t)| \leq |f(t)| \text{ intégrable sur } [0, \infty[\text{ et la}$$

$$\text{série des intégrales } \int_0^{\infty} |f(t) h_k(t)| dt \leq \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} |f(t)| dt$$

converge par comparaison à la série $\sum \frac{K}{k^2}$.
Les divers hypothèses du thm d'intégration terme à terme sont assurées, et on a donc, chaque intégrabilité étant

$$\text{assurée, que } \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) dt - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt$$

Considérons la série de fonctions $v_k : x \mapsto \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt$ définies et continues sur $]0, \infty[$.

$$\text{Avec II. 2. 3. on sait que } \lim_{x \rightarrow \infty} v_k(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} f(t) \cos(2kxt) dt = 0, \text{ et } N_{\infty}(v_k) \leq \frac{1}{4k^2-1} \int_0^{\infty} |f(t)| dt$$

qui est le terme général d'une série convergente, donc la série des fonctions $\sum v_k$ converge normalement sur $]0, \infty[$, donc uniformément. On peut donc appliquer le **thm de la double limite** à la suite des sommes partielles,

$$\text{et assurer que } \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = 0.$$

$$\text{Enfin, on peut conclure que } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) dt \quad \text{Ce qui}$$

est conforme au résultat obtenu pour E .

Question II. 4. 3. 1. Si on effectue le changement de variable $u = xt$ dans l'intégrale, pour $0 \leq \beta < \delta$, on a :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_{\beta}^{\delta} |\sin(xt)| dt = \frac{1}{x} \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du.$$

$$\frac{\beta x}{\pi} \text{ et } \frac{\delta x}{\pi} \text{ sont deux réels positifs et pour } x > \frac{\pi}{\delta - \beta} \text{ on a } \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} = \frac{(\delta - \beta)x}{\pi} > 1.$$

Il existe donc deux entiers p et q tels que $\begin{cases} p \text{ partie entière de } \frac{\beta x}{\pi} \text{ donc } p \leq \frac{\beta x}{\pi} \\ q \text{ partie entière de } \frac{\delta x}{\pi} \text{ donc } q \leq \frac{\delta x}{\pi} \\ \text{et } 0 \leq p < q \end{cases}$

Ainsi $p\pi \leq \beta x < (p+1)\pi$ et $q\pi \leq \delta x < (q+1)\pi$ donc

$$[(p+1)\pi, q\pi] \subset [\beta x, \delta x] \subset [p\pi, (q+1)\pi]$$

Puisque la fonction qu'on intègre est positive et continue sur $\mathbb{R}$, on a l'encadrement entre les intégrales :

$$\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)| du \leq \int_{\beta x}^{\delta x} |\sin(u)| du \leq \int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)| du$$

De plus pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| du = \int_0^{\pi} |\sin(v)| dv = \int_0^{\pi} \sin(v) dv = 2$ avec $v = u - k\pi$

Ainsi $\int_{(p+1)\pi}^{q\pi} |\sin(u)| du = 2(q - p - 1)$ et $\int_{p\pi}^{(q+1)\pi} |\sin(u)| du = 2(q + 1 - p)$

d'où un encadrement de $F(x)$: $\frac{2}{x}(q - p - 1) \leq F(x) \leq \frac{2}{x}(q - p + 1)$ pour $x > \frac{\pi}{\delta - \beta}$

Mais $\begin{cases} p \leq \frac{\beta x}{\pi} < p+1 \\ q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} -(p+1) < -\frac{\beta x}{\pi} \leq -p \\ q \leq \frac{\delta x}{\pi} < q+1 \end{cases}$ et

$$\begin{cases} q - p < \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} + 1 \\ \frac{\delta x}{\pi} - \frac{\beta x}{\pi} - 1 < q - p \end{cases}$$

d'encadrement (thm "des gendarmes" ou "du sandwich"), on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \text{ existe et vaut } \frac{2}{\pi}(\delta - \beta)$$

Question II. 4. 3. 2. Selon les cas, par extention de résultats successifs.

• Si f est une **fonction en escalier** et J un **segment**, alors il existe une subdivision $(\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$ de J telle que f soit constante égale à y_k sur chacun des intervalles $]\beta_k, \beta_{k+1}[$.

$$\text{Donc } \tilde{f}(x) = \int_J f(t) |\sin(xt)| dt = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} f(t) |\sin(xt)| dt =$$

$$\sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k \int_{\beta_k}^{\beta_{k+1}} |\sin(xt)| dt$$

Cette combinaison linéaire de fonctions ayant des limites quand $x \rightarrow \infty$ a une limite qui vaut :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k \frac{2}{\pi} (\beta_{k+1} - \beta_k) = \frac{2}{\pi} \sum_{0 \leq k \leq n-1} y_k (\beta_{k+1} - \beta_k)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$

• Si f est **continue par morceaux** sur J un **segment**, alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escaliers qui converge uniformément sur J vers f . Ainsi $N_\infty^J(f - \varphi_n) = \sup_J |f(t) - \varphi_n(t)| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Les applications $f \mapsto \tilde{f}$ et $f \mapsto \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$ sont linéaires, donc pour la différence (où $x > 0$) :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt &= [\tilde{f}(x) - \widetilde{\varphi_n}(x)] + [\widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt] + [\frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt] \\ &= \widetilde{f - \varphi_n}(x) + [\widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt] + \frac{2}{\pi} \int_J [\varphi_n(t) - f(t)] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| &\leq L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n) + \left| \widetilde{\varphi_n}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_n(t) dt \right| + \\ &\quad \frac{2}{\pi} L(J) N_\infty^J(f - \varphi_n) \end{aligned}$$

où $L(J)$ est la **longueur** du segment J . Par la convergence uniforme sur J , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n_0

$$\text{tel que : } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0) \implies \left(N_\infty^J(f - \varphi_n) < \frac{\varepsilon}{L(J) \left(1 + \frac{2}{\pi}\right)} \right) \implies$$

$$\left(L(J) \left(1 + \frac{2}{\pi}\right) N_\infty^J(f - \varphi_n) < \varepsilon \right)$$

Pour un $\varepsilon > 0$, fixons donc un tel $n = n_0$. Pour ce n_0 , puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \widetilde{\varphi_{n_0}}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_{n_0}(t) dt, \text{ il existe un } x_0 \text{ tel}$$

$$\text{que pour tout } x \geq x_0 \text{ on ait } \left| \widetilde{\varphi_{n_0}}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J \varphi_{n_0}(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, nous assurons qu'il existe $x_0 > 0$, t. q. $\forall x > 0, (x \geq x_0) \implies \left(\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| < 2\varepsilon \right)$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$

• Si f est **continue par morceaux** sur $J = [0, \infty[$, on peut reprendre pour un $\varepsilon > 0$ donné, le raisonnement de la question II. 2. avec un A suffisamment grand pour que

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_{[0, \infty[} f(t) dt \right| &= \left| \int_0^\infty f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| \end{aligned}$$

Pour ce A ainsi choisi, avec le segment $J' = [0, A]$ et le résultat ci-dessus, il existe x_0 tel que

$$\forall x > 0, (x \geq x_0) \implies \left(\left| \int_0^A f(t) |\sin(xt)| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^A f(t) dt \right| < \varepsilon \right)$$

$$\text{et alors } \forall x > 0, (x \geq x_0) \implies \left(\left| \tilde{f}(x) - \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt \right| < \left(2 + \frac{2}{\pi}\right) \varepsilon \right).$$

$$\text{Et on a donc assuré de même que } \lim_{x \rightarrow \infty} \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_J f(t) dt$$

Devoir Libre

18 Suites et séries de fonctions

Blague du jour

Cinq ingénieurs et cinq commerciaux se déplacent pour aller à un salon. Chacun des 5 commerciaux va acheter un billet de train. Les ingénieurs n'achètent qu'UN seul billet. Les 5 ingénieurs vont s'enfermer dans les toilettes juste avant que le contrôleur n'arrive. En passant, le contrôleur voit que les toilettes sont occupées. (voir la suite en dessous)



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

German mathematician who made lasting contributions to analysis and differential geometry, some of them enabling the later development of general relativity. His father was a poor Lutheran pastor who fought in the Napoleonic Wars. His mother, died before he had reached adulthood. Riemann exhibited exceptional mathematical skills, such as fantastic calculation abilities, from an early age but suffered from timidity and a fear of speaking in public.

Mathématicien du jour

Suite : Il frappe à la porte et demande : "Votre billet, s'il vous plaît!". Les ingénieurs glissent Le billet sous la porte. Le contrôleur est satisfait et s'en va. Les commerciaux sont bien sûr extrêmement vexés que les ingénieurs leur ont encore une fois fait la leçon. Pour le retour (voir prochain DL)

❏ Problème I : Exemple d'étude

Soit $(u_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par : $u_0(x) = x$ pour tout réel x strictement positif. $u_n(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1 + u_n(x)}$ pour tout entier naturel n , pour tout rel x strictement positif.

- ① Étude de la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$:

a Soit $u :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ $x \mapsto u(x) = 1$ Montrer que la suite

de fonctions $(u_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers u sur $]0, +\infty[$ et que : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in \mathbf{R}, 0 < u_n(x) \leq 1$

a Soit (U_n) la suite de fonctions définies pour tout entier naturel n sur $]0, +\infty[$ par : $U_n = \frac{1}{u_n}$.

i Montrer que : $U_n = \frac{1 + U_n(x)}{2\sqrt{U_n(x)}}, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in]0, +\infty[.$

ii En déduire que : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n(x) - 1|, \forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in]0, +\infty[.$

iii Montrer que la suite de fonctions (U_n) converge simplement vers u sur $]0, +\infty[$ et que la suite de fonctions (U_n) converge uniformément vers u sur tout compact de $]0, +\infty[.$

iv En déduire que la suite de fonctions (u_n) converge uniformément vers u sur tout compact de $]0, +\infty[.$

② Soit (v_n) la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in]0, +\infty[, v_0(x) = 1, v_n(x) = v_{n-1}(x) \frac{1 + v_{n-1}(x)}{2}$$

a Soit x un rel strictement positif Montrer que les suites $(u_n(x)v_n(x))_n$ et $(v_n(x))_n$ sont adjacentes.

On définit alors : $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$
 $x \mapsto f(x) = \lim v_n(x)$

b Montrer que les suites de fonctions $(u_n v_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent uniformément vers f sur tout compact de $]0, \infty[.$

c En déduire que f est continue sur $]0, \infty[.$

❑ Problème II : Fonction ζ et η de Riemann.

$$\text{Soit } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

① Déterminer le domaine de définition de ζ .

② Montrer que ζ est de classe C^∞ sur ce domaine.

③ Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$

Indication : majorer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ par comparaison une intégrale.

④ Prouver que $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$

⑤ Soit $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right).$

Montrer que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)$ puis que $\gamma = 1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}.$

⑥ a Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \frac{1}{(1 + X/n)^n - 1}.$

b En déduire pour $x \in \mathbf{R}^* : \coth x = \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{e^{-2x} - 1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2 \pi^2}.$

c En déduire la valeur de $\zeta(2).$

⑦ pour $x > 0 : \eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$

a Établir pour $x > 1 : \eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$

b En déduire $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ pour $x \rightarrow 1^+.$

- c Montrer que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + (1)$. On remarquera que $\frac{1}{x-1} = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.
- c En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.
- ⑧ Déterminer le domaine de définition de $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.
- ⑨ Soit $s > 1$. Exprimer après avoir justifié son existence, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$ en fonction de $\zeta(s)$.
- ⑩ Montrer que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine, en déduire ses dérivées successives.
- ❶ Prouver que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$. Indication : majorer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ par comparaison une intégrale.
- ❷ Prouver que $\lim_{x \rightarrow 1} \zeta(x) = +\infty$
- ❸ Montrer que la fonction ζ est décroissante et convexe sur $]1, +\infty[$. Tracer la courbe de ζ .
- ❹ Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $\zeta(x) = 1 + 2^{-x} + o(2^{-x})$.
- ❺ **Constante d'Euler** : Soit γ définie par : $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$
Montrer que γ existe et que $\gamma = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) =$

$$1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k}.$$

- ❻ a Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \frac{1}{(1 + X/n)^n - 1}$.
- b En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \frac{1}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{e^{-2x} - 1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + k^2 \pi^2}$.
- c En déduire la valeur de $\zeta(2)$.
- ❼ **Fonction éta de Riemann** : Pour $x > 0$: $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
- a Montrer que η est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
- b Établir pour $x > 1$: $\eta(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$. En déduire $\zeta(x) \sim \frac{1}{x-1}$ pour $x \rightarrow 1^+$.
- c Montrer que $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + (1)$. On remarquera que $\frac{1}{x-1} = \int_{t=1}^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$.
- c En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.
- d Donner un développement asymptotique à deux termes de $\zeta(s)$ lorsque $s \rightarrow 1^+$.

- e Montrer que $\forall s > 1, \zeta(s) = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - p_n^{-s})^{-1}$, où $2 = p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots$ les nombres premiers.
- f Pour $s > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} p_n^{-s}$ est-elle convergente ? La série $\sum_{n \geq 1} p_n^{-1}$ est-elle convergente ?
- 8 Pour tout entier naturel n on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers naturels plus petits que n et premiers avec n , dite fonction indicatrice d'Euler. Montrer que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ puis que pour tout réel $x > 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^x} = \frac{\zeta(x-1)}{\zeta(x)}$.
- 9 Soit u définie par $u_{p,q} = \frac{1}{p^q}$ pour tout $p \geq 2$ et $q \geq 2$.
- a Montrer que la suite u est sommable et calculer sa somme.
- b Prouver l'identité suivante : $\sum_{q=2}^{+\infty} (\zeta(q) - 1) =$

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^q} - 1 \right) = 1.$$

- 10 Calculer les sommes suivantes, après avoir justifié leurs existences :

a $\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{p^2 q^2}$

Indication : $A = \zeta(2)^2$

b $\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p|q} \frac{1}{p^2 q^2}$

Indication : $B = \zeta(2)\zeta(4)$.

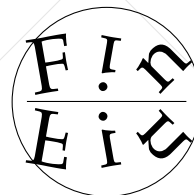
c $\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2, p \wedge q = 1} \frac{1}{p^2 q^2}$

Indication : $C = A/\zeta(4) = 5/2$.

d $\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=p}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$

Indication : $-\frac{7}{8}\zeta(3)$.

Soit $s > 1$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{sE(x)}{x^{s+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt = \zeta(s)$



À la prochaine

e3a
Devoir Libres

15 Exemple de calcul de sommes

Énoncé : e3a 2011, MP Mathématiques A MP

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

Notations

Dans tout le problème, $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} \ln(1-t)/t & \text{si } t \neq 0, \\ -1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Soit S la série entière :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n+1}.$$

Partie I

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière S .
2. Démontrer l'égalité $f(t) + S(t) = 0$, pour tout nombre réel t dans l'intervalle $] -1, 1[$.
3. Justifier que la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.
4. Déterminer le signe de $f(t)$, selon la valeur du nombre réel t dans $] -\infty, 1[$.

Partie II

Soit L la fonction définie sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ par :

$$L(x) = \int_x^0 f(t) dt = - \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

1. Justifier que la fonction L est de classe C^∞ sur l'intervalle ouvert $] -\infty, 1[$.
2. Démontrer que la fonction L admet un prolongement par continuité à gauche au point 1.
3. Justifier que la fonction L est strictement croissante sur l'intervalle $] -\infty, 1[$.
4. Démontrer que la fonction L admet un développement en série entière sur l'intervalle $] -1, 1[$; on énoncera explicitement le théorème utilisé. Expliciter les coefficients de ce développement.
5. Soit x dans l'intervalle $] -1, 1[$. Démontrer la relation :

$$L(x) + L(-x) = \frac{L(x^2)}{2}.$$

Cette relation est-elle vérifiée pour $x = 1$?

6. Justifier l'égalité :

$$L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Partie III

1. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que l'application qui envoie un entier m sur l'entier $m + 2^{n-1}$ induit une bijection de l'ensemble des entiers naturels impairs compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ sur l'ensemble des entiers naturels impairs compris entre 2^{n-1} et $2^n - 1$.

2. Soit x dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$. Démontrer l'égalité :

$$\frac{4}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x+\pi}{2})}.$$

3. Démontrer, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité :

$$2^{2n-1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}.$$

4. On se propose de démontrer l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (a) Démontrer, pour tout nombre réel x dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x.$$

- (b) Démontrer qu'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que tout entier naturel n non nul et tout entier naturel k compris entre 0 et $2^{n-1} - 1$ vérifient l'inégalité :

$$\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \leq \frac{C}{(2k+1)^2}.$$

- (c) Conclure.

5. En déduire la valeur de $L(1)$ et la valeur de $L(-1)$.

6. Démontrer, pour tout x dans l'intervalle $]0, 1[$, la relation :

$$L(1-x) = L(1) - \ln(x) \ln(1-x) - L(x).$$

7. En déduire une expression de $L(\frac{1}{2})$ en fonction de π et de $\ln 2$.

8. En déduire en fonction de π la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\ln 2} \frac{t}{1-e^{-t}} dt.$$

Partie IV

1. Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $L(x)$.
2. Quel est l'image de l'intervalle $]0, 1[$ par la fonction h_1 qui envoie x sur $1 - \frac{1}{x}$?
3. Soit h_2 la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1[$ par $h_2(x) = L(1 - x) + L(1 - \frac{1}{x})$.
 - (a) Après avoir justifié que la fonction h_2 est dérivable sur l'intervalle $]0, 1[$, calculer la dérivée de h_2 .
 - (b) En déduire, pour tout x dans l'intervalle $]0, 1[$, la relation

$$L(1 - x) + L(1 - \frac{1}{x}) = -\frac{1}{2} \ln^2(x).$$

4. Déterminer la limite quand x tend vers $-\infty$ de $\frac{L(x)}{x}$.
5. Quelle est la nature de la branche infinie de L en $-\infty$?
6. Représenter le graphe de la fonction L sur l'intervalle $] - \infty, 1]$.

Partie V

Soit J un intervalle contenu dans $] - \infty, 0[\cup]0, 1[$. On considère l'équation différentielle

$$(\mathcal{E}_J) \quad (1 - x)xy' + (1 - x)y = 1.$$

1. Résoudre sur l'intervalle J l'équation homogène associée. Quelle est la nature de l'espace des solutions ?
2. En déduire les solutions sur l'intervalle J de l'équation $(\mathcal{E}_J)$.

Soit alors $(\mathcal{F}_J)$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{F}_J) \quad (1 - x)xy'' + (1 - x)y' = 1.$$

3. Démontrer que les solutions sur l'intervalle J de $(\mathcal{F}_J)$ sont les fonctions g de la forme $g(t) = L(t) + A \ln |t| + B$, où A et B sont des constantes.
4. Peut-on trouver des solutions de l'équation différentielle $(1 - x)xy'' + (1 - x)y' = 1$ sur l'intervalle $] - \infty, 1[$? Si oui, les décrire. Quelle est la nature de l'espace des solutions ?

Corrigé : Pr. Deyris, CPGE France

1. Le rapport $\frac{t^n}{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ si $|t| < 1$, et diverge si $|t| > 1$: le rayon de convergence de la série entière est donc 1.
2. L'égalité est claire pour $t = 0$. D'autre part, on sait que, pour tout $t \in]-1, 1[$, $\ln(1+t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} t^k}{k}$. On en déduit $\frac{\ln(1-t)}{t} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}}{k}$ pour t non nul dans $] -1, 1[$, ce qui donne le résultat demandé en posant $n = k - 1$.
On peut aussi dériver $tS(t)$ pour obtenir le résultat.
3. En tant que somme d'une série entière, la fonction $f = -S$ est de classe C^∞ sur $] -1, 1[$. Les théorèmes usuels montrent que f est de classe C^∞ sur $] -\infty, 0[$. L'intersection de ces deux intervalles n'étant pas réduite à un point, cela montre que f est de classe C^∞ sur la réunion des deux, soit sur $] -\infty, 1[$.
4. On a $\ln(1-t) > 0$ sur $] -\infty, 0[$ et $\ln(1-t) < 0$ sur $] 0, 1[$. Dans tous les cas (y compris en 0), on a donc $f(t) < 0$.

Partie II

1. Puisque f est de classe C^∞ donc continue sur $] -\infty, 1[$, les résultats sur l'intégrale fonction de sa borne supérieure montrent que $L : x \mapsto -\int_0^x f(t) dt$ est de classe C^1 sur cet intervalle, et que sa dérivée est $-f$. Puisque cette dérivée est de classe C^∞ , L est elle aussi de classe C^∞ .

2. Montrons que f est intégrable sur $[0, 1[$. On sait déjà qu'elle est continue sur cet intervalle. D'autre part, $f(t)\sqrt{1-t}$ a pour limite 0 en 1 (puisque $\sqrt{u} \ln u$ tend vers 0 en 0), donc $f(t)$ est négligeable devant $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de 1. Puisque g est positive et intégrable sur $[0, 1[$, f est donc bien intégrable sur $[0, 1[$.
Par suite, $L(x)$ a pour limite $-\int_0^1 f(t) dt$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.
3. On a vu que L a pour dérivée $-f$ sur $] -\infty, 1[$ (question II-1), et que $-f$ est strictement positive sur cet intervalle (question I-4.). Puisque L est de plus continue en 1, elle est donc strictement croissante sur $] -\infty, 1[$.
4. Puisque f est la somme d'une série entière sur $] -1, 1[$, on sait que la primitive de f qui s'annule en 0 est la somme de la série entière obtenue en primitivant terme à terme celle de f , et que le rayon de convergence de cette nouvelle série entière est le même que celui de la série de f , c'est-à-dire ici 1.

On en déduit $\forall x \in] -1, 1[\quad L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

5. Soit $x \in] -1, 1[$. On peut appliquer la relation du II-4 à x et $-x$, donc $L(x) + L(-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n + (-1)^n x^n}{n^2}$. Dans cette somme, les termes de rang impair sont tous nuls ; donc

$$L(x) + L(-x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2x^{2p}}{(2p)^2} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^p}{p^2} = \frac{1}{2} L(x^2)$$

Puisque L est en particulier continue en 1 et en -1 , on peut faire tendre x vers 1 dans cette relation pour obtenir $L(1) + 2L(-1) = 0$.

6. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, et la série numérique $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. La série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge en fait normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$. On peut donc lui appliquer le théorème d'interversion de limites : compte tenu de la continuité de L en 1, on a

$$L(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} L(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Partie III

1. Il faut en fait supposer ici $n \geq 2$. Posons $a = 2^{n-1}$; soit $\varphi : m \mapsto m + a$. Alors, a est pair (puisque $n - 1 \geq 1$...) et $2^{n-1} + a = 2^n$, donc φ transforme les entiers impairs entre 0 et $2^{n-1} - 1$ en entiers impairs entre $a = 2^{n-1}$ et $2^n - 1$.

De plus, chaque entier impair b entre 2^{n-1} et $2^n - 1$ a un unique antécédent par φ , $b - a$, qui est de même un entier impair entre 0 et $2^{n-1} - 1$, d'où le résultat.

2. Puisque x est dans $]0, \pi/2[$, il en est de même pour $x/2$ et $(x + \pi)/2$; les différents sinus apparaissant dans la formule sont donc bien non nuls. De plus, puisque $\sin(u + \pi/2) = \cos u$ pour tout u , on a

$$\frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin^2(\frac{x+\pi}{2})} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2}) \cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{4}{\sin^2 x}$$

en utilisant $\sin(2u) = 2 \sin u \cos u$.

3. Pour $n = 1$, la relation à démontrer est $2 = \frac{1}{\sin^2(\pi/4)}$, donc est bien vérifiée.

Supposons établi à un rang $n \geq 1$ la relation $2^{2n-1} =$

$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}$. Multiplions par 4 et appliquons la question précédente, en utilisant de plus $\sin(\pi - u) = \sin u$ pour la deuxième somme :

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2^{n+1}-2k-1)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

On vérifie alors que les nombres $2^{n+1} - 2k - 1$ sont les entiers impairs entre 2^n et $2^{n+1} - 1$, donc les $2k + 1$ quand k décrit l'intervalle d'entiers $[2^{n-1}, 2^n - 1]$. On obtient donc bien la formule cherchée au rang $n + 1$.

4. (a) On a $\sin''(x) = -\sin x \leq 0$ sur $[0, \pi/2]$, donc la fonction sinus est concave sur cet intervalle. En particulier, la courbe est donc au-dessus de la corde passant par les points d'abscisses 0 et $\pi/2$, qui est la droite d'équation $y = 2x/\pi$; cela fournit la relation demandée.

(b) Si $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$, alors $(2k + 1)\pi/2^{n+1}$ est dans $[0, \pi/2]$, on peut donc lui appliquer le (a). Puisque tout est positif :

$$\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right) \geq \frac{4}{\pi^2} \frac{(2k+1)^2 \pi^2}{(2^{n+1})^2} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \leq \frac{\pi^2}{4}$$

qui constitue le résultat demandé avec $C = \pi^2/4$. (c) Il semble que le concepteur du sujet ait eu dans l'idée d'utiliser un "théorème de convergence dominée pour les séries" (hors programme) : on transforme la somme du 3. en somme infinie en rajoutant des termes

nuls et on multiplie par $(\pi/2^{n+1})^2$ pour obtenir $\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n}$.

On remplace ensuite chaque $a_{k,n}$ par sa limite quand n tend vers

$+\infty$, la majoration du (b) fournissant l'hypothèse de domination qui autorise ce passage à la limite.

À partir de 3., on peut déterminer la somme de la série de manière plus conforme au programme, de la manière suivante : on vérifie aisément que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ est prolongeable par continuité en 0, donc bornée sur $]0, \pi/2]$. Soit K majorant sa valeur absolue sur $]0, \pi/2]$.

Soit $n \geq 1$. Notons A_n la somme donnée en 3. (qui vaut 2^{2n-1}). En posant $x_k = (2k+1)\pi/2^{n+1}$, on a alors

$$\left| A_n - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left(\frac{2^{n+1}}{\pi} \right)^2 \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left| \frac{1}{\sin^2 x_k} - \frac{1}{x_k^2} \right| \leq K \cdot 2^{n-1}$$

Multiplions tout par $(\pi/2^{n+1})^2$; en tenant compte de la valeur de A_n , on obtient

$$\left| \frac{\pi^2}{8} - \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} \right| \leq \frac{K\pi^2}{2^{n+3}}$$

On vient donc de trouver une suite extraite de la suite des sommes partielles de la série $\sum 1/(2k+1)^2$, qui converge vers $\pi^2/8$; sachant que la série converge, $\pi^2/8$ est donc la limite de la suite des sommes partielles, donc la somme de la série.

5. Classiquement, on a
$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} +$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{L(1)}{4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}. \text{ La dernière somme valant } \pi^2/8, \text{ on en déduit que } L(1) = \pi^2/6.$$

La question II-5 donne alors $L(-1) = -\pi^2/12$.

6. Pour tout $x \in]0, 1[$, posons $M(x) = L(1-x) + L(x) + \ln x \ln(1-x)$.

x). Puisque L est dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée $-f$, et que $1-x$ est dans cet intervalle, M est dérivable sur $]0, 1[$, et, pour tout $x \in]0, 1[$,
$$M'(x) = -L'(1-x) + L'(x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} = \frac{\ln x}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x}$$

La fonction M est donc constante sur $]0, 1[$; en prenant la limite en 0, compte tenu de la continuité de L en 1, on voit que cette constante vaut $L(1)$, d'où le résultat.

7. En prenant $x = 1/2$ dans la relation précédente, on obtient
$$2L(1/2) = L(1) - (\ln 2)^2 \text{ d'où } L(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

8. Notons I l'intégrale proposée. On effectue le changement de variable $u = 1 - e^{-t}$:

$$I = \int_0^{1/2} \frac{-\ln(1-u)}{u} \frac{du}{1-u} = - \int_0^{1/2} \left(\frac{\ln(1-u)}{u} + \frac{\ln(1-u)}{1-u} \right) du$$

À ce stade, on peut justifier l'existence de I : la dernière forme est bien définie, puisque la fonction intégrée est prolongeable par continuité au segment $[0, 1/2]$; et le changement de variable effectué réalisait un C^1 -difféomorphisme entre les intervalles ouverts considérés.

Le calcul est maintenant immédiat. La fonction $u \mapsto \frac{\ln(1-u)}{(1-u)}$ est

la dérivée de $u \mapsto -\ln^2(1-u)/2$, donc

$$I = L(1/2) + \frac{\ln^2 2}{2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Partie IV

1. Effectuons le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale définissant $L(x)$, pour éviter les problèmes de signes ; on obtient

$$L(x) = - \int_0^{-x} \frac{\ln(1+u)}{u} du.$$

On a $\ln(1+u)/u \geq 1/u$ pour $u \geq e-1$, et, pour tout $a > 0$, $\int_a^y du/u$ a pour limite $+\infty$ quand y tend vers $+\infty$. Donc, $L(x)$ a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

2. La fonction $x \mapsto 1 - 1/x$ est continue et strictement croissante sur $]0, 1[$. L'intervalle image est donc l'ouvert borné par les limites, c'est-à-dire $] -\infty, 0[$.

3. (a) Les fonctions $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto 1 - 1/x$ sont dérivables sur $]0, 1[$, à valeurs respectivement dans $]0, 1[$ et $] -\infty, 0[$; puisque L est en particulier dérivable sur ces deux intervalles, h_2 est dérivable sur $]0, 1[$. Pour tout $x \in]0, 1[$:

$$h_2'(x) = -L'(1-x) + \frac{1}{x^2} L'(1-1/x) = \frac{\ln x}{1-x} + \frac{1}{x^2} \frac{x}{x-1} \ln x = -\frac{\ln x}{x}$$

(b) Puisque $x \mapsto -\ln^2 x/2$ a pour dérivée $x \mapsto -\ln x/x$ sur $]0, 1[$, il existe un réel C tel que, pour tout $x \in]0, 1[$, $h_2(x) = -\ln^2 x/2 + C$. En prenant la limite en 1, on obtient $C = 0$, d'où le résultat demandé.

4. Dans la relation précédente, posons $u = 1 - 1/x$. Plus précisément, pour tout $u < 0$, le nombre $x = 1/(1-u)$ est dans $]0, 1[$; on peut donc lui appliquer la relation précédente, d'où, en divisant par u ,

$$\forall u < 0 \quad \frac{1}{u} L\left(1 - \frac{1}{1-u}\right) + \frac{L(u)}{u} = -\frac{1}{2u} \ln^2 \frac{1}{1-u} = -\frac{1}{2u} \ln^2(1-u)$$

Dans cette relation, le membre de gauche a pour limite 0 en $-\infty$ par croissances comparées. Dans le membre de droite, le terme $L(1 - 1/(1-u))$ a pour limite $L(1)$ quand u tend vers $-\infty$; le premier terme a donc pour limite 0 en $-\infty$. Par suite, $L(u)/u$ a pour limite 0 en $-\infty$.

5. Puisque L tend vers $-\infty$ en $-\infty$, mais que $L(x)/x$ y a pour limite 0, la courbe a une branche parabolique de direction horizontale.

Partie V

1. L'équation homogène associée équivaut à $xy' + y = 0$ sur J ; ses solutions sont les fonctions f vérifiant $xf(x) = K$ pour une certaine constante K , ce sont les fonctions de la forme $x \mapsto K/x$ où K est une constante réelle.

L'ensemble des solutions est donc la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \mapsto 1/x$.

2. On applique la méthode de variation des constantes : on cherche les solutions sous la forme $x \mapsto K(x)/x$, où K est une fonction dérivable sur J . Après calculs, on obtient l'équation $(1-x)K'(x) = 1$.

Les solutions sur J sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{C}{x} = -f(x) + \frac{C}{x}$ où C est un réel quelconque.

On peut remarquer qu'il est bien plus rapide de résoudre en réécrivant dès le départ l'équation sous la forme $xy' + y = \frac{1}{1-x}$.

3. Les solutions de $(\mathcal{F}_J)$ sont évidemment les primitives des solutions de $(\mathcal{E}_J)$, ce qui conduit directement à la formule donnée.

4. Pour obtenir une solution sur $] -\infty, 1[$, il faut raccorder une solution sur $] -\infty, 0[$ à une solution sur $]0, 1[$ en 0.

Puisque L a une limite finie en 0, la seule manière d'obtenir une limite finie en 0 pour une telle solution est de choisir la constante A nulle ; puis, pour que les deux solutions aient la même limite en 0, il faut prendre la même valeur de B de part et d'autre de 0.

Réciproquement, toute fonction de la forme $L + B$, où B est un réel, est de classe C^∞ sur $] -\infty, 1[$ et vérifie l'équation sur cet intervalle (puisque en particulier $L'(0) = -f(0) = 1$). Les solutions cherchées sont donc les fonctions de la forme $L + B$, qui forment une droite affine.

Devoir Libre

19 Équations de Bessel et la fonction Gamma

Blague du jour

C'est un prof, pensant au glaçon qui passe à l'état de vapeu, demande à ses élèves de prépas si tout le monde a bien compris ce que c'est que la sublimation.

« Est-ce que vous pouvez me donner un exemple de solide qui se transforme en gaz sans passer par l'état liquide ? »

Et du fond de la classe quelqu'un lance : « Les cigarettes m'sieur ! »



Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846)

Astronome et mathématicien allemand, connu principalement pour avoir effectué en 1838 les premières mesures précises de la distance d'une étoile et pour être le fondateur de l'école allemande d'astronomie d'observation. Bessel est le premier à déterminer avec succès la parallaxe, et par là même la distance d'une étoile fixe. il émit, le premier, l'hypothèse que les queues de comètes pouvaient être dues à une force répulsive et l'existence d'une grande planète au-delà d'Uranus.

Mathématicien du jour

Énoncé : CNC 2007, MP

Définitions Pour tout le problème, on définit une famille d'équations différentielles $(F_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$ par :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^+, \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{\lambda^2}{x^2}\right)y = 0. \quad (F_\lambda)$$

par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions à valeurs réelles.

La partie I du problème est largement indépendante des autres.

PARTIE I

- ① Soit x un réel.

- ① Étudier, selon les valeurs de x , l'intégrabilité sur l'intervalle $]0, 1]$ de la fonction

$$t \mapsto t^{x-1}e^{-t}.$$

- ② Montrer que cette même fonction est intégrable sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

- ② À quelle condition, nécessaire et suffisante, sur le complexe z la fonction $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

- ③ On pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t} dt$, $z \in \mathbf{C}$ et $\text{Re}(z) > 0$.

- ① Soit z un complexe tel que $\text{Re}(z) > 0$; montrer que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

- ② En déduire, pour tout réel $\alpha > -1$ et tout $p \in \mathbf{N}^*$, l'identité

$$\Gamma(\alpha + p + 1) = (\alpha + p)(\alpha + p - 1) \dots (\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 1).$$

- ③ Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

- ④ Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n + 1)$ pour tout entier naturel n .

- ④ ① Soit z un complexe tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$; montrer soigneusement que

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- ② Montrer que la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}$ est définie sur la partie $\mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ du plan complexe et qu'elle y est continue.

La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ à $\mathbf{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

- ⑤ Soient a et b deux réels avec $0 < a < b$, et soit $t > 0$.

- ① Déterminer $\max(t^{a-1}, t^{b-1})$ selon les valeurs de t .

- ② Montrer que

$$\forall x \in [a, b], \quad 0 \leq t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}).$$

- ③ En déduire que la fonction Γ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et donner l'expression de sa dérivée sous forme intégrale.

- ④ Donner un équivalent de la fonction Γ au voisinage de 0.

Soient $\lambda \geq 0$, α un réel et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière, à coefficients réels et de rayon de convergence $R > 0$. Pour tout $x \in]0, R[$, on pose

$$y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}.$$

- ① On suppose que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) et que $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\alpha^2 = \lambda^2, \quad ((\alpha + 1)^2 - \lambda^2)a_1 = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, ((\alpha + n)^2 - \lambda^2)a_n = 0.$$

- ② On suppose que $\alpha = \lambda$ et que la fonction y_α est solution de l'équation différentielle (F_λ) avec $a_0 \neq 0$.

- ① Montrer que

$$\forall p \in \mathbf{N}, a_{2p+1} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha + 1)}{2^{2p} p! \Gamma(\alpha + p + 1)}.$$

- ② Les a_n étant ceux trouvés précédemment ; calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$.

- ③ Montrer que si $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) = 1$ alors

$$\forall x > 0, \quad y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda},$$

puis donner un équivalent de la fonction y_λ au voisinage de 0.

- ③ On suppose que $2\lambda \notin \mathbf{N}^*$; si $p \in \mathbf{N}^*$, on note le produit $(\alpha + p)(\alpha + p - 1) \dots (\alpha + 1)$ par $\frac{\Gamma(\alpha + p + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)}$ si $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \{-1, -2, \dots\}$.

- ① En reprenant la question précédente avec $\alpha = -\lambda$, montrer que la fonction

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p! \Gamma(-\lambda + p + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\lambda}$$

est aussi solution, sur $\mathbf{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ) .

- ② Vérifier que la famille $(y_\lambda, y_{-\lambda})$, d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbf{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_λ) .

PARTIE III

Dans cette partie, on va construire, dans les cas $\lambda = 0$ ou 1 , une solution z_λ de l'équation différentielle (F_λ) , définie sur $\mathbf{R}_+^*$, qui soit linéairement indépendante de la solution y_λ .

A- Étude de (F_0)

On rappelle que

$$\forall x > 0, \quad y_0(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2^p p!)^2} x^{2p}.$$

Soit $\alpha > -1$; on définit la suite $(a_{2p}(\alpha))_{p \in \mathbf{N}}$ par la donnée de $a_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$a_{2p}(\alpha)(\alpha + 2p)^2 = a_{2(p-1)}(\alpha), \quad p \geq 1 \quad (1).$$

- ① ① Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2}.$$

- ② On voit bien que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonc-

tions a_{2p} sont dérivables en 0 ; on pose alors

$$b_p = \frac{da_{2p}}{d\alpha}(0) = a'_{2p}(0) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$b_p = -\frac{1}{(2^p p!)^2} H_p.$$

- ③ Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 1} b_p z^{2p}$.

- ② ① En utilisant la relation (1), montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) = b_{p-1},$$

avec la convention $b_0 = 0$.

- ② En déduire que la fonction $z_0 : x \mapsto y_0(x) \ln x + \sum_{p=1}^{+\infty} b_p x^{2p}$ est une solution de l'équation différentielle (F_0) , définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

- ③ Vérifier que la famille (y_0, z_0) , d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbf{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_0) .

B- Étude de (F_1)

On rappelle que

$$\forall x > 0, \quad y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!(p+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}.$$

Soit $\alpha \in]0, 2[$; on définit la suite $(c_{2p}(\alpha))_{p \in \mathbf{N}}$ par la donnée de $c_0(\alpha) = 1$ et la relation

$$c_{2p}(\alpha)((\alpha + 2p)^2 - 1) = c_{2(p-1)}(\alpha), \quad p \geq 1 \quad (2).$$

- ① ① Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}.$$

- ② On voit là aussi que, pour tout entier naturel $p \geq 1$, les fonctions c_{2p} sont dérivables en 1 ; on pose alors

$$d_p = \frac{dc_{2p}}{d\alpha}(1) = c'_{2p}(1) \quad \text{et} \quad H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}.$$

Montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,

$$d_p = -\frac{1}{2^{2p+1}p!(p+1)!}(H_p + H_{p+1} - 1).$$

- ③ Calculer alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p \geq 1} d_p z^{2p}$.

- ② ① En utilisant la relation (2), montrer que, pour tout entier naturel $p \geq 1$,
 $((1 + 2p)^2 - 1)d_p + 2(1 + 2p)c_{2p}(1) = d_{p-1},$

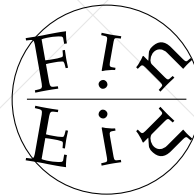
avec la convention $d_0 = 0$.

- ② En déduire que la fonction $u_1 : x \mapsto 2y_1(x) \ln x + \sum_{p=1}^{+\infty} d_p x^{2p+1}$ est une solution de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)y = \frac{2}{x}, \quad (E_1)$$

définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

- ③ ① Montrer que l'équation différentielle (E_1) possède une solution v_1 , définie sur $\mathbf{R}_+^*$, qui est de la forme $v_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n x^{n-1}$.
 ② Vérifier que la fonction $z_1 = v_1 - u_1$ est une solution de l'équation différentielle (F_1) , définie sur $\mathbf{R}_+^*$.
 ④ Vérifier que la famille (y_1, z_1) , d'éléments de $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$, est libre et décrire l'ensemble des solutions, sur $\mathbf{R}_+^*$, de l'équation différentielle (F_1) .



À la prochaine

Corrigé : Pr. Taibi, CPGE Rabat, Maroc

Partie I

- L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ pour tout réel x .
 - On a : $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$, donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1[$ si, et seulement si $1 - x < 1$ soit $x > 0$.
 - On a aussi $t^{x-1}e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
- L'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, et que pour tout $t > 0$, $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{\Re(z)-1}$, donc par la question 1°), l'application $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $\Re(z) > 0$.
- Quelques formules utiles :
 - Les applications $t \mapsto t^z$ et $t \mapsto e^{-t}$ sont de classes C^1 sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $|e^{-t}t^z| = e^{-t}t^{\Re(z)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. On applique alors une intégration par parties à l'intégrale $\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt$:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{+\infty} +$$

$$z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z) \text{ pour tout } z \text{ tel que } \Re(z) > 0$$

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $\Gamma(z+p) = \Gamma((z+p-1)+1) = (z+p-1)\Gamma(z+p-1)$.

$$\text{D'où : } \prod_{k=1}^p \Gamma(z+k) = \prod_{k=1}^p (z-k-1)\Gamma(z-k-1) =$$

$$\prod_{k=1}^{p-1} (z-k) \prod_{k=1}^{p-1} \Gamma(z-k) \text{ et par suite :}$$

$$\Gamma(z+p) = \prod_{k=1}^{p-1} (z-k)\Gamma(z)$$

On prend $z = \alpha + 1$, on a : $\Re(z) = \Re(\alpha + 1) = \Re(\alpha) + 1 > 0$ et par suite

$$\Gamma(\alpha + 1 + p) = \gamma(\alpha + 1) \prod_{k=1}^{p-1} (\alpha + 1 + k) = \Gamma(\alpha + 1)(\alpha + 1) \dots (\alpha + p)$$

- Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue et strictement positive, donc $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t} dt > 0$.
- Par un simple calcul, on a $\Gamma(1) = 1$ et par b) pour $\alpha = 0$, $p = n$, on a ::

$$\Gamma(n+1) = \prod_{k=1}^n k = n!$$

- Développement en série de Γ .

- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > 0$, on a : $\Gamma(z) =$

$$\int_{]0,1[} t^{z-1} e^{-t} dt + \int_{[1,+\infty[} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Ecrivons $e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n$, on a alors : $t^{z-1} e^{-t} =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$$

Si l'on pose $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1}$ pour $t \in]0,1]$, on a : f_n est intégrable sur $]0,1]$ pour tout entier naturel n et que $\int_{]0,1]} |f_n(t)| dt \leq \int_{]0,1]} \frac{1}{n!} dt = \frac{1}{n!}$ et puisque la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, il en résulte par le théorème d'intégration terme à terme que

$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$$

b. Posons $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ (fraction rationnelle en z)

pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|f_n(z)| = \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+\Re(z)|}$ car $|n+\Re(z)| \leq |n+z|$,

donc $\sum f_n(z)$ converge absolument et par suite $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

Soit K un compact inclu dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, et $\alpha = d(\mathbb{Z}^-, K)$, on a $\alpha > 0$ car $\mathbb{Z}^-$ fermé et K compact. On a alors pour tout $z \in K$, et tout $n \in \mathbb{N}$, $|n+z| = d(-n, z) \geq \alpha$,

donc $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|n+z|} \leq \frac{1}{n!} \frac{1}{\alpha}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge, il en résulte que $\sum f_n$ converge localement uniformément sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, donc par le théorème de continuité la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.

On peut aussi montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est continue en tout point z_0 de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ en effet : Comme $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ est un ouvert, on a pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, il existe $r > 0$ tel $B(z_0, r) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, on prend alors le compact $K = \overline{B}(z_0, \alpha)$ et on termine comme avant.

5. Soit $0 < a < b$ et $t > 0$, on a : $t^{a-1} = e^{(a-1)\ln(t)}$.

a. Si $t \in]0,1]$, alors $\ln(t) \leq 0$, donc $(a-1)\ln(t) \geq (b-1)\ln(t)$ et comme $x \mapsto e^x$ est croissante, on déduit que $t^{a-1} \geq t^{b-1}$. Soit $\text{Max}(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{a-1}$.

Si $t > 1$, alors $\ln(t) > 0$, donc $t^{a-1} < t^{b-1}$ et par suite $\text{Max}(t^{a-1}, t^{b-1}) = t^{b-1}$.

Conclusion finale : Pour tous $0 < a < b$ et $t > 0$, on a :

$$\text{Max}(t^{a-1}, t^{b-1}) \leq t^{a-1} + t^{b-1}.$$

b. Pour $t \in]0,1]$, on a d'après a) $0 < t^{x-1} \leq \text{Max}(t^{x-1}, t^{a-1}) = t^{a-1} = \text{Max}(t^{a-1}, t^{b-1})$

de même si $t > 1$, on a : $0 < t^{x-1} \leq \text{Max}(t^{x-1}, t^{b-1}) = t^{b-1} = \text{Max}(t^{a-1}, t^{b-1})$

En conclusion : $0 < t^{x-1} \leq \text{Max}(t^{a-1}, t^{b-1})$ pour tout $t \in]0, +\infty[$

c. La fonction $f : (x, t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue sur

$$\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$$

L'application $x \mapsto t^{x-1}e^{-t} = e^{-t}e^{(x-1)\ln(t)}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\frac{d}{dx}f(x, t) = \ln(t)f(x, t)$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

De plus pour tout compact $K = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x, t) \in K \times \mathbb{R}_+^*$, on a : $\left| \frac{d}{dx}f(x, t) \right| \leq |\ln(t)| e^{-t}t^{x-1} \leq |\ln(t)| e^{-t} \text{Max}(t^{a-1}, t^{b-1}) \leq |\ln(t)| e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ et que la fonction $\varphi : t \mapsto |\ln(t)| e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1})$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\sqrt{t}\varphi(t) = \sqrt{t}(t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}|\ln(t)| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$. Pour $t \geq 1$, $\varphi(t) \leq (t^{a-1} + t^{b-1})te^{-t} = (t^a + t^b)e^{-t}$.

Donc par le théorème de dérivation sous le signe intégral, il en résulte que Γ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dx}f(x, t)dt = \int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt.$$

d. On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et comme Γ est continue en 1, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc

$$\Gamma(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

Partie II :

$$\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \quad y_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

1. $a_0 \neq 0$ et y_α est solution sur $]0, R[$ de l'équation (F_λ) .

L'application $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (somme d'une série entière), donc y_α est de classe C^∞ sur $]0, R[$ (produit de fonctions de classes C^∞).

$$\text{Par calculs : } y'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1}$$

$$y''_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}$$

Donc

$$\begin{aligned} y_\alpha \text{ est solution sur }]0, R[\text{ de } (F_\lambda) &\Leftrightarrow \forall x \in]0, R[, -(x^2 + \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, R[\\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} ((n + \alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^{\alpha+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{\alpha+n-2} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0, R[\\ &\quad \sum_{n=0}^{\infty} ((n + \alpha)^2 - \lambda^2) a_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^{n-2} \end{aligned}$$

:

On fait tendre x vers 0^+ , obtenir $\alpha^2 - \lambda^2 = 0$ car $a_0 \neq 0$ et puis $((\alpha + 1)^2 - \lambda^2) a_1 = 0$ et une récurrence $((\alpha + n)^2 - \lambda^2) a_n = a_{n-2}$.

2. $\alpha = \lambda, a_0 \neq 0$ et y_λ est solution sur $]0, R[$ de (F_λ) .

- a. On a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\lambda+n} = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. On sait que (1)
 $((\lambda+n)^2 - \lambda^2)a_n = a_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$
 Puisque $(\lambda+1)^2 - \lambda^2 \neq 0$, on a $a_1 = 0$ et par la relation (1), on a : $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $a_{2p} = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 - \lambda^2} a_{2(p-1)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc $\prod_{k=1}^p a_{2k} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} \prod_{k=1}^p a_{2(k-1)} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} \prod_{k=0}^{p-1} a_{2k}$ soit : $a_{2p} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} a_0$.
 Mais $(\lambda+2k)^2 - \lambda^2 = 4\lambda k + 4k^2 = 4k(\lambda+k)$, d'où
 $\prod_{k=1}^p \frac{1}{(\lambda+2k)^2 - \lambda^2} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(\lambda+k)} = \frac{1}{4^p p!} \prod_{k=1}^p \frac{1}{\lambda+k} = \frac{1}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$.
 En conclusion :
 $\forall p \in \mathbb{N}, a_{2p} = \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)}$

- b. Pour $x > 0$, on a : $\left| \frac{a_{2p} x^{2p}}{a_{2(p-1)} x^{2(p-1)}} \right| = \frac{a_{2p}}{a_{2(p-1)}} x^2 = \frac{1}{(\lambda+2p)^2 - \lambda^2} x^2 \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, donc le rayon de convergence R est infini.

- c. On suppose $a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \forall x > 0, y_\lambda(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} x^{2p+\lambda} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_0}{p!} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda} 2^\lambda \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\lambda} \text{ car } a_0 2^\lambda \Gamma(\lambda+1) = 1 \end{aligned}$$

Equivalent au voisinage de 0 :

D'après les propriétés des séries entières, on a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \frac{1}{\Gamma(\lambda+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$$

Donc

$$y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$$

3. On suppose ici que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

- a. D'après la question 1 et 2) la fonction $y_{-\lambda}$ est aussi solution sur R_+^* de (F_λ) .
 b. Montrons $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions sur R_+^* de (F_λ) .

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} = 0$.

Comme $y_\lambda(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\lambda$ et $y_{-\lambda}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\lambda}$, on a : $y_\lambda(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $y_{-\lambda}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$, donc si l'on suppose $\alpha \neq 0$, alors en faisant tendre x vers 0, on aboutit à une contradiction.

On conclut que $\alpha = 0$ et puis $\beta = 0$, donc les solutions y_λ et $y_{-\lambda}$ sont linéairement indépendantes.

(F_λ) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients continus et sans second membre, son ensemble de solutions est donc un espace vectoriel réel de dimension deux. En conséquence : $(y_\lambda, y_{-\lambda})$ est un système fondamental de solutions de (F_λ) et que toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_λ) est de la forme :

$$y = \alpha y_\lambda + \beta y_{-\lambda} \quad \text{où} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Partie III.

A- Etude de (F_0) :

Pour $x > 0$, on a : $y_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^n n!)^2} x^{2n}$.

1. .

a. Pour tout entier $k \geq 1$: $\prod_{k=1}^p a_{2k}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2} \prod_{k=1}^p a_{2(k-1)}$, donc $a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2} a_0(\alpha)$.
Or $a_0(\alpha) = 1$, d'où la formule cherchée :

$$a_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2} \text{ pour tout } p \geq 1.$$

b. D'après les notations de l'énoncé, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_{2p}(\alpha) = \exp\left(\sum_{k=1}^p \ln\left(\frac{1}{(\alpha + 2k)^2}\right)\right) = \exp\left(-2 \sum_{k=1}^p \ln(\alpha + 2k)\right)$

$2k)$, donc : $a'_{2p}(\alpha) = - \sum_{k=1}^p \frac{2}{\alpha + 2k} a_{2p}(\alpha)$ et puis

$$\begin{aligned} a'_{2p}(0) &= -2 \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k} a_{2p}(0) \\ &= - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} a_{2p}(0) \\ &= -H_p \cdot a_{2p}(0) \end{aligned}$$

Or $a_{2p}(0) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{2^{2p} (p!)^2} = \left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2$, donc :

$$b_p = a'_{2p}(0) = - \left(\frac{1}{2^p p!}\right)^2 H_p$$

c. Calcul du rayon de convergence R_b :

On a $b_p \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} - \frac{1}{(2^p p!)^2} \ln(p) = o\left(\frac{1}{2^p p!}\right)$ car $H_p \sim \ln(p)$, donc le rayon de convergence de la série entière $\sum b_p x^p$ est infini :

$$R_b = +\infty$$

2. .

a. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $(2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) = -(2p)^2 a_{2p}(0) + a_{2p}(0) \left(-(2p)^2 H_p \right)$

Mais $(2p)^2 a_{2p}(0) = a_{2(p-1)}(0)$, donc :

$$\begin{aligned} (2p)^2 b_p + 4p a_{2p}(0) &= -a_{2p}(0) H_p + 4p a_{2p}(0) \\ &= -a_{2(p-1)}(0) H_{p-1} - \underbrace{\frac{1}{p} a_{2(p-1)}(0)}_{=0} + 4p a_{2p}(0) \\ &= b_{p-1} \end{aligned}$$

D'où le résultat demandé.

- b. L'application $x \mapsto y_0(x) \ln(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ (Opérations), donc z_0 est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$z_0(x) = y_0(x) \ln(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p}$$

$$z'_0(x) = \frac{1}{x} y_0(x) + \ln(x) \cdot y'_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} p b_p x^{2p-1}$$

$$z''_0(x) = -\frac{1}{x^2} y_0(x) + \frac{2}{x} y'_0(x) + \ln(x) \cdot y''_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} p(2p-1) b_p x^{2p-2}$$

$$\text{Donc } x^2 z''_0(x) + x z'_0(x) - (x^2 + 0) z_0(x) = -y_0(x) + 2xy'_0(x) + \ln(x) \cdot x^2 y''_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-1) b_p x^{2p}$$

En tenant compte du fait que y_0 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) et de la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned} x^2 z''_0(x) + x z'_0(x) - (x^2 + 0) z_0(x) &= 2xy'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p (2p)^2 x^{2p} \\ &= \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} 4p a_{2p}(0) x^{2p} + \sum_{p=1}^{\infty} b_p}_{\sum_{p=1}^{\infty} b_{p-1} x^{2p}} \\ &\quad \text{car } xy'_0(x) = b_0 x^2 = 0 \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure.

3. Comme $y_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{\Gamma(0+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p} = 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty, \text{ on a :}$$

$$z_0(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \ln(x).$$

ceci permet de prouver (comme à la question II 3.b) que les solutions y_0 et z_0 sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_0) sont linéairement indépendantes. et avec les mêmes raisons que dans III.3b), toute solution de (F_0) est de la forme :

$y = \alpha y_0 + \beta z_0$ où α, β sont des constantes réelles arbitraires.

B- Etude de

$$+ y_0(x) + \ln(x) \cdot xy'_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p 2p x^{2p}$$

$$- x^2 \ln(x) y_0(x) - \sum_{p=1}^{\infty} b_p 2p x^{2p+2}$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a : $c_{2p}(\alpha) = \frac{1}{(\alpha + 2p)^2 - 1} c_{2(p-1)}$, donc $\prod_{k=1}^p c_{2k}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1} \prod_{k=1}^p c_{2(k-1)}$ et par

suite $c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1} c_0(\alpha)$.

et comme $c_0(\alpha) = 1$, on déduit que :

$$c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}$$

b. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $d_p = \frac{d}{d\alpha} c_{2p}(1)$. Comme

$$c_{2p}(\alpha) = \exp\left(-\sum_{k=1}^p \ln((\alpha + 2k)^2 - 1)\right), \text{ on a : } c'_{2p}(\alpha) = -\sum_{k=1}^p \frac{2(\alpha + 2k)}{(\alpha + 2k)^2 - 1} c_{2p}(\alpha). \text{ D'où}$$

$$d_p = -\sum_{k=1}^p \frac{2(1 + 2k)}{(1 + 2k)^2 - 1} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1} = -\sum_{k=1}^p \frac{2(1 + 2k)}{4k(1 + k)} \prod_{k=1}^p \frac{1}{(1 + 2k)^2 - 1}.$$

$$\text{Or } \prod_{k=1}^p \frac{1}{(1 + 2k)^2 - 1} = \prod_{k=1}^p \frac{1}{4k(1 + k)} = \frac{1}{2^{2p}} \prod_{k=1}^p \frac{1}{k(1 + k)} = \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p! (p + 1)!}$$

$$\frac{2(1 + 2k)}{4k(k + 1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k(k + 1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k + 1} \right)$$

donc $\sum_{k=1}^p \frac{2(1 + 2k)}{4k(k + 1)} = \frac{1}{2} (H_p + H_{p+1} - 1)$. D'où le résultat demandé :

$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1} p! (p + 1)!} (H_p + H_{p+1} - 1)$$

c. On a :

$$d_p = \frac{1}{2^{2p+1} p! (p + 1)!} (H_p + H_{p+1} - 1) = \frac{1}{2^{2p+1} p! (p + 1)!} (2H_p + \frac{1}{p + 1} - 1) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2^{2p}} \frac{1}{p! (p + 1)!} \ln(p),$$

donc le rayon de convergence demandé :

$$R_d = +\infty$$

2. .

a. On a : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $((1 + 2p)^2 - 1) d_p + 2(1 + 2p) c_{2p}(1) = d_{p-1}$. En effet :

par dérivation de l'identité $c_{2p}(\alpha) ((1 + 2p)^2 - 1) = c_{2(p-1)}(\alpha)$, on a : $c'_{2p}(\alpha) ((\alpha + 2p)^2 - 1) + 2(\alpha + 2p) c_{2p}(\alpha) = c'_{2(p-1)}(\alpha)$

Pour $\alpha = 1$, on a :

$$d_p ((1 + 2p)^2 - 1) + 2(1 + 2p) c_{2p}(1) = d_{p-1}$$

b. Il est clair que les fonctions y_1 et $x \mapsto \sum_{p=1}^{\infty} d_p x^{2p+1}$ sont

de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation on obtient pour tout $x > 0$:



$$\begin{aligned}
 x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1 + x^2) u_1(x) &= x^2 \left(2y_1'(x) \ln(x) + \frac{4}{x} y_1'(x) - \frac{2}{x^2} y_1(x) u_1''(x) - \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-1) d_p x^{2p-2} \right) u_1(x) = 4xy_1'(x) + \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 \\
 &+ x \left(2y_1'(x) \ln(x) + \frac{2}{x} y_1(x) + \sum_{p=1}^{\infty} (2p+1) d_p x^{2p} \right) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4(2p+1)}{p!(p+1)!2^{2p+1}} x^{2p} \\
 &- (1+x^2) \left(2y_1(x) \ln(x) + \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p+1} \right) - \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^{2p} \\
 &= 2 \ln(x) (x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) - (1+x^2) y_1(x)) + 4x y_1'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}} \frac{4(2p-1)}{2} \\
 &+ \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 - 1) = \sum_{p=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{p!(p+1)!2^{2p}}}_{=c_{2p}(1)} 4(2p-1) \\
 &+ \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1)^2 - 1) = \sum_{p=1}^{\infty} (2(2p+1)c_{2p}(1) + \dots) \\
 &= 2x
 \end{aligned}$$

Comme y_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) , on a :
 $x^2 y_1''(x) + x y_1'(x) - (1 + x^2) y_1(x) = 0$ et donc

On déduit alors que u_1 est bien solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1)

3. .

a. On pose $u_1(x) = \frac{e_0}{x} + \sum_{p=1}^{\infty} e_p x^{p-1}$ avec $R =$
 $Rcv(\sum_{p \geq 1} e_p x^{p-1}) > 0.$
 Sur $]0, R[$, on a : $x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1 + x^2) u_1(x) -$
 $2x = x^2 \left(\frac{2e_0}{x^3} + \sum_{p=1}^{\infty} (p-1)(p-2) e_p x^{p-2} \right) +$

$$x \left(\frac{-e_0}{x^2} + \sum_{p=1}^{\infty} (p-1)e_p x^{p-2} \right) - 2x = \sum_{p=0}^{\infty} (p(p-1)e_p - e_{p-2})x^{p-1} - (e_0 + 2)x - e_1 = 0.$$
 comme dans la question

...., on déduit : $\begin{cases} e_0 = -2 \\ e_1 = 0 \\ \forall p \geq 3, p(p-2)e_p - e_{p-1} = 0 \end{cases}$, ce qui

permet de conclure par une récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $e_{2p+1} = 0$ et $e_{2p} = \frac{e_0}{2^{2p} p! (p+1)!} = -2c_{2p}(1)$ car $e_0 = -2$

et par suite R est infini et que u_1 est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1) .

- b. (F_1) est une équation différentielle linéaire sans second membre associée à (E_1) et comme z_1 et u_1 sont solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_1) , il en résulte que $z_1 - u_1$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) .
4. Comme dans la question....., en étudiant le comportement des solutions z_1 et y_1 au voisinage de 0^+ , on déduit que (y_1, z_1) est système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) , donc toute solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (F_1) est de la forme : $y : x \mapsto \alpha y_1(x) + \beta z_1(x)$ où α et β sont des constantes réelles arbitraires.

Leonhard Paul Euler (1707-1783)

Mathématicien et physicien suisse, il fit d'importantes découvertes dans le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il introduisit également une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes. Il est également connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie.

Mathématicien du jour

❑ Problème I : Extrait CCP 2006, MP

Si l'on rentre sur un logiciel de calcul formel l'instruction :

`sum(1/(n^2-α^2), n=1..infinity);`

on obtient le résultat suivant :

$$-\frac{1}{2} \frac{\psi(1-\alpha)}{\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\psi(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Un des objectifs du problème qui comporte trois paragraphes est de démontrer la formule correspondante suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}$$

où $\alpha \in]0, 1[$ et ψ est une fonction « d'Euler » que l'on définira ultérieurement.

Dans le paragraphe I, on définit la fonction Gamma d'Euler et on en montre quelques propriétés que l'on utilisera dans le paragraphe II pour définir la fonction ψ d'Euler et démontrer la formule ci-dessus.

Enfin, dans le paragraphe III, on étudie plus en détail la fonction Gamma, dans le but de la représenter graphiquement.

Les paragraphes II et III sont indépendants mais utilisent des résultats du paragraphe I.

1. Questions préliminaires

- Soit $\alpha \in]0, 1[$, justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$.
- Pour quelle(s) valeur(s) de β l'intégrale $\int_0^1 t^\beta dt$ est-elle convergente ? On ne demande pas de justifier.

I. La fonction Gamma d'Euler

- Soit x un réel strictement positif, justifier l'existence d'un réel A strictement positif, tel que pour tout réel t strictement supérieur à A , on ait $e^{-t} t^{x-1} < \frac{1}{t^2}$, puis montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

- Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante notée $(\mathcal{F})$:

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\mathcal{F}).$$

En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

- Dérivabilité de la fonction Gamma*

Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

- Pour tout réel t strictement positif, on définit sur $]0, +\infty[$, la fonction h_t par $h_t(x) = t^{x-1}$.

Déterminer les variations de h_t . On pourra discuter selon la valeur de t .

En déduire que $\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[, 0 \leq t^{x-1} \leq (t^{a-1} + t^{b-1})$.

- Pour cette question, on pourra utiliser librement le résultat suivant : pour tout réel r strictement supérieur à -1 , l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^r |\ln t| dt$ est convergente.

Montrer avec soin que la fonction Γ est dérivable sur $[a, b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

La fonction Γ est donc dérivable sur $]0, +\infty[$. On montre de la même façon et **on admet** que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

- Soit p un entier naturel, écrire **sans justifier** $\Gamma^{(p)}(x)$ sous forme d'intégrale. ($\Gamma^{(p)}$ désigne la dérivée p -ième de Γ).

II. La fonction ψ d'Euler

On montre sans difficulté, que pour tout réel x strictement positif, $\Gamma(x) > 0$. On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction ψ d'Euler par $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$.

6. Relation entre ψ et des sommes.

a. Quelle relation différentielle relie ψ et $\ln \Gamma$? En déduire que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x+1) - \psi(x) = \frac{1}{x} \quad (\text{on pourra utiliser } (\mathcal{F})).$$

b. Soit n un entier naturel non nul, déterminer en fonction de n et de α , quatre réels u_1, v_1, u_2, v_2 tels que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k-\alpha} = \psi(u_1) - \psi(v_1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+\alpha} = \psi(u_2) - \psi(v_2).$$

7. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(X) = \frac{1}{X^2 - \alpha^2}$ puis en déduire que

l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha} (\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)) + \frac{1}{2\alpha} (\psi(n+1-\alpha) - \psi(n+1+\alpha)).$$

8. Énoncer avec soin l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t)dt$, puis l'utiliser pour montrer que $(\Gamma')^2 \leq \Gamma'' \times \Gamma$ où Γ'' désigne la dérivée seconde de Γ . En déduire que la fonction ψ est croissante.

9. Montrer que pour tout entier naturel non nul n , on a

$$0 \leq \psi(n+1+\alpha) - \psi(n+1-\alpha) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \quad (\text{penser que } \alpha \in]0, 1[).$$

$$\text{Conclure que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{\psi(1+\alpha) - \psi(1-\alpha)}{2\alpha}.$$

III. Etude de la fonction Gamma

10. Utiliser $(\mathcal{F})$ pour déterminer un équivalent de Γ au voisinage de 0_+ . En déduire la limite de Γ en 0.

11.

a. Justifier que Γ' est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b. Justifier l'existence d'un réel $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. En déduire le signe de Γ' et enfin, les variations de Γ .

12.

a. Déterminer la limite de Γ en $+\infty$. On pourra utiliser des résultats précédents.

b. Dessiner l'allure du graphe de Γ . On représentera, s'il y a lieu, les asymptotes et les tangentes horizontales.

❏ Problème II : Extrait e3a 2011, MP

On admet que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

① Pour tout $x \in]0, 2\pi[$, on note $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x}$.

① Montrer que l'application $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

② Montrer que l'application $t \mapsto \left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2} (\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$, définie sur $]0, 1]$, est prolongeable est prolongeable par continuité en 0.

③ En déduire que l'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

④ Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x}$, en effectuant le changement de variable $u = \frac{t}{(2(1 - \cos x))^{\frac{1}{4}}}$.

En déduire un équivalent de $I(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

② Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt.$$

③ Pour tout entier N supérieur ou égal à 1 et pour tout réel x , on note $S_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$.

① Calculer, pour tous réels x et t , la somme $\sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx)$. On pourra remarquer que $e^{-nt} \sin(nx)$ est la partie imaginaire du nombre complexe $e^{(-t+ix)n}$.

② En utilisant l'égalité $S_N(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx)}{\sqrt{t}} dt$, montrer que la suite $(S_N(x))$ est convergente pour tout x réel élément de $]0, 2\pi[$ et que l'on a l'égalité suivante :

$$\forall x \in]0, 2\pi[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos x}.$$

④ En déduire un équivalent de la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.

❑ Corrigé Problème II : Pr. Patte

① Soit $x \in]0, 2\pi[$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et équivalente en $+\infty$ à $2e^{-t^2}$, donc intégrable sur $[0, +\infty[$ et *a fortiori* sur $]0, +\infty[$.

① Soit $x \in]0, 2\pi[$. Alors, sur $[1, +\infty[$, $0 \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x} \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(t^2) - 1}$. Comme $t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t^2) - 1}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (même preuve que pour l'existence de $I(x)$), on obtient l'encadrement $0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - 1}$. Donc la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x}$ est bornée sur $]0, 2\pi[$.

② Au voisinage de 0, $\operatorname{ch}(t^2) = 1 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{24} + o(t^4)$.

On en déduit $\frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \xrightarrow{0} -\frac{1}{6}$. Donc $t \mapsto$

$\left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\frac{t^4}{2}(\operatorname{ch}(t^2) - 1)} \right|$ est prolongeable en une fonction continue sur $[0, 1]$.

③ Les deux intégrales existent (par continuité des fonctions sur $[0, 1]$).

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x} \right| &= \left| \int_0^1 \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right) \left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right)} \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right) \left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right)} \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{\frac{t^4}{2} + 1 - \operatorname{ch}(t^2)}{\left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right) \left(1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x\right)} \right| dt \end{aligned}$$

La majoration est possible du fait de la continuité de la fonction sous l'intégrale sur $[0, 1]$ et montre le caractère borné de $x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x} - \int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x}$.

④ Avec le changement de variable affine proposé :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x} = \frac{2}{(2(1 - \cos x))^{3/4}} \int_0^1 \frac{1}{(2(1 - \cos x))^{1/4}} \frac{du}{1 + u^4}.$$

La suite du calcul de l'intégrale est parfaitement inutile pour obtenir un équivalent de $I(x)$.

Quand x tend vers 0^+ , $\frac{1}{(2(1 - \cos x))^{1/4}}$ tend vers $+\infty$,

donc $\int_0^1 \frac{1}{(2(1 - \cos x))^{1/4}} \frac{du}{1 + u^4}$ tend vers $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

De plus, $2(1 - \cos x) \underset{0}{\sim} x^2$, donc $\frac{2}{(2(1 - \cos x))^{3/4}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^{3/2}}$. Donc $\int_0^1 \frac{dt}{1 + \frac{t^4}{2} - \cos^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$. D'après

1.c, $\int_0^1 \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x} \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t^2) - \cos^2 x}$ est bornée sur $]0, +\infty[$, $I(x) \underset{0}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$.

② Par changement de variable affine sur une intégrale convergente, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt \stackrel{u=nt}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{\sqrt{n}} \Gamma(1/2)$,
donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} dt$.

③ ①

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{n(-t+ix)} &= e^{-t+ix} \frac{1 - e^{N(-t+ix)}}{1 - e^{(-t+ix)}} = e^{-t+ix} \frac{(1 - e^{N(-t+ix)})}{(1 - e^{(-t+ix)})} \frac{(1 - e^{(-t-ix)})^{+\infty}}{(1 - e^{(-t-ix)})^0} \\ &= e^{-t+ix} \frac{(1 - e^{N(-t+ix)}) (1 - e^{(-t-ix)})}{(1 - e^{-t} \cos x)^2 + e^{-2t} \sin^2 x}. \end{aligned}$$

Après simplification, la partie imaginaire vaut

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx) &= \frac{e^{-t} (\sin x - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin((N+2)x))}{(1 - e^{-t} \cos x)^2 + e^{-2t} \sin^2 x} \\ &= \frac{\sin x - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin((N+2)x)}{2(\operatorname{cht} - \cos x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} S_N(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sum_{n=1}^N e^{-nt} \sin(nx)}{\sqrt{t}} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x - e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin((N+2)x)}{2(\operatorname{cht} - \cos x) \sqrt{t}} dt \\ &\text{semble converger vers } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{2(\operatorname{cht} - \cos x) \sqrt{t}} dt \stackrel{u=\sqrt{t}}{=} \\ &= \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{\operatorname{ch}(u^2) - \cos x}. \end{aligned}$$

On peut démontrer ce résultat à l'aide du théorème de convergence dominée ou par simple majoration :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin((N+2)x)}{2(\operatorname{cht} - \cos x) \sqrt{t}} dt \right| &\leq \\ \int_0^{+\infty} \left| \frac{-e^{-Nt} \sin((N+1)x) + e^{-(N+1)t} \sin((N+2)x)}{2(\operatorname{cht} - \cos x) \sqrt{t}} \right| dt &\leq \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-Nt} + e^{-(N+1)t}}{2(1 - \cos x) \sqrt{t}} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2(1 - \cos x)} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \right)$$

converge vers 0.

④ Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} I(x) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x^{3/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$

Devoir Surveillé

21 Transformée de Laplace

Blague du jour

Il était une fois un explorateur qui tomba devant un lion.
L'explorateur apeuré dit :
- Dieu, faites que ce lion est une pensée et foie en vous.
Et le lion répondis : Dieu, bénissez ce repas.



Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Mathématicien, astronome et physicien français. Il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique et de théorie des probabilités. Il était nommé ministre de l'Intérieur, puis comte de l'Empire, en enfin marquis.

Mathématicien du jour

Énoncé : CCP 2011, MP

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

On considère la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$.

- ① Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- ② On note S la fonction somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$. Déterminer S sur $] -R, R[$.
- ③ Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E) ; $2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

- ① Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
- ② Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

PROBLÈME : AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^+$;

-F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbf{R}^+$.
Pour tout f dans E , on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

① Questions préliminaire

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose :

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On considère les propositions suivantes :

- (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- (ii) G admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- (a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
- (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

PARTIE I : Exemples et propriétés

- ② ① Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$.
- ② Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- ③ Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}_*^+, \mathbf{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.

- ③ ① On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
- ② Soit $\lambda \geq 0$ réel. on considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $t \geq 0$ par : $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$. Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.
- ④ Soient f dans E et n dans $\mathbf{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$.
En déduire que g_n est un élément de E .
- ⑤ **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.
- ⑥ Régularité d'une transformée de Laplace
 - ① Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 4.
 - ② Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

PARTIE II : Comportements asymptotiques

Dans toute cette partie, f est un élément de E

⑦ On suppose dans cette question que f est dans F .

① Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

② *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbf{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbf{R}^+$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

⑧ *Théorème de la valeur finale*

On suppose dans cette question que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

① Démontrer que f appartient à F .

② Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dt[x]$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

③ En déduire à l'aide du théorème de la convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

④ Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

⑨ Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

① Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R' .

En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

② On fixe $\varepsilon > 0$.

Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait $|R(t)| \leq \varepsilon$.

En déduire que, pour tout $x > 0$, on a : $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$

③ Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

PARTIE III : Application

⑩ **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**

Ici f la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

① Démontrer que la fonction $G : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x f(t) dt$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

② En considérant la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

③ Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t) e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX} (x \sin X + \cos X) - 1).$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t) e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

Déterminer alors $\int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-xt} dt$.



- ④ Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ .

Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (La démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9)) :

Lorsque f dans E vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

On notera que, par rapport à la question 9), on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbf{R}^+$ par l'hypothèse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbf{R}.$$



À la prochaine

Devoir Surveillé

22 Transformée de Laplace

Blague du jour

Il était une fois un explorateur qui tomba devant un lion.
L'explorateur apeuré dit :
- Dieu, faites que ce lion est une pensée et foie en vous.
Et le lion répondis : Dieu, bénissez ce repas.



Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

Mathématicien, astronome et physicien français. Il a contribué de façon décisive à l'émergence de l'astronomie mathématique et de théorie des probabilités. Il était nommé ministre de l'Intérieur, puis comte de l'Empire, en enfin marquis.

Mathématicien du jour

Énoncé : CCP 2011, MP

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1

On considère la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$.

- ① Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
- ② On note S la fonction somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$. Déterminer S sur $] -R, R[$.
- ③ Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

EXERCICE 2

On considère l'équation différentielle (E) ; $2xy' - 3y = \sqrt{x}$.

- ① Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
- ② Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

PROBLÈME : AUTOUR DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans tout ce problème, on note :

- $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$;
- E l'ensemble des fonctions $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$, continues, telles que, pour tout $x > 0$ réel, la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ soit intégrable sur $\mathbf{R}^+$;



-F l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbf{R}^+$.
Pour tout f dans E , on appelle transformée de LAPLACE de f et on note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie pour tout $x > 0$ réel par :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

① Questions préliminaire

Soient $a \in \mathbf{R}$ et $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout x dans $[a, +\infty[$, on pose :

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

On considère les propositions suivantes :

- (i) f est intégrable sur $[a, +\infty[$;
- (ii) G admet une limite finie en $+\infty$.

Donner, sans démonstration, toutes les implications possibles entre (i) et (ii) lorsque :

- (a) f est positive sur $[a, +\infty[$;
- (b) f n'est pas positive sur $[a, +\infty[$.

PARTIE I : Exemples et propriétés

- ② ① Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbf{R}^+, \mathbf{R})$.
- ② Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
- ③ Justifier que $\mathcal{L}$ est une application linéaire de E dans $\mathcal{F}(\mathbf{R}_*^+, \mathbf{R})$, espace vectoriel des applications de $]0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.

- ③ ① On considère la fonction $\mathcal{U} : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\mathcal{U}(t) = 1$. déterminer $\mathcal{L}(\mathcal{U})$.
- ② Soit $\lambda \geq 0$ réel. on considère la fonction $h_\lambda : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout $t \geq 0$ par : $h_\lambda(t) = e^{-\lambda t}$. Démontrer que h_λ est dans E et déterminer $\mathcal{L}(h_\lambda)$.
- ④ Soient f dans E et n dans $\mathbf{N}$. On considère $g_n : t \mapsto t^n f(t)$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbf{R}$.
Pour $x > 0$, justifier de l'existence de $A > 0$ tel que $t^n e^{-xt} \leq e^{-\frac{xt}{2}}$ pour tout $t \geq A$.
En déduire que g_n est un élément de E .
- ⑤ **Transformée de Laplace d'une dérivée**
Soit f dans E de classe $\mathcal{C}^1$, croissante et bornée sur $[0, +\infty[$. Démontrer que f' est encore dans E et que l'on a : $\forall x \in]0, +\infty[, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)$.
- ⑥ Régularité d'une transformée de Laplace
 - ① Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que l'on a $\mathcal{L}(f)' = -\mathcal{L}(g_1)$ où g_1 a été définie à la question 4.
 - ② Démontrer que pour tout f dans E , la fonction $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbf{N}$, déterminer $\mathcal{L}(f)^{(n)}(x)$ à l'aide d'une transformée de Laplace.

PARTIE II : Comportements asymptotiques

Dans toute cette partie, f est un élément de E

⑦ On suppose dans cette question que f est dans F .

① Déterminer la limite en $+\infty$ de $\mathcal{L}(f)$.

② *Théorème de la valeur initiale*

On suppose, de plus, que f est de classe C^1 et croissante sur $\mathbf{R}^+$, avec f' bornée sur $\mathbf{R}^+$.

Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\mathcal{L}(f)(x) = f(0)$.

⑧ *Théorème de la valeur finale*

On suppose dans cette question que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ où ℓ est un réel. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.

① Démontrer que f appartient à F .

② Soit n un entier naturel. Démontrer que $a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \int_0^{+\infty} h_n(x) dt[x]$ où h_n est la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h_n(x) = e^{-x} f\left(\frac{x}{a_n}\right)$.

③ En déduire à l'aide du théorème de la convergence dominée, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \mathcal{L}(f)(a_n) = \ell$.

④ Lorsque $\ell \neq 0$, déterminer un équivalent de $\mathcal{L}(f)(x)$ en 0.

⑨ Dans cette question, on suppose que f est intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et on pose $R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt$ pour tout x dans $[0, +\infty[$.

① Démontrer que R est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et déterminer R' .

En déduire que, pour tout $x > 0$ réel, on a : $\mathcal{L}(f)(x) = R(0) - x\mathcal{L}(R)(x)$.

② On fixe $\varepsilon > 0$.

Justifier de l'existence de A réel positif tel que pour tout $t \geq A$, on ait $|R(t)| \leq \varepsilon$.

En déduire que, pour tout $x > 0$, on a : $|\mathcal{L}(f)(x) - R(0)| \leq x \int_0^A |R(t)| dt + \varepsilon$

③ Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ se prolonge par continuité en 0 (on précisera la valeur en 0 de ce prolongement).

PARTIE III : Application

⑩ **Calcul de l'intégrale de Dirichlet**

Ici f la fonction définie par : $f(0) = 1$ et $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour $t > 0$ réel.

① Démontrer que la fonction $G : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $G(x) = \int_0^x f(t) dt$ admet une limite réelle ℓ en $+\infty$.

② En considérant la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |f(t)| dt$, démontrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

③ Soit $x > 0$. Démontrer, en détaillant les calculs, que pour tout $X > 0$ on a :

$$\int_0^X (\sin t) e^{-xt} dt = -\frac{1}{1+x^2} (e^{-xX} (x \sin X + \cos X) - 1).$$

Démontrer que la fonction $t \mapsto (\sin t) e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}^+$.

Déterminer alors $\int_0^{+\infty} (\sin t) e^{-xt} dt$.



- ④ Déterminer, pour $x > 0$, une expression simple de $\mathcal{L}(f)(x)$ et en déduire ℓ .

Pour cela, on pourra utiliser le résultat suivant (La démarche de la preuve étant identique à celle de la question 9)) :

Lorsque f dans E vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbf{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(x) = \ell.$$

On notera que, par rapport à la question 9), on a remplacé l'hypothèse f intégrable sur $\mathbf{R}^+$ par l'hypothèse

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt = \ell \in \mathbf{R}.$$



À la prochaine

Devoir Surveillé

23 Ev. Euclidiens : Les "must" Classiques

Blague du jour

- Une puce et un labrador discutent :
-Le chien : Qu'est-ce que tu a regardé hier soir la télé ?
-La puce : La deuxième chienne, et toi ?
- Moi, canal puce ...
• Qu'est-ce qu'un dromadaire ?
Réponse : c'est un chameau qui bosse double !



André-Louis Cholesky (1875-1918)

Polytechnicien et officier français, ingénieur topographe et géodésien. Il est célèbre pour sa méthode de résolution des systèmes d'équations linéaires, toujours intensément utilisée de nos jours. Durant la Première Guerre mondiale, il participe à l'amélioration d'une cartographie nécessaire à la préparation des tirs. Il décède des suites de blessures reçues sur le champ de bataille.

Mathématicien du jour

Matrice de Gram.

Soient $\mathcal{C} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n , et $\text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$ leur matrice de Gram de type $p \times p$, dont les coefficients sont $(\text{Vect } x_i | \text{Vect } x_j)$. On pose $\Gamma(x_1, \dots, x_p) = \det \leq (\text{Gram}(x_1, \dots, x_p))$.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale directe de E , et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$.

- ① Comparer $\text{rg } A$ et $\text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.
- ② Préciser le type de la matrice A , ainsi que ses coefficients.
- ③ Montrer que ${}^tAA = \text{Gram}(x_1, \dots, x_p)$.
- ④ Montrer que $\text{Ker } {}^tAA = \text{Ker } A$, en déduire que

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \text{rg } \text{Gram}(x_1, \dots, x_p).$$

- ② ① Montrer que $\det G$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.
- ② Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$.
Montrer que $d(x, F)^2 = \frac{\Gamma(x_1, \dots, x_n, x)}{\Gamma(x_1, \dots, x_n)}$.
- ③ On suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une famille quelconque de E , vérifiant la relation suivante :
$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2$$
 - ① Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

② Démontrer que : $\forall x, y \in E, (x | y) = \sum_{i=1}^n (x | e_i)(y | e_i)$.

③ On note G la matrice de Gram de $e_1, \dots, e_n$.
Démontrer que $G^2 = G$ et conclure.

④ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose dans cette question que $\mathcal{B}$ une base quelconque de E .
Montrer que $\Gamma(u(e_1), \dots, u(e_n)) = (\det u)^2 \Gamma(e_1, \dots, e_n)$.

⑤ Soit $A \in \text{matn}, p\mathbf{R}$. Montrer que $\det({}^tAA) \geq 0$.

⑥ Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que $AB = AC = AD = 1$ et $(AB, AC) \equiv \frac{\pi}{4}, (AB, AD) \equiv \frac{\pi}{3}, (AC, AD) \equiv \frac{\pi}{2}$. Calculer son volume.

⑦ Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases quelconques de E . On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et G, G' les matrices de Gram de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Quelle relation y a-t-il entre P, G et G' ?

⑧ Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E , G sa matrice de Gram et $G^{-1} = (a_{ij})$.

Montrer que : $\forall \vec{x} \in E, \sum_{i,j} a_{ij}(\vec{e}_i | \vec{x})(\vec{e}_j | \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$.

⑨ Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base non orthonormée de E , G sa matrice de Gram $f \in \mathcal{L}(E)$ et M sa matrice dans $\mathcal{B}$.

① Montrer que f est auto-adjoint si et seulement si ${}^tMG = GM$.

② Montrer que f est orthogonal si et seulement si ${}^tMGM = G$.

❑ Décomposition polaire

Soit E un espace vectoriel euclidien. Un endomorphisme symétrique $u \in S(E)$ est dit *positif* si pour tout x de E , $(u(x), x) \geq 0$. Il est dit *défini positif* si pour tout x de E non nul, $(u(x), x) > 0$. On notera $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs, et $S^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques définis positifs.

1. Soit $u \in S(E)$. Montrer que u appartient $S^+(E)$ si et seulement si ses valeurs propres sont positives ou nulles. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $u \in S(E)$ pour que $u \in S^{++}(E)$.
2. Soit $u \in S^+(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes), et $E_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{Id}_E)$. On définit v_i par $v_i(x) = \sqrt{\lambda_i}x$ si $x \in E_i$, et $v_i(x) = 0$ si $x \in E_i^\perp$. On note enfin $v = v_1 + \dots + v_p$. Justifier que $v^2 = v \circ v = u$, et que v est positif.
3. Soit w un autre élément de $S^+(E)$ tel que $w^2 = u$.
 - a. Montrer que $wu = uw$. En déduire que $w(E_i) \subset E_i$.
 - b. Soit w_i l'endomorphisme induit par w sur E_i . Vérifier que w_i est symétrique positif, puis diagonaliser w_i .
 - c. En déduire que $w = v$.
4. Soit $f \in \text{Gl}(E)$.
 - a. Montrer que $f^* \circ f \in S^{++}(E)$.
 - b. Montrer qu'il existe un unique couple $(h, g) \in O(E) \times S^{++}(E)$ tel que $f = h \circ g$.

Endomorphismes normaux.

Soit E un espace vectoriel hermitien. Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit normal si u et u^* commutent.

- ① Soit u normal, montrer que si F est un sous-espace propre de u alors $F^\perp$ est stable par u .
En déduire que u est diagonalisable dans base orthonormale.
La réciproque est-elle vraie ?
- ② Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes :
 - (1) u est normal.
 - (2) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
 - (3) Tout sous-espace vectoriel stable par u est stable par u^* .
 - (4) Si un sous-espace vectoriel F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u .
 - (5) Il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $u^* = P(u)$.
- ③ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\text{id}$. Montrer que f est orthogonal.
- ④ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que $AA^* = A^*A \iff \text{Tr}(AA^*) = |\lambda_1|^2 + \dots + |\lambda_n|^2$.

Décomposition de Cholesky, QR.

- ① **Décomposition de Cholesky :** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

- ① Montrer qu'il existe une matrice T triangulaire supérieure telle que $A = {}^tTT$. Montrer que T est unique si on impose la condition : $\forall i, T_{ii} > 0$.

- ② Application : Montrer que $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$.

② Décomposition QR :

- ① Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale, P , et une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux positifs, T , uniques telles que $M = PT$.

- ② **Inégalité de Hadamard :** Soit E un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée, et $\mathcal{C} = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ des vecteurs quelconques.
Démontrer que $|\det(\mathcal{C})| \leq \prod_j \|\vec{u}_j\|$. Étudier les cas d'égalité.

$F \neq E$ mais $F^\perp = \{0_E\}$.

- ① Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $(\text{Vect} | \text{Vect})$, et F un sous-espace vectoriel de E .
 - ① Montrer que l'application $(x, y) \mapsto (\text{Vect } x | \text{Vect } y)$ est continue sur E^2 .
 - ② Soit $x \in E$ fixé, montrer que l'application $y \mapsto (\text{Vect } x | \text{Vect } y)$ est continue sur E .
 - ③ En déduire que $\overline{F}^\perp = F^\perp$.



- ④ On suppose que F est dense dans E , montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.

Si de plus $F \neq E$, montrer que F n'admet pas de supplémentaires orthogonaux.

- ② Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel, F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales et g la fonction exponentielle sur $[0,1]$.

① Montrer que $g \notin F$.

② Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions polynomiales convergeant vers g pour la norme euclidienne.

③ En déduire que F n'a pas de supplémentaire orthogonal.

- ③ Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel. Pour

$f \in E$, on pose $\varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t) dt$.

① Montrer que φ est continue.

② Montrer que $H = \text{Ker } \varphi$ est fermé.

③ Montrer que $H^\perp = \{0\}$.

✦ Rayleigh, Courant Fischer

- ① **Quotient de Rayleigh** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjoint, on se propose d'étudier les extremum du quotient de Rayleigh

$R_f(x) = \frac{(f(\vec{x}) | \vec{x})}{\|\vec{x}\|^2}$ où $x \neq 0_E$. Soit $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de f .

① Montrer que : $\forall \vec{x} \in E, \lambda_1 \|\vec{x}\|^2 \leq (f(\vec{x}) | \vec{x}) \leq \lambda_n \|\vec{x}\|^2$.

② Montrer que si l'une de ces deux inégalités est une égalité pour un vecteur $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x}$ est vecteur propre de f .

③ Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base orthonormée de E telle que pour tout $i : (f(\vec{e}_i) | \vec{e}_i) = \lambda_i$.

Montrer que : $\forall i, f(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$.

④ En déduire que le quotient de Rayleigh de f atteint ses extremums, préciser ces extremums et en quels vecteurs ils sont atteints.

- ② **Théorème de Courant-Fischer** Soit E un espace vectoriel euclidien.

① Soit $v \in S(E)$, (i.e : auto-adjoint) tel que $(\text{Vect } v(x) | \text{Vect } x) = 0$ pour tout x . Montrer que $v = 0$.

② Soient $u_1, \dots, u_p \in S(E)$. On suppose que $\text{rg}(u_1) + \dots + \text{rg}(u_p) = n$, et que $\forall x \in E, (\text{Vect } u_1(x) | \text{Vect } x) + \dots + (\text{Vect } u_p(x) | \text{Vect } x) = (\text{Vect } x | \text{Vect } x)$.

① Montrer que $u_1 + \dots + u_p = \text{Id}_E$.

② Montrer que $E = \text{Im}(u_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(u_p)$.

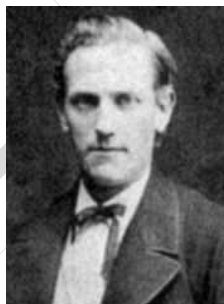
③ Montrer que pour tout i, u_i est la projection orthogonale sur $\text{Im}(u_i)$.

Devoir Libre

24 Réduction simultanée et décomposition de Cholesky

Blague du jour

- ☞ Une logicienne (spécialiste en logie) vient d'avoir un enfant. Une de ses amies lui téléphone, et lui demande : C'est une fille ou un garçon ? Oui, répond la logicienne.
- ☞ La vie est complexe, elle a une face réelle et une autre imaginaire.



Jorgen Pedersen Gram (1850-1916)

Mathématicien danois, il est le fils d'un agriculteur. Il travailla la majeure partie dans le domaine des assurances, c'est ainsi qu'il fonda son entreprise, et il fut le président du conseil danois de l'assurance. Il décéda après avoir été heurté par un vélo.

Mathématicien du jour

☒ Énoncé : Extrait CCP 2011, MP

Dans ce problème, on note pour n entier naturel non nul :

- ① S_n l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- ② S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
- ③ S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On admet que, si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n réels positifs, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq$

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

① Question préliminaire

On rappelle qu'une matrice S appartient à S_n^+ , si S appartient à S_n et si, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a ${}^tXSX \geq 0$. Démontrer qu'une matrice S de S_n est élément de S_n^+ si et seulement si toutes les valeurs propres de S sont positives.

Partie I

- ② Soit $S \in S_n^+$. Démontrer que $\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n} \text{trace } S$.
- ③ Application : soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - ① Démontrer que ${}^tMM \in S_n^+$.
 - ② Si $M = (m_{i,j})$, en déduire l'inégalité $(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n} \right)^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \right)^n$.

Partie II : théorème de réduction simultanée

④ On se donne deux matrices $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, dans cette base, A est la matrice d'un produit scalaire φ . On note l'espace euclidien $E = (\mathbb{R}^n, \varphi)$. Soit $\mathcal{B}'$ une base orthonormée de E et R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.

① Justifier que $I_n = {}^tRAR$.

② On note $C = {}^tRBR$, justifier qu'il existe une matrice orthogonale Q et une matrice diagonale D telles que ${}^tQCQ = D$.

③ Déterminer, en fonction des matrices R et Q , une matrice inversible P telle que :

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP \quad (\text{théorème de réduction simultanée}).$$

④ Dans cette question, on prend l'exemple de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrer qu'une matrice inversible P telle que la matrice tPBP soit diagonale n'est pas nécessairement une matrice orthogonale.

On pourra, par exemple, utiliser la forme quadratique canoniquement associée à la matrice B .

⑤ Démontrer l'inégalité « $\det(A + B) \geq \det A + \det B$ » dans les deux cas suivants :

① $A \in S_n^{++}$ et $B \in S_n^+$, en utilisant le théorème de réduction simultanée. On pourra remarquer ici que, avec tous

$$\text{les } \lambda_i \geq 0, \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \geq \left(1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i\right).$$

② $A \in S_n^+$ et $B \in S_n^+$, en démontrant d'abord que $A + B \in S_n^+$ et en considérant les cas où les matrices sont dans S_n^+ sans être dans S_n^{++} .

⑥ Soient A et B deux matrices de S_n^{++} et $t \in [0, 1]$. On note P une matrice inversible et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ une matrice diagonale dans le théorème de réduction simultanée.

① Exprimer $\det(tA + (1-t)B)$ en fonction de $\det P$, t et les λ_i .

② En utilisant la fonction $\ln$, démontrer que, pour tout i entier compris entre 1 et n , $t + (1-t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}$.

③ Démontrer que $\det(tA + (1-t)B) \geq (\det A)^t (\det B)^{1-t}$.

⑦ Si A est une matrice de S_n^{++} et B une matrice de S_n^+ , on démontre de même par le théorème de réduction simultanée (par la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$) le résultat suivant qui est admis :

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}.$$

① Démontrer que S_n^{++} est dense dans S_n^+ .

② Démontrer l'inégalité ci-dessus pour A et B deux matrices de S_n^+ .

Partie III : Théorème de Choleski

⑧ Si A est une matrice de S_n^{++} , il est possible, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, de trouver une matrice triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux positifs T , vérifiant $A = {}^tTT$ (décomposition de Choleski).

On ne demande pas de prouver ce résultat.

- ① On se propose de démontrer que cette matrice T est unique.

Si on pose $A = {}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$, démontrer que $T_1T_2^{-1} = I_n$ et conclure.

On pourra admettre que, si $\mathcal{T}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(\mathcal{T}, \cdot)$ est un groupe.

- ② Exemple : si $A = (a_{i,j})$, où pour tout couple (i, j) d'entiers compris entre 1 et n , $a_{i,j} = \text{Min}(i, j)$, donner la décomposition de Choleski de la matrice A .

On ne demande pas de vérifier que A est une matrice de S_n^{++} .

⑨ Un peu d'informatique

Pour une matrice A de S_3^{++} , écrire un algorithme en français permettant de trouver la matrice T de la décomposition de Choleski.

Entrer cet algorithme dans la calculatrice (on ne demande pas

le programme sur la copie) puis, pour chacun des cas suivants, donner la matrice T :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 49 & 14 & -14 \\ 14 & 20 & -8 \\ -14 & -8 & 21 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

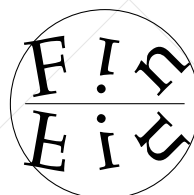
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 26 \\ 3 & 26 & 70 \end{pmatrix}.$$

⑩ Inégalité d'Hadamard

- ① Soit $S = (s_{i,j}) \in S_n^{++}$, démontrer que $\det S \leq \prod_{i=1}^n s_{i,i}$.

- ② Application : démontrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = (a_{i,j})$,

$$|\det M| \leq \left(\prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$



À la prochaine

Concours Communs Polytechniques - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'algèbre- Filière MP

Commutant d'une matrice, inégalités sur les déterminants de matrices symétriques

Corrigé par M.TARQI <http://alkendy.x10.mx>

Exercice

Commutant d'une matrice

1. Il suffit de montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, en effet, $C(A)$ est non vide puisqu'il contient A et si M et N sont dans $C(A)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$A(M + \lambda N) = AM + \lambda AN = MA + \lambda NA = (M + \lambda N)A,$$

et donc $M + \lambda N$ est dans $C(A)$.

2. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = -(x-3)(x-2)^2$, donc on peut trigonaliser la matrice A . Cherchons d'abord les sous-espaces propres associés à 3 et 2. Après calculs on trouve $E_3 = \text{Vect}(1, 1, 1) = \text{Vect}(v_1)$ et $E_2 = \text{Vect}(4, 3, 4) = \text{Vect}(v_2)$. On choisit alors un vecteur v_3 quelconque vérifiant les conditions suivantes : les vecteurs (v_1, v_2, v_3) sont linéairement indépendants et $Av_3 - 2v_3 = v_2$.

Posons $v_3 = (x, y, z)$, alors :

$$Av_3 - 2v_3 = v_2 \iff \begin{cases} -x + 4y - 2z = 4 \\ 4y - 3z = 3 \end{cases}$$

Choisissons, par exemple, $v_3 = (-2, 0, -1)$.

La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est bien libre et si $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ (la matrice de passage de la base

canonique à la base (v_1, v_2, v_3)) alors $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T$.

3. $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in C(T)$ si et seulement si $AM = MA$ ou encore

$$\begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 2a' + c'' & 2b' + b'' & 3c' + c'' \\ 2a'' & 2b'' & 2c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 2b & b + 2c \\ 3a' & 2b' & b' + 2c' \\ 3a'' & 2b'' & b'' + 2c'' \end{pmatrix}$$

donc

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c'' & c' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c'' \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $M \in \text{Vect}(J, K, L)$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Réciproquement, les matrices J, K, L sont linéairement indépendantes et sont dans $C(T)$, donc $C(T) = \text{Vect}(J, K, L)$ et par suite $\dim C(A) = 3$.

4. (a) Il est clair que l'application est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $P^{-1}MP = 0$ si et seulement si $M = 0$, donc l'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. L'image de $C(A)$ n'est autre que $C(T)$ et par suite $\dim C(A) = \dim C(T) = 3$.
- (b) Non, si oui, la matrice A serait diagonalisable.
- (c) Il est clair que $\text{Vect}(I, A, A^2) \subset C(A)$ et toute relation de la forme $aI + bA + cA^2 = 0$ entraîne $a = b = c = 0$ (d'après 5.(b)), donc la famille $\{I, A, A^2\}$ est libre et comme $\dim C(A) = 3$, alors $C(A) = \text{Vect}(I, A, A^2)$.
- (d) Il est clair que tout polynôme en A est dans $C(A)$. Inversement soit $M = P(A)$ un polynôme en A et soit R le reste de la division euclidienne de P par χ_A , d'après le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$ et donc $M = R(A)$, avec $\deg R \leq 2$, ainsi

$$C(A) = \{P(A)/P \in \mathbb{R}[X]\}.$$

Le résultat n'est vrai en général, il suffit considérer une matrice nilpotente d'indice 2.

Problème

INÉGALITÉS SUR LES DÉTERMINANTS DE MATRICES SYMÉTRIQUES

1. *Question préliminaire* S étant symétrique réelle, donc elle est orthogonalement diagonalisable. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ de A , puisque $X \neq 0$, ${}^tXX > 0$, d'où :

$${}^tXAX = \lambda {}^tXX$$

ou encore

$$\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geq 0.$$

Inversement si les valeurs propres de A sont positives, alors, dans une base de diagonalisation de A :

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq 0,$$

où les x_i désignent les composantes de X dans cette base.

PARTI I

2. Soit $S \in S_n^+$ et soit $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres de A , d'après 1. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{1}{n}},$$

inégalité qui s'écrit encore sous la forme

$$\sqrt[n]{\det S} \leq \frac{1}{n} \text{trace} S.$$

3. (a) Il est clair que ${}^t(tMM) = {}^tMM$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$${}^tX{}^tMMX = {}^t(MX)(MX) \geq 0,$$

donc ${}^tMM \in S_n^+$.

- (b) Posons ${}^tMM = (c_{ij})$. On a $c_{ii} = \sum_{k=1}^n m_{ki}m_{ki} = \sum_{k=1}^n m_{ki}^2$, donc

$$\text{trace}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ki}^2.$$

L'inégalité de la question 2. appliquée à tMM entraîne $\sqrt[n]{\det({}^tMM)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ki}^2$ et comme $\det({}^tM) = \det M$, alors

$$(\det M)^2 \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ki}^2\right)^n.$$

PARTIE II : THÉORÈME DE RÉDUCTION SIMULTANÉE

4. (a) La matrice de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est I_n puisque $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E et dans la base canonique est $\mathcal{B}$, donc d'après la formule de changements de bases, on a $I_n = {}^tRAR$.
- (b) C étant symétrique réelle, donc elle est orthogonalement diagonalisable, c'est-à-dire il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $C = QDQ^{-1} = QD^tQ$ ou encore $D = {}^tQCQ$.
- (c) La relation $C = {}^tRBR$ est équivalent encore à

$$B = ({}^tR)^{-1}CR^{-1} = {}^t(R^{-1})CR^{-1} = {}^t(RQ)^{-1}D(RQ)^{-1}$$

et la relation $I_n = {}^tRAR$ est équivalent à

$$A = {}^t(R^{-1})R^{-1} = {}^t(RQ)^{-1}(RQ)^{-1},$$

il suffit donc de prendre $P = (RQ)^{-1}$.

- (d) La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie ${}^tPBP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cependant la matrice P n'est pas orthogonale.
5. (a) Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \subset \mathbb{R}^+$. On a $A + B = {}^tP(I_n + D)P$ et donc

$$\begin{aligned} \det(A + B) &= (\det P)^2 \det(I_n + D) \\ &= (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i) \\ &\geq (\det P)^2 \left(1 + \prod_{i=1}^n \lambda_i\right) \\ &= (\det P)^2 + \det({}^tP) \prod_{i=1}^n \lambda_i \det P = \det A + \det B \end{aligned}$$

- (b) Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$ et donc $A + B \in S_n^+$, ainsi $\det(A + B) \geq 0$.
Si $A \in S_n^{++}$ ou $B \in S_n^{++}$, alors l'inégalité est toujours vérifiée. Maintenant soit A et B dans $S_n^+ \setminus S_n^{++}$, alors $\det A = \det B = 0$ et dans ce cas aussi on a $\det(A + B) \geq \det A + \det B$.
6. (a) On a $tA + (1 - t)B = {}^tP(tI_n + (1 - t)D)P$ et donc

$$\det(tA + (1 - t)B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1 - t)\lambda_i).$$

- (b) La fonction $\ln$ étant concave, donc pour tout i , $\ln(t + (1 - t)\lambda_i) \geq t \ln 1 + (1 - t) \ln \lambda_i$ et donc

$$\ln(\lambda_i^{1-t}) \leq \ln(t + (1 - t)\lambda_i)$$

et par conséquent

$$t + (1 - t)\lambda_i \geq \lambda_i^{1-t}.$$

(c) D'après l'inégalité précédente, on a :

$$\begin{aligned}
 \det(tA + (1-t)B) &= (\det P)^2 \prod_{i=1}^n (t + (1-t)\lambda_i) \\
 &\geq (\det P)^2 \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1-t} \\
 &\geq (\det P)^{2t} (\det P)^{2(1-t)} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1-t} \\
 &= (\det A)^t (\det B)^{1-t}
 \end{aligned}$$

7. (a) Pour $S \in S_n^+$, on définit la suite $(S_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ par $S_p = S + \frac{1}{p}I_n$ qui tend vers S quand p tend vers l'infini, avec $S_p \in S_n^{++}$ car ${}^t X S_p X = {}^t X S X + \frac{1}{p} X X > 0$ pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.
- (b) Soient $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(B_p)_{p \in \mathbb{N}}$ deux suites de S_n^{++} telles que $\lim_{p \rightarrow \infty} A_p = A$ et $\lim_{p \rightarrow \infty} B_p = B$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$(\det(A_p + B_p))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A_p)^{\frac{1}{n}} + (\det B_p)^{\frac{1}{n}}$$

et comme l'application $\det$ est continue, alors on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité précédente :

$$(\det(A + B))^{\frac{1}{n}} \geq (\det A)^{\frac{1}{n}} + (\det B)^{\frac{1}{n}}$$

PARTIE III : THÉORÈME DE CHOLESKI

8. (a) L'égalité ${}^t T_1 T_1 = {}^t T_2 T_2$ entraîne $T_1 T_2^{-1} = (T_2 T_1^{-1})$ et comme $\mathcal{T}$ est un groupe, alors $T_1 T_2^{-1}$ est triangulaire supérieure et inférieure à la fois, donc nécessairement $T_1 T_2^{-1} = I_n$, donc $T_2 = T_1$ est par conséquent T est unique.

(b) Soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$, on a bien ${}^t T T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix} = A$

Remarque : Notons q la forme quadratique canoniquement associée à A . On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 2 & & n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix};$$

A est somme des matrices A_r définie par $A_r(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i, j \geq r \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, pour tout $1 \leq i, j \leq n$ et $1 \leq r \leq n$. On en déduit la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p=i}^n x_p \right)^2.$$

Les formes linéaires du membre de droite étant linéairement indépendantes, on peut affirmer que q est définie positive. Autrement dit, la matrice $A \in S_n^{++}$

9. *Un peu d'informatique* La matrice T est obtenue par la méthode qui consiste à résoudre le système $n^2 \times n^2$:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n t_{ik} t_{jk} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} t_{ik} t_{jk}, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

en calculant d'abord la première colonne de T (correspondant à $i = 1$ dans le système) :

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \\ t_{21} = \frac{a_{12}}{t_{11}}, \\ \vdots \\ t_{n1} = \frac{a_{1n}}{t_{11}} \end{cases}$$

puis la seconde colonne (en fixant $i = 2$), et ainsi de suite jusqu'à déterminer t_{nn} .

10. Inégalité d'Hadamard

- (a) Puisque $S \in S_n^{++}$, alors ${}^t E_i S E_i = a_{ii} > 0$ (où E_i désigne la matrice du i ème vecteur de la base canonique), donc on peut définir la matrice $B = D S D$ avec

$$D = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}}\right),$$

il est clair que $B \in S_n^{++}$ et donc

$$\sqrt[n]{\det S (\det D)^2} = \sqrt[n]{\det B} \leq \frac{1}{n} \text{trace}(B),$$

$$\text{d'où } \det S (\det D)^2 \leq 1 \text{ car } b_{ii} = 1 \text{ et donc } \det S \leq \frac{1}{(\det B)^2} = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (b) On a $\det({}^t M M) \leq \prod_{i=1}^n c_{i,i}$ où $c_{i,i} = \sum_{k=1}^n ({}^t A)_{i,k} a_{k,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$, mais :

$$\det({}^t M M) = \det({}^t M) \det(M) = \det(M)^2,$$

$$\text{on a donc } |\det(M)| \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ (inégalité d'Hadamard).}$$

• • • • •

Devoir Libre

16 Phénomène de Gibbs

Blague du jour

Dans une voiture, quatre ingénieurs. Tout coup la voiture s'arrête..

- Le Mécanicien : Je le savais, c'est un problème de transmission.
- Le chimiste : c'est la faute des acides de la batterie !
- L'électronicien : c'est le circuit électronique qui ne marche plus !
- L'Informaticien en dernier : ... et si on essayait de fermer toutes les fenêtres ouvertes, de quitter, et redémarrer à nouveau ?



David Hilbert (1862-1943)

Mathématicien allemand. Il est considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX^{ème} siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a développé la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie, les fondements de l'analyse fonctionnelle, la mécanique quantique et la relativité générale. Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.

Mathématicien du jour

❑ Énoncé : CCP 2006, MP

EXERCICE 1

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

1. Démontrer que la fonction f admet des dérivées partielles premières en $(0, 0)$ que l'on déterminera.
2. Démontrer que la fonction f est différentiable en $(0, 0)$.

EXERCICE 2

1. Rappeler la définition (par les suites) d'une partie compacte d'un espace vectoriel normé.
2. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, et f une application continue de E dans F . Si A est une partie compacte de E , démontrer que $f(A)$ est une partie compacte de F . L'image réciproque par f d'une partie compacte de F est-elle nécessairement une partie compacte de E ?

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0; \pi]$.

$$\text{On pose } I = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

- (b) Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus et déterminer, avec soin, une suite $(u_k)_{k \geq 0}$ vérifiant $I = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k$.

2. (a) Démontrer que la suite $\left(\frac{\pi^n}{n!}\right)_{n \geq 0}$ converge et que la suite $\left(\frac{\pi^n}{n \cdot n!}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante.

- (b) Si $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$, majorer $|R_n|$, en utilisant la question (a).

En déduire, en précisant la valeur de n utilisée, une valeur approchée du réel $\frac{2}{\pi} I$ à 10^{-2} près.

Première partie : Phénomène de Gibbs

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ impaire et de période 2π vérifiant :

$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]0; \pi[\text{ et } f(0) = f(\pi) = 0.$$

3. On pose pour tout entier naturel n non nul et t réel,

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}.$$

Démontrer, à l'aide d'une série de Fourier, que la suite de fonctions $(S_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

4. Sur un même graphique, uniquement à l'aide d'une calculatrice, tracer sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{10} . Puis sur un autre graphique, tracer sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la courbe de la fonction S_{20} .

Que constate-t-on sur les courbes des fonctions S_n lorsque t se rapproche de 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures ?

Cette particularité est appelée phénomène de Gibbs.

5. On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin[(2k+1)t].$$

(a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t}.$$

Dans la suite de cette question 5., on considère deux nombres réels a et b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset]0; \frac{\pi}{2}[$.

(b) Justifier qu'il existe une constante M telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a, b]$, $T_n(t) \leq M$.

(c) Démontrer que l'on peut trouver une suite de réels (w_n) convergeant vers 0 et telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a, b]$, $|f(t) - S_n(t)| \leq w_n$.

En commençant par observer que $\sin[(2k+1)t] = T_{k+1}(t) - T_k(t)$, on pourra chercher à majorer, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls et tout $t \in [a, b]$, $|S_{n+p}(t) - S_n(t)|$. Que peut-on en déduire concernant la série de Fourier de la fonction f ?

6. (a) Calculer $S'_n(t)$ pour tout $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ et déterminer la plus petite valeur α_n qui annule $S'_n(t)$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

(b) Démontrer que, pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et n entier naturel non nul,

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t} dt \quad \text{puis que} \quad S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}} du.$$

(c) Démontrer que la suite $(S_n(\alpha_n))_{n \geq 1}$ converge et préciser sa limite.

On pourra utiliser sans démonstration : pour $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$.

7. Démontrer que la suite $\left(\sup_{x \in [0; \frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \right)_n$ ne converge pas vers 0.

Deuxième partie : Démonstration du théorème de convergence normale

Pour une fonction f continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π , on note pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

8. Rappeler le théorème de Parseval (avec les coefficients $c_n(f)$) pour une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π .

Dans le cas où la fonction f est de plus continue sur $\mathbb{R}$, justifier que si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = 0$ alors f est la fonction nulle.

Ce résultat reste-t-il valable si la fonction f est seulement continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π ?

9. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et de période 2π dont la série de Fourier converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction g :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty} (c_{-p}(f) e^{-ipt} + c_p(f) e^{ipt}).$$

(a) Justifier que l'application g est continue sur $\mathbb{R}$ puis pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, exprimer, avec soin, $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

(b) Démontrer que $f = g$.

10. Dans cette question, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période 2π et de classe C^1 par morceaux.

On pose pour n entier naturel non nul et t réel,

$$u_n(f)(t) = c_n(f)e^{int} + c_{-n}(f)e^{-int}.$$

(a) Déterminer une relation entre $c_n(f')$ et $c_n(f)$.

(b) Démontrer que pour tout t réel,

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}(|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2).$$

(c) Démontrer, avec soin, que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et préciser vers quelle fonction.

(d) Énoncer le théorème que l'on vient de démontrer.

Le phénomène de Gibbs peut-il se produire pour cette fonction f ?

❑ Corrigé : Pr. Boujaïda, CPGE Rabat, Maroc

Problème

Partie préliminaire

- ① ① la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0, \pi]$ prolongeable par continuité en 0. Elle est donc intégrable sur $]0, \pi]$.

- ② Pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$. et donc si $t \neq 0$,

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}.$$

Soit la fonction f somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$. f est naturellement DSE sur $\mathbf{R}$, chacune de ses primitives l'est aussi, si on pose pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

alors

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}$$

Comme $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ pour tout $t \in]0, \pi]$ alors

$$F(\pi) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} \pi^{2n+1}$$

Soit $I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ avec $u_n = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}$

- ② ① Utiliser de D'Alembert, ou alors mentionner le fait que la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini (c'est du cours).

Si on pose $a_n = \frac{\pi^n}{n.n!}$ alors $a_n > 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\pi}{(n+1)!(n+1)} \leq \frac{\pi}{2.2} \leq 1$ si $n \geq 1$.

donc $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Elle converge vers 0 puisque $a_n \leq \frac{\pi^n}{n!}$.

- ② On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = a_{2n+1}$ donc $(u_n)_n$ est décroissante et converge vers 0. D'après le critère spécial de convergence des séries alternées, la série $\sum (-1)^n u_n$ est

convergente et si on pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ alors

$$|R_n| \leq u_{n+1} \leq \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!(2n+3)}$$

Nous allons maintenant approcher le réel $\frac{2}{\pi} I$ par les termes

$\frac{2}{\pi} S_n$ où S_n est la somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$.

$$\left| \frac{2}{\pi} S_n - \frac{2}{\pi} I \right| = \frac{2}{\pi} |R_n| \leq 2 \frac{\pi^{2n+2}}{(2n+3)!(2n+3)} \leq 2 \frac{10^{n+1}}{(2n+3)!(2n+3)}$$

Pour que $\frac{2}{\pi} S_n$ approche $\frac{2}{\pi} I$ à 10^{-2} près, il suffit que

$$2 \frac{10^{n+1}}{(2n+3)! (2n+3)} \leq 10^{-2}$$

$$\text{soit } (2n+3)! (2n+3) \geq 2 \cdot 10^{n+3}.$$

$$n = 3 \text{ suffit et dans ce cas } \frac{2}{\pi} S_n \simeq 1,17$$

Phénomène de Gibbs

- ③ Vu la parité de la fonction f , pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n(f) = 0$, et par un calcul simple $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{4}{\pi(2n+1)}$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$. Ses points de discontinuité sont ceux de la forme $k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.

D'après le théorème de Dirichlet, pour tout point $x \in \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$, point où f est continue

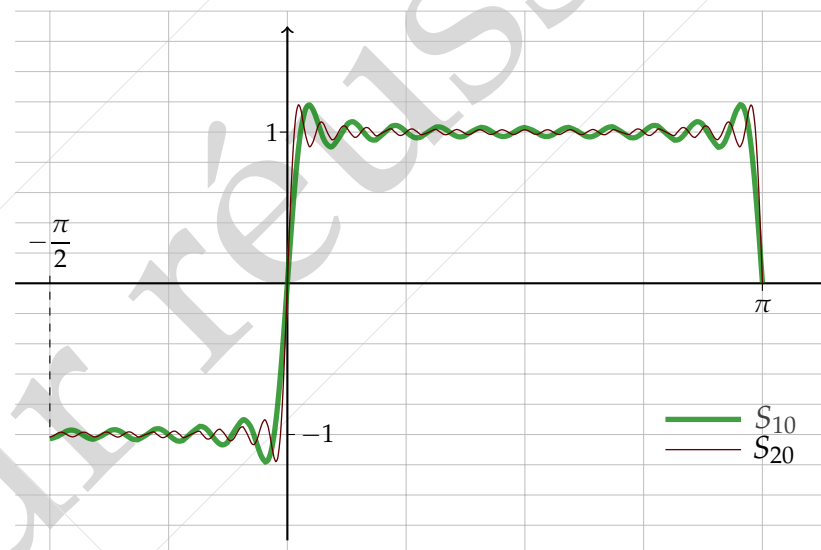
$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} \sin[(2k+1)t] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}$$

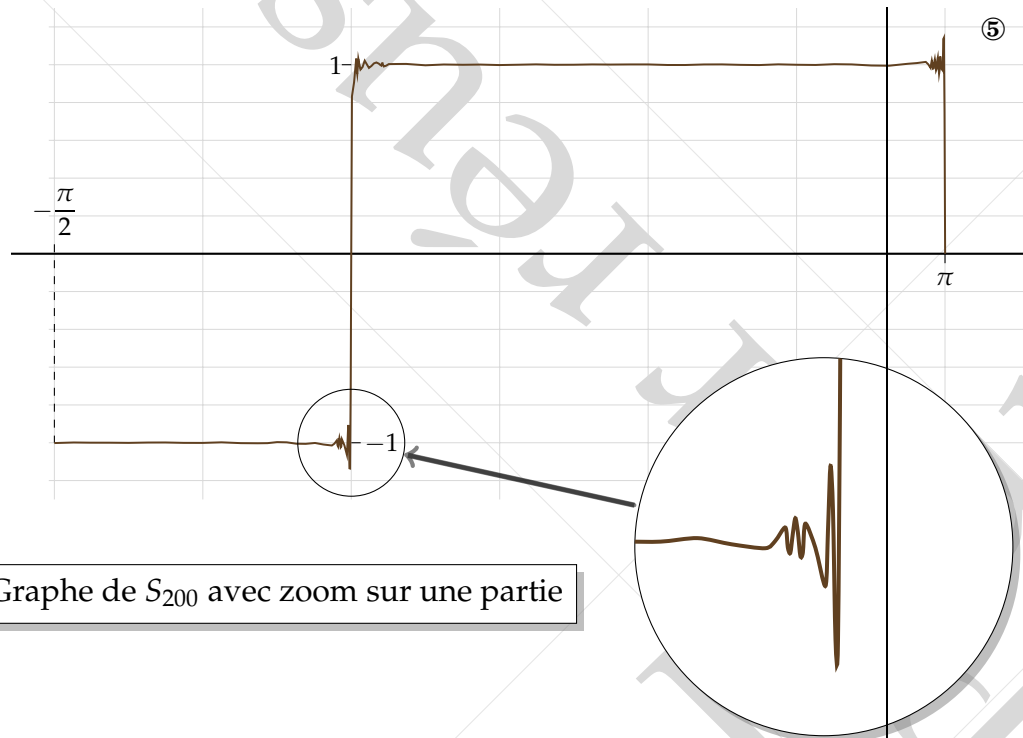
égalité encore valable lorsque $t \in \pi\mathbf{Z}$ puisque dans ce cas $\sin[(2k+1)t] = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$ et $f(t) = 0$.

La suite de fonction $(S_n)_n$ converge donc simplement vers f sur $\mathbf{R}$.

La convergence n'est pas uniforme puisque les fonctions S_n sont toutes continues sur $\mathbf{R}$ est que f ne l'est pas.

- ④ Les graphes des fonctions S_{10} , S_{20} et séparément celui de S_{200} pour une meilleure illustration du phénomène, sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi]$.





Graphes de S_{200} avec zoom sur une partie

Au voisinage de 0, que ce soit à droite ou à gauche, la convergence de S_n vers f n'est pas uniforme. On perçoit de fortes perturbations de la fonction S_n au voisinage de 0, au fur et à mesure que n grandit. C'est le phénomène de Gibbs.

⑤ ① Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin[(2k+1)t] = \Im \left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(2k+1)t} \right) = \Im \left(e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i2kt} \right) \\ &= \Im \left(e^{it} \frac{1 - e^{2int}}{1 - e^{2it}} \right) = \Im \left(\frac{e^{it} - e^{i(2n+1)t}}{1 - e^{2it}} \right) \\ &= \Im \left(\frac{-2i \sin(nt) e^{i(n+1)t}}{-2i \sin(t) e^{it}} \right) = \Im \left(\frac{\sin^2(nt)}{\sin t} \right) \\ &= \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} \end{aligned}$$

② Soit un segment $[a, b] \subset]0, \pi/2[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a, b]$

$$T_n(t) \leq \frac{1}{\sin a}$$

On pose alors $M = \frac{1}{\sin a}$.

③ On exécute la transformation dite d'Abel, pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in [a, b]$

$$\begin{aligned} S_{n+p}(t) - S_n(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_{k+1}(t)}{2k+1} \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\sum_{k=n+2}^{n+p+1} \frac{T_k(t)}{2k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{T_k(t)}{2k+1} \right) \\ &= \frac{4}{\pi} \left(\frac{T_{n+p+1}}{2(n+p+1)-1} - \frac{T_{n+1}}{2(n+1)-1} + \sum_{k=n}^{n+p} \frac{T_k(t)}{2k-1} \right) \end{aligned}$$

De quoi on déduit

$$\begin{aligned} |S_{n+p}(t) - S_n(t)| &\leq \frac{4M}{\pi} \left(\frac{1}{2n+2p+1} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \right) \\ &\leq \frac{4M}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} + \left(\frac{1}{2(n+1)-1} - \frac{1}{2n+2p+1} \right) \right) \\ &\leq \frac{4M}{\pi} \cdot \frac{3}{2n+1} = \frac{12M}{\pi(2n+1)} \end{aligned}$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et soit un entier N tel que $\frac{12M}{\pi(2N+1)} \leq \varepsilon$.

Pour tous $n \geq N$, $p \in \mathbf{N}$ et pour tout $t \in [a, b]$ on a alors
 $|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leq \varepsilon$

Ceci démontre que la suite de fonctions (S_n) converge uniformément sur le segment $[a, b]$. Convergence qui se fait vers f puisque on a déjà vu qu'il y'a convergence simple vers f sur $\mathbf{R}$.

⑥ ① Soit $t \in]0, \pi/2]$.

$$S'_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \cos[(2k+1)t] = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} e^{i(2k+1)t} = \frac{4}{\pi} \Re \left(\frac{\sin nt}{\sin t} e^{int} \right) = \frac{2 \sin 2nt}{\sin t}$$

$$S'_n(t) = 0 \iff \sin 2nt = 0 \iff \exists k \in \mathbf{Z}; t = \frac{k}{2n} \pi$$

La plus petite valeur qui annule S'_n sur $]0, \pi/2]$ est donc le réel $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$.

② On a vu que pour tout $t \in]0, \pi/2]$, $S'_n(t) = \frac{\sin 2nt}{\sin t}$. La

fonction $s_n : t \mapsto \frac{\sin 2nt}{\sin t}$ se prolonge par continuité en 0 en posant $s_n(0) = 2n$.

S_n , qui est de classe $\mathcal{C}^1$, est alors une primitive de s_n sur

le segment $[0, \pi/2]$ avec $S_n(0) = 0$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral, pour tout $x \in [0, \pi/2]$

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x s_n(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$$

l'intégrale du dernier terme de cette égalité se faisant sur l'intervalle $]0, x]$. De là

$$S_n(\alpha_n) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt \stackrel{u=2nt}{=} \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} du$$

③ En observant que $\frac{\sin u}{\sin(u/2n)} \sim \frac{\sin u}{u/2n}$ au voisinage de 0, on peut faire l'hypothèse que
 $\frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} du \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du$ (*)
 chose qu'on va s'atteler à démontrer.

On va utiliser les inégalités connues :

$\forall t \in [0, \pi/2], \sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ (concavité de $\sin$ sur $[0, \pi/2]$)

$\forall t \in \mathbf{R}, |\sin t - t| \leq \frac{1}{6} |t|^3$ (inégalité de Taylor-Lagrange).

On a alors pour tout $t \in]0, \pi/2]$

$$\left| \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right| = \frac{|t - \sin t|}{t \sin t} \leq \frac{\frac{1}{6} t^3}{t \cdot \frac{2}{\pi} t} \leq \frac{\pi}{12} t$$

Si maintenant $n \in \mathbf{N}^*$ et $u \in]0, \pi]$ alors $\frac{u}{2n} \in [0, \pi/2]$ et donc

$$\left| \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} - \frac{\sin u}{u/2n} \right| \leq \frac{\pi}{12} \cdot \frac{u}{2n} |\sin u| \leq \frac{\pi^2}{24n}$$

On intègre sur $]0, \pi]$

$$\left| \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} du - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \right| \leq \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin u}{\sin(u/2n)} - \frac{2}{u} \right| du$$

Ce qui démontre l'assertion (*), assertion qui signifie que

$$S_n(\alpha_n) \rightarrow \frac{2}{\pi} I$$

⑦ $\alpha_n \in]0, \pi/2[$ donc $f(\alpha_n) = 1$ et donc

$$\sup_{x \in]0, \pi/2[} |S_n(x) - f(x)| \geq |S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| \geq |S_n(\alpha_n) - 1|$$

Puisque $(S_n(\alpha_n))$ converge vers $\frac{2}{\pi} I$ est que $\frac{2}{\pi} I \simeq 1,17$ d'après la question (2.b.) alors la quantité

$$\sup_{x \in]0, \pi/2[} |S_n(x) - f(x)|$$

ne peut converger vers 0, car sinon $(S_n(\alpha_n))$ convergerait vers 1.

N.B : La question revient à démontrer que la suite de fonctions $(S_n)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur l'intervalle $]0, \pi/2[$. Tout le brique à braque mis en œuvre pour y arriver, en dehors de son aspect sportif, est inutile. En effet il suffisait de mettre en défaut le théorème d'interversion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} S_n(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$$

La première double limite valant 0, la seconde 1.

La question aurait eu plus d'intérêt si elle s'était orientée vers une minoration effective de $\sup_{x \in]0, \pi/2[} |S_n(x) - f(x)|$.

Démonstration du théorème de la convergence normale

⑧ La formule de Parseval pour une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ continue par morceaux 2π -périodique

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2$$

Si f est continue et tous ses coefficients de Fourier sont nuls alors

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0 \quad (**)$$

La fonction $|f|^2$ étant continue positive sur le segment $[0, 2\pi]$, cela implique qu'elle est nulle sur ce segment et par périodicité, sur $\mathbf{R}$ tout entier. f est donc la fonction nulle.

Si maintenant f était seulement continue par morceaux, l'égalité (**) est toujours valable, elle implique que f s'annule en tout point où elle est continue, et donc pas forcément partout nulle, sauf si ... elle était continue.

(Précisons, si f est 2π -périodique, continue par morceaux et vérifie l'égalité (**) alors $f = 0 \iff f$ est continue)

⑨ f est continue 2π -périodique et sa série de Fourier converge uniformément sur $\mathbf{R}$. On pose pour tout $t \in \mathbf{R}$.

$$g(t) = c_0(f) + \sum_{p=1}^{+\infty} c_p(f)e^{ipt} + c_{-p}(f)e^{-ipt}$$

① les fonctions $t \mapsto c_p(f)e^{ipt} + c_{-p}(f)e^{-ipt}$ sont continues sur $\mathbf{R}$ et la convergence est uniforme sur $\mathbf{R}$, donc g est continue sur $\mathbf{R}$.

Maintenant, grâce à la convergence uniforme sur le segment $[0, 2\pi]$ on peut intégrer terme à terme l'expression

$g(t)e^{-int}$, ce qui donne pour tout $n \in \mathbf{Z}$

$$c_n(f) = \frac{c_0(g)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \left(c_p(f) \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)t} dt + c_{-p}(f) \int_0^{2\pi} e^{-i(p+n)t} dt \right)$$

Comme pour tout $(k, h) \in \mathbf{Z}^2$, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-h)t} dt = \delta_{kh}$

une seule des intégrales figurant dans cette expression est non nulle, elle est obtenue pour $p = n$ si $n \geq 0$, pour $p = -n$ si $n < 0$. Ce qui nous mène à l'égalité

$$c_n(g) = c_n(f)$$

- ② $f - g$ est continue 2π -périodique sur $\mathbf{R}$ et par linéarité des coefficients de Fourier

$$\forall n \in \mathbf{Z}, c_n(f - g) = c_n(f) - c_n(g) = 0$$

D'après la question (8.) on a donc $g = f$.

- ⑩ ① f étant **continue** et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, une intégration par parties donne

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left([f(t)e^{-int}]_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int} dt \right) = inc_n(f)$$

- ② Pour deux nombres complexes a et b , $|ab| \leq \frac{1}{2} (|a|^2 + |b|^2)$ (découle tout bêtement de $(|a| - |b|)^2 \geq 0$).

Si $n \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}$ alors $u_n(f)(t) = \frac{1}{in} (c_n(f')e^{-int} - c_{-n}(f)e^{int})$ et donc

$$|u_n(f)(t)| \leq \frac{|c_n(f')|}{n} + \frac{|c_{-n}(f')|}{n} \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} (|c_n(f')|^2 + |c_{-n}(f')|^2)$$

- ③ La fonction f' étant continue par morceaux 2π -périodique, d'après la formule de Parseval les séries à

termes réels positifs $\sum |c_n(f')|^2$ et $\sum |c_{-n}(f')|^2$ sont convergentes. La majoration obtenue dans la question précédente achève de démontrer que la série de fonctions $\sum u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbf{R}$. Elle converge vers la fonction g définie dans la question (9.), toujours d'après cette question, on a forcément $g = f$.

Ainsi $\sum u_n(f)$ converge normalement vers f sur $\mathbf{R}$.

- ④ Le phénomène de Gibbs ne subsiste plus pour une fonction 2π périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Devoir Libre

26 Equations différentielles : Exemple d'étude.

Blague du jour

☛ Que signifie le sigle B.U.S.H ?
-Réponse : Bombarder Uniquement Saddam Hussein
☛ Les Irakiens sont dans la rue et crient : A bas Clinton, à bas Clinton !
Un autre Irakien intervient et dit aux manifestants : Ce n'est plus Clinton le président, c'est Bush.
Les manifestants répondent : Mais ça n'a aucun sens ! On ne va tout de même pas crier "A babouche ! A babouche !"



La famille des Riccati

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati.

Mathématicien du jour

Énoncé : CNC 2004, MP

Définitions et notations

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur $\mathbf{R}$* .

Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, on lui associe l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0. \quad (\mathcal{E}_f)$$

Le but du problème est d'étudier des conditions d'existence de solutions bornées de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$, et lorsque ces con-

ditions sont remplies, certaines propriétés de ces solutions sont ensuite étudiées.

I. EXEMPLES ET RÉSULTATS GÉNÉRAUX

① Un premier exemple

Soient α un réel et f_α la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$.

- ① Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_1})$. Cette équation possède-t-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$?
- ② Ici on suppose que $\alpha \neq 1$.
 - ① Résoudre l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$.

② À quel condition nécessaire et suffisante sur α cette équation admet-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$? Lesquelles?

③ L'équation différentielle $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$ admet-elle des solutions bornées sur $\mathbf{R}$?

② Résultats généraux

① Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$?

② Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ sont de la forme

$$y_\lambda : x \mapsto e^x \left(\lambda - \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

③ On suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$. Montrer alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est convergente et vaut λ .

④ Combien de solutions bornées au voisinage de $+\infty$ l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ peut-elle avoir au maximum?

⑤ On suppose maintenant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est convergente et on pose

$$\lambda_f = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \quad \text{et} \quad Y_f = y_{\lambda_f}.$$

① Vérifier que, pour tout réel x , $Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$.

② La solution Y_f est-elle nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$?

⑥ On suppose ici que f est bornée.

① Montrer que Y_f est bien définie et que c'est l'unique solution bornée, sur $\mathbf{R}$, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

② Si en outre f tend vers 0 en $+\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $+\infty$.

③ Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $-\infty$.

③ Un autre exemple

On pose

$$u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{(2p+2)^n x^n}{(2p+1)! n!}, \quad x \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad (n, p) \in \mathbf{N}^2.$$

① Montrer que, pour tout réel x , la suite double $(u_{n,p}(x))_{(n,p) \in \mathbf{N}^2}$ est sommable.

② En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$, où

$$a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dans la suite on pose $u(x) = e^x \sin(e^x)$, $x \in \mathbf{R}$.

③ Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} u(t) dt$ est convergente.

- ④ Montrer que, pour tout réel x , $\int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt = \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$
- ⑤ En faisant une intégration par partie dans l'intégrale du second membre de l'égalité précédente, montrer que la solution Y_u de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_u)$ est bornée sur $\mathbf{R}$.

II. CAS D'UNE FONCTION INTÉGRABLE

A- Cas où f est intégrable sur $\mathbf{R}$

On suppose que f est intégrable sur $\mathbf{R}$ et on pose, pour tout réel x ,

$$G(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- ① Montrer que la fonction G est continue, bornée et tend vers 0 en $-\infty$.
- ② Montrer que, pour tout réel x , la fonction $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.
- ③ Montrer alors que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}, |Y_f(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt,$$

puis en déduire que Y_f est bornée sur $\mathbf{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$.

- ④ Montrer que $Y_f = -G + Y_G$ et conclure que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.
- ⑤ Justifier que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.

- ⑥ Montrer alors que $Y_{|f|}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.
- ⑦ En déduire que Y_f est intégrable sur $\mathbf{R}$ et montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

- ⑧ On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et intégrables sur $\mathbf{R}$; on le muni de la norme N_1 définie, pour tout élément g de E , par

$$N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt.$$

Montrer que l'application $\Phi : g \mapsto Y_g$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

B- Cas où l'intégrale de f sur $\mathbf{R}$ converge

On suppose ici que f possède une intégrale convergente sur $\mathbf{R}$ et on pose, pour tout réel x ,

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

- ① Montrer que la fonction F est continue, bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
- ② Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est convergente et que

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = F(x) - Y_F(x).$$

(on pourra faire une intégration par partie)

- ③ En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
- ④ Montrer que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.
- ⑤ Montrer alors que Y_f possède une intégrale convergente sur $\mathbf{R}$, égale à celle de f .

III. CAS D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

On suppose ici que f est 2π -périodique.

- ① Montrer que l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède une unique solution bornée qui est la fonction Y_f .
- ② Montrer que Y_f est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$.
- ③ Calculer les coefficients de FOURIER complexes de Y_f en fonction de ceux de f .
- ④ On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = Y_{f_n}$, $n \geq 0$.
 - ① Pour tout $n \in \mathbf{N}$, exprimer les coefficient de FOURIER complexes de f_n en fonction de ceux de f_1 .

- ② Montrer que la série de FOURIER de f_1 est normalement convergente.
- ③ En déduire la convergence de la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|)$.
- ④ En utilisant le théorème de DIRICHLET, montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in \mathbf{R}, \quad |f_n(x) - c_0(f)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|)$$
- ⑤ Quelle conclusion concernant le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ peut-on tirer de ce qui précède?



À la prochaine

❑ Corrigé : Pr. Mamouni, CPGE Rabat, Maroc

Partie I. EXEMPLES ET RÉSULTATS GÉNÉRAUX

① Un premier exemple

① l'équation différentielle en question est : $(\mathcal{E}_{f_1}) : y' - y = -e^x$, dont la solution s'écrit $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation homogène : $(\mathcal{E}_H) : y' - y = 0$ et y_0 solution particulière de $(\mathcal{E}_{f_1})$. On a $y_H(x) = \lambda e^x$ et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, on injecte cette solution dans l'équation et on trouve $\lambda'(x) = -1$, d'où $y_0(x) = -xe^x$. Donc $y(x) = (-x + \lambda)e^x$. Cette équation ne possède aucune solution bornée au voisinage de $+\infty$.

② ① De même on a : l'équation différentielle en question est : $(\mathcal{E}_{f_\alpha}) : y' - y = -e^{\alpha x}$, dont la solution s'écrit $y = y_H + y_0$ où y_H solution générale de l'équation homogène : $(\mathcal{E}_H) : y' - y = 0$ et y_0 solution particulière de $(\mathcal{E}_{f_\alpha})$. On a $y_H(x) = \lambda e^x$ et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, on pose $y_0(x) = \lambda(x)e^x$, on injecte cette solution dans l'équation et on trouve $\lambda'(x)e^x = -e^{\alpha x}$, d'où $y_0(x) = -\frac{1}{\alpha - 1}e^{\alpha x}$. Donc $y(x) = -\frac{1}{\alpha - 1}e^{\alpha x} + \lambda e^x$.

② Donc une condition nécessaire et suffisante sur α pour que cette équation admet des solutions bornées

au voisinage de $+\infty$ est que $\alpha < 0$, en prenant $\lambda = 0$ mais cette solution n'est pas bornée sur $\mathbf{R}$.

② Résultats généraux

- ① L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est un espace affine de dimension 1.
- ② Soit y une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$, donc $(y(x)e^{-x})' = (y'(x) - y(x))e^{-x} = -f(x)e^{-x}$, d'où $y(x)e^{-x} = \lambda - \int_0^x e^{-t}f(t) dt$ et donc $y = y_\lambda : x \mapsto e^x \left(\lambda - \int_0^x e^{-t}f(t) dt \right)$, $\lambda \in \mathbf{R}$.
- ③ Si on suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$, alors $\lambda - \int_0^x e^{-t}f(t) dt = y_\lambda(x)e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t) dt$ est convergente et vaut λ .
- ④ L'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ peut avoir au maximum une solution bornée au voisinage de $+\infty$, en prenant $\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t) dt$, à condition que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}f(t) dt$ soit convergente.
- ⑤ ① Pour tout réel x , on a : $Y_f(x) = e^x \left(\lambda_f - \int_0^x e^{-t}f(t) dt \right) = e^x \left(\int_x^0 e^{-t}f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-t}f(t) dt \right) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t}f(t) dt$.

② La solution Y_f n'est pas nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$ si on prend par exemple $f(t) = e^{\frac{t}{2}}$, dans ce cas $Y_f(x) = 2e^{\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

⑥ ① Si f est bornée par une constante M , alors $|\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \leq M \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = Me^{-x}$, donc l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est bien définie donc $Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est bien définie et bornée aussi par M , comme l'équation admet au maximum une solution bornée alors c'est l'unique solution bornée, sur $\mathbf{R}$, de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$.

② Si f tend vers 0 en $+\infty$, alors $\forall \varepsilon > 0 \exists A > 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R} : x > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Ainsi $\forall x > A$ on a : $|f(t)| < \varepsilon, \forall t \geq x$ donc $|Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \leq \varepsilon e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \varepsilon$, d'où Y_f possède aussi une limite nulle en $+\infty$.

③ Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, alors $\forall \varepsilon > 0 \exists A < 0$ tel que $\forall x \in \mathbf{R} : x < A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Ainsi $\forall x < A$ on a : $|f(t)| < \varepsilon, \forall x \leq t \leq A$, donc $|Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq$

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt = e^x \int_x^A e^{-t} |f(t)| dt + e^x \int_A^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt, \text{ or } e^x \int_A^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty, \text{ car } \int_A^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \text{ est une constante qui ne dépend pas } x \text{ et } e^x \int_x^A e^{-t} |f(t)| dt \leq e^x \int_x^A e^{-t} \varepsilon dt = \varepsilon e^x (e^{-x} - e^{-A}) = \varepsilon (1 - e^{x-A}) \leq \varepsilon, \text{ et donc } Y_f \text{ possède une limite nulle en } -\infty.$$

③ Un autre exemple

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \sum_{n \geq 0} |u_{n,p}(x)| &= \frac{1}{(2p+1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!} \text{ finie} \\ \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} |u_{n,p}(x)| &= \sum_{p \geq 0} \frac{e^{(2p+2)x}}{(2p+1)!} = e^x \sum_{p \geq 0} \frac{(e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x sh(x) \text{ aussi finie et donc, pour tout réel } x, \text{ la suite double } (u_{n,p}(x))_{(n,p) \in \mathbf{N}^2} \text{ est sommable.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \text{ Le rayon de convergence de la série entière } \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}, \text{ est alors infini et sa somme est } \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} u_{n,p}(x) = \sum_{p \geq 0} \sum_{n \geq 0} (-1)^p \frac{(2p+2)^n x^n}{(2p+1)! n!} = \end{aligned}$$

$$\sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} \sum_{n \geq 0} \frac{((2p+2)x)^n}{n!} = \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} e^{(2p+2)x} = e^x \sum_{p \geq 0} \frac{(-1)^p (e^x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = e^x \sin(e^x).$$

③ l'intégrale $\int_0^A e^{-t} u(t) dt = \int_0^A \sin(e^t) dt = \int_1^{B=e^A} \frac{\sin(x)}{x} dx$ est alors une intégrale classique convergente car de même nature que la série alternée $\sum \frac{(-1)^k}{k}$. On a effectué le changement de variable $x = e^t$.

④ Pour tout réel x , on a : $\int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt = \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$ en effectuant le changement de variable $\theta = e^t$.

⑤ $Y_u(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt$ est déjà bornée en $+\infty$ car $\int_0^A e^{-t} u(t) dt$ converge, il reste donc à l'étudier en $-\infty$. faisons une intégration par partie dans l'intégrale $|\int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta| = |[-\frac{\cos \theta}{\theta}]_{e^x}^{+\infty} + \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\cos \theta}{\theta^2} d\theta| = |\frac{\cos e^x}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\cos \theta}{\theta^2} d\theta| \leq \frac{1}{e^x} + \int_{e^x}^{+\infty} \frac{1}{\theta^2} d\theta = \frac{2}{e^x}$, d'où $|Y_u(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt| = |e^x \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta| \leq 2$ donc la solution Y_u de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_u)$ est bornée sur $\mathbf{R}$.

Partie II. CAS D'UNE FONCTION INTÉGRABLE

A- Cas où f est intégrable sur $\mathbf{R}$

- ① La fonction G est continue, car primitive, bornée et tend vers 0 en $-\infty$ car f intégrable sur $\mathbf{R}$.
- ② f est intégrable sur $\mathbf{R}$, donc sa limite en $+\infty$ ne peut qu'être finie et donc f ne peut qu'être bornée par une constante M , d'où $\forall A \geq x$, on a : $\int_x^A e^{-t} |f(t)| dt \leq M e^{-x}$. Donc, pour tout réel x , la fonction $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.
- ③ Et dans ce cas : $\forall x \in \mathbf{R}$, $|Y_f(x)| = |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} |f(t)| dt \leq e^x \int_x^{+\infty} e^{-x} |f(t)| dt = \int_x^{+\infty} |f(t)| dt$, donc Y_f est bornée sur $\mathbf{R}$ par $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt$ et tend vers 0 en $+\infty$ car $\int_x^{+\infty} |f(t)| dt$ tend vers 0 en $+\infty$.
- ④ D'autre part $\forall x \in \mathbf{R}$, $Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} G'(t) dt = e^x [e^{-t} G(t)]_x^{+\infty} + e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} G(t) dt = -G(x) + Y_G(x)$ car $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} G(t) = 0$, puisque G est bornée et donc Y_f tend vers 0 en $-\infty$ car G et Y_G tendent vers 0 en $-\infty$.
- ⑤ On a f intégrable $\mathbf{R} \Rightarrow |f|$ intégrable $\mathbf{R}$, donc de façon pareille on montre que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.
- ⑥ On a : $Y_{|f|}(t) = Y'_{|f|}(t) + |f(t)|$, or $Y'_{|f|}$ intégrable car Y_f tend

vers 0 en $\pm\infty$ et $|f|$ intégrable donc $Y_{|f|}$ intégrable sur $\mathbf{R}$ et par suite Y_f est aussi intégrable sur $\mathbf{R}$ puisque $|Y_f| \leq Y_{|f|}$.

⑦ Effectuons une intégration par parties, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = \left[e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right]_{x \rightarrow -\infty}^{x \rightarrow +\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^x e^{-x} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = 0, \text{ puisque la fonction } t \mapsto e^{-t} f(t) \text{ est intégrable et } |e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty$$

⑧ $\forall (f, g) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \text{ on a : } \Phi(f + \lambda g)(x) = Y_{f+\lambda g}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t} (f(t) + \lambda g(t)) dt = \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt + \lambda \int_x^{+\infty} e^{-t} g(t) dt = Y_f(x) + \lambda Y_g(x) = \Phi(f)(x) + \lambda \Phi(g)(x),$
d'où
 $\Phi(f + \lambda g) = \Phi(f) + \lambda \Phi(g)$ et par suite Φ est linéaire, de plus d'après les questions précédentes si g est une fonction réelle continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, alors $Y_g = \Phi(g)$ l'est aussi, donc $\Phi : g \mapsto Y_g$ est un endomorphisme de E , d'autre part :
 $N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |Y_g(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} Y_{|g|}(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt = N_1(g),$ d'où Φ est continue avec $\|\Phi\| = \sup_{g \neq 0} \frac{N_1(\Phi(g))}{N_1(g)} \leq 1,$ de plus, pour $g \geq 0$ on a : $Y_g \geq 0$, d'où $N_1(Y_g) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y_g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$, d'où $\|\Phi\| \geq 1$ et donc $\|\Phi\| = 1$.

B- Cas où l'intégrale de f sur $\mathbf{R}$ converge

- ① La fonction F est continue sur $\mathbf{R}$, car c'est une primitive, et en plus admet une limite nulle en $+\beta$ par construction de F et une limite finie en $-\beta$ car l'intégrale converge, donc bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
- ② Même raisonnement que celui de la question II.A.4) En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
- ③ Ainsi on a : $Y_f = F - Y_F$, or F bornée et tend vers 0 en $-\infty$, donc Y_F aussi et donc Y_f vérifie la même chose.
- ④ Même raisonnement que celui de la question II.A.7).

Partie III. CAS D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

- ① f est 2π -périodique continue, donc bornée sur $\mathbf{R}$, d'où Y_f aussi, or l'équation différentielle $(\mathcal{E}_f)$ possède au maximum une solution bornée qui est donc la fonction Y_f .
- ② On effectue le changement de variable $u = t - 2\pi$ donc $y_F(x + 2\pi) = e^{x+2\pi} \int_{x+2\pi}^{+\beta} e^{-t} f(t) dt = e^{x+2\pi} \int_x^{+\beta} e^{-t-2\pi} f(t - 2\pi) dt = e^x \int_x^{+\beta} e^{-t} f(t) dt = Y_f(x)$, donc Y_f est 2π -périodique et de classe $\mathcal{C}^1$, comme produit de deux fonction de classe $\mathcal{C}^1$.
- ③ Les coefficients de FOURIER complexes de Y_f sont donnés par la formule :
 $\forall k \in \mathbf{Z} : c_k(Y_f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y_f(x) e^{-ikx} dx =$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(1-ik)x} \left(\int_x^{+\beta} e^{-t} f(t) dt \right) dx = \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{(1-ik)t}}{1-ik} \int_x^{+\beta} e^{-t} f(t) dt \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-ik} e^{-x} f(x) dx \right)$$

$$\frac{1}{2\pi(1-ik)} \left(e^{2\pi} \int_{2\pi}^{+\beta} e^{-t} f(t) dt - \int_0^{+\beta} e^{-t} f(t) dt \right) + \frac{c_k(f)}{1-ik} =$$

$$\frac{c_k(f)}{1-ik} \text{ car } e^{2\pi} \int_{2\pi}^{+\beta} e^{-t} f(t) dt = \int_0^{+\beta} e^{-t} f(t) dt \text{ en effectuant le changement de variable } u = t - 2\pi \text{ et utilisant le fait que } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique. D'où } \forall k \in \mathbf{Z} : c_k(Y_f) = \frac{c_k(f)}{1-ik}.$$

④ ① Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $c_k(f_n) = \frac{c_k(f_1)}{(1-ik)^{n-1}}.$

② Parce que Y_f de classe C^1 bornée.

③ $\sum_{k \in \mathbf{N}} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|) = M \sum_{k \in \mathbf{N}} \left(\frac{|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|}{M} \right)$
est finie car c'est la série de FOURRIER de f_1 en x_0 où

④ D'après le théorème de DIRICHLET, on a : $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}$ on a :

$$|f_n(x) - c_0(f_n)| = \left| \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} c_k(f_n) e^{ikx} \right|$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbf{Z}^*} |c_k(f_n)|$$

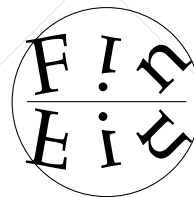
$$= \sum_{k \in \mathbf{N}^*} |c_{-k}(f_n)| + |c_k(f_n)|$$

$$= \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \frac{|c_{-k}(f_1)|}{|1+ik|^{n-1}} + \frac{|c_{-k}(f_1)|}{|1-ik|^{n-1}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|)$$

car $|1+ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$ et $|1-ik| = \sqrt{1+k^2} \geq 2$. de plus $c_0(f_n) = c_0(f)$ d'où le résultat.

⑤ Le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est le même que celui de la suite géométrique $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}$



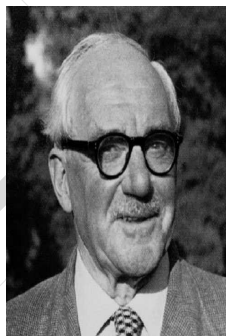
À la prochaine

Devoir Libre

27 Fonctions holomorphes : Série de Fourier lacunaire quadratique

Blague du jour

- ☛ Comment appelle t-on un chien sans pattes ? On ne l'appelle pas, on va le chercher !
- ☛ Un vieux rat rencontre une petite taupe. Curieux, il lui demande :
 - Que veux-tu faire plus tard, ma petite ?
 - Taupe-modèle !!



John Edensor Littlewood (1885-1977)

Mathématicien anglais. Il a surtout travaillé en analyse sur le sujet des fonctions entières. Il a collaboré pendant de nombreuses années avec Hardy et ils ont formulé ensemble deux conjectures. Il a aussi travaillé sur la théorie de Fourier. Il est lauréat de la Médaille Sylvester, de la Royal Medal et de la médaille Copley en 1958.

Mathématicien du jour

Énoncé : CNC MP, 2011

La fonction q définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par

$$q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}$$

est étudiée par Riemann il y a environ 150 ans, avec l'idée que cette fonction est continue sur $\mathbf{R}$ mais nulle part dérivable. L'étude est poursuivie par Hardy qui prouve en 1916 que cette fonction est non dérivable en tout $x \in \mathbf{R} \setminus \{\mathbf{Q}\}$. Il reste à étudier la dérivabilité en x rationnel et c'est Gerver qui en 1970 réussit à trouver le résultat assez inattendu : la fonction est dérivable en tout $x \in \mathbf{Q}$. Depuis, d'autres propriétés de cette fonction ont été étudiées, propriétés qui analysent plus finement la régularité de cette fonction : en particulier son ordre de Holder local et son spectre multifractal.

Le sujet a pour objet d'établir la dérivabilité de la fonction q au point 1 ; il utilise des outils de l'analyse complexe.

Le problème est composé de cinq parties ; les deux premières parties ont pour objectif d'établir la formule (2) qui sera utile dans la cinquième partie. Les trois dernières parties du problème s'enchaînent entre elles.

1^{ère} partie : Formule sommatoire de Poisson

Soit $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une application de classe C^1 telle que les applications $t \mapsto t^2 g(t)$ et $t \mapsto t^2 g'(t)$, définies sur $\mathbf{R}$, soient bornées à l'infini, ce qui revient à dire que

$$g(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ et } g'(t) \underset{t \rightarrow \pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On lui associe la suite $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions définies par

$$g_0(t) = g(t), \quad g_n(t) = g(t + 2n\pi) + g(t - 2n\pi) \quad t \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

- ① Montrer que pour tout réel x , la fonction $t \mapsto g(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Par définition, la transformée de Fourier de g est la fonction notée $\hat{g}$ définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt, \quad x \in \mathbf{R}.$$

- ② Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbf{N}^*} g_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbf{R}$.

- ③ On note $\tilde{g}$ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbf{R}$, par $\tilde{g}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)$.

- ① Montrer que la fonction $\tilde{g}$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.
② Justifier que la fonction $\tilde{g}$ est 2π -périodique et que ses coefficients de Fourier complexes sont donnés par

$$c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(k), \quad k \in \mathbf{Z}$$

On remarquera que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $\tilde{g}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=-n}^{p=n} g(t + 2p\pi)$.

- ③ Montrer que les familles $(g(2n\pi))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\hat{g}(n))_{n \in \mathbf{N}}$ sont sommables et que leurs sommes vérifient la relation suivante, dite formule sommatoire de Poisson,

$$2\pi \sum_{n \in \mathbf{Z}} g(2n\pi) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{g}(n).$$

2^{ème} partie : Application de la formule sommatoire de Poisson

Pour tout réel $\alpha > 0$, on note h_α la fonction définie, pour tout $t \in \mathbf{R}$, par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha^2 t^2}$.

- ① Vérifier que, pour tout réel $\alpha > 0$, la fonction h_α satisfait les hypothèses faites sur la fonction g dans la partie précédente. Dans la suite, on notera $\hat{h}_\alpha$ la transformée de Fourier de h_α , $\alpha > 0$; on admettra que $\hat{h}_1(0) = \sqrt{\pi}$.
② Montrer que la fonction $\hat{h}_1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y = 0 \quad (2)$$

- ③ Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\hat{h}_1$.

- ④ Montrer, pour tout $\alpha > 0$ et tout réel x , $\hat{h}_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}$.

- ⑤ Montrer, pour tout réel $a > 0$, la relation

$$\sqrt{a} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 a} \right) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}. \quad (3)$$

3^{ème} partie : Un résultat général sur les fonctions holomorphes

Si a et b sont des nombres complexes, $\gamma_{a,b}$ désigne le chemin du plan complexe $\mathbf{C}$ défini, pour tout $t \in [0, 1]$, par $\gamma_{a,b}(t) = (1-t)a + tb$; son image $\gamma_{a,b}[0, 1] = \{(1-t)a + tb, 0 \leq t \leq 1\}$ est notée $[a, b]$; c'est le segment du complexe d'extrémités a et b .

Pour la suite du problème, on notera Ω la partie de $\mathbf{C}$ définie par

$$\Omega = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

- ① Vérifier que pour tout $(a, b) \in \Omega^2$, $[a, b] \subset \Omega$, puis justifier que Ω est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue, si $(a, b) \in \Omega^2$, on définit l'intégrale curviligne de f le long du chemin $\gamma_{a,b}$, notée $\int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz$ ou simplement $\Phi(a, b)$, par

$$\Phi(a, b) = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz := (b - a) \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt.$$

- ② Soit a fixé dans Ω ; montrer que l'application $\Phi_a : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $b \mapsto \Phi_a(b) = \Phi(a, b)$, est continue sur Ω .
- ③ Soit ψ la fonction définie, pour tout $z \in \Omega$, par $\psi(z) = \bar{z}$; soient a et b deux éléments distincts de Ω . Montrer que l'ensemble des $c \in \Omega$ tels que

$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz$$

est soit une droite soit une demi-droite du plan complexe à préciser.

- ④ Dans la suite de cette partie, f est supposée holomorphe sur Ω . Si x et y sont des réels tels que $x + iy \in \Omega$, on pose

$$P(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy)), \quad Q(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy)).$$

- ① Rappeler les relations reliant les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}$ puis $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

- ② Soit $(a, b, c) \in \Omega^3$. Montrer à l'aide des résultats du programme sur les formes différentielles que $\int_{\partial T^+} Pdx - Qdy = \int_{\partial T^+} Qdx + Pdy$, où ∂T^+ désigne la frontière,

orientée dans le sens direct, de la plaque triangulaire T du plan $\mathbb{R}^2$ dont les sommets sont les affixes des complexes a, b et c . En déduire $\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz$.

- ③ Soit $a \in \Omega$ fixé; déduire de ce qui précède que la fonction Φ_a est holomorphe sur Ω et que sa dérivée au sens complexe, noté Φ'_a , vérifie $\Phi'_a(b) = f(b)$ pour tout $b \in \Omega$; on rappelle que

$$\Phi'_a(b) = \lim_{\substack{c \rightarrow b \\ c \in \Omega \setminus \{b\}}} \frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c - b}$$

- ④ On suppose que, pour tout $b \in \Omega$, la fonction $r \mapsto \Phi(ir, b)$, définie sur $]0, +\infty[$, admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque r tend vers 0^+ ; on note $F(b)$ cette limite. Montrer que, pour tout $(b, c) \in \Omega^2$, $F(c) - F(b) = \Phi(b, c)$, puis en déduire que F est holomorphe sur Ω et que $F' = f$ sur Ω .

4^{ème} partie : Étude d'un exemple

On note $\exp$ la fonction exponentielle complexe. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, on note $\operatorname{Arg}(z)$ l'élément de l'intervalle $] -\pi, \pi[$ tel que $z = |z| \exp(i \operatorname{Arg}(z))$; on pose alors $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i \operatorname{Arg}(z)$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$z^\lambda = \exp(\lambda \operatorname{Log}(z))$$

La fonction Log est le logarithme principal défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$; on rappelle que les fonctions $\exp$ et Log sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ respectivement; leur dérivées au sens complexes vérifiant

$$\text{Log}'(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \quad \text{et} \quad \exp'(z) = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Soit λ un réel fixé dans l'intervalle $] -1, 0[$; on note f_λ la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, par

$$f_\lambda(z) = z^\lambda \exp\left(-\frac{i}{z}\right).$$

- ① Justifier que f_λ est holomorphe sur Ω .
- ② Soit b un complexe fixé dans Ω . On note $J_{\lambda,b}$ la fonction, définie pour tout $r > 0$, par $J_{\lambda,b}(r) = \int_{\gamma_{ir,b}} f_\lambda(z) dz$. Montrer que la fonction $J_{\lambda,b}$ admet une limite, notée $F_{\lambda,b}$, lorsque r tend vers 0^+ et que

$$F_\lambda(b) = b^{\lambda+1} \int_{]0,1]} t^\lambda \exp(-i tb) dt.$$

On pourra utiliser le théorème de convergence dominée après en avoir vérifié les conditions de validité.

- ③ On note G_λ la fonction, définie pour tout $z \in \mathbb{C}$, par $G_\lambda(z) = z^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{i}{z}\right) F_\lambda(z)$.
 - ① Justifier que les fonctions F_λ et G_λ sont holomorphes sur Ω et que $F'_\lambda = f_\lambda$ sur Ω .
 - ② Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $G_\lambda(z) = \frac{1}{z} \exp\left(\frac{i}{z}\right) \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2} \exp\left(-\frac{iu}{z}\right) du$.
 - ③ Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $|G_\lambda(z)| \leq 2$ et que $|F_{-1/2}(z)| \leq 2|z|^{\frac{3}{2}}$.

5^{ème} partie : Démonstration de la propriété proposée

Pour tout entier naturel non nul n , on note u_n la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par

$$u_n(z) = \exp(i\pi n^2 z).$$

- ① Soit $z \in \mathbb{C}$; montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(z)$ converge $\iff z \in \Omega$.

Dans la suite, on pose $u(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(z)$, $z \in \Omega$.

- ② Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $u(z+1) + u(z) = 2u(4z)$.
- ③ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, on pose $\tilde{u}_n(x, y) = u_n(x + iy)$ et $\tilde{u}(x, y) = u(x + iy)$

- ① Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} n^k \tilde{u}_n$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

- ② Montrer soigneusement que la fonction $\tilde{u}$, définie ci-dessus, possède en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à x et exprimer $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y)$, pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, sous la forme de la somme d'une série.

- ③ Montrer de même que la fonction $\tilde{u}$ possède en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ une dérivée partielle par rapport à y et l'exprimer en fonction de $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y)$.

- ④ Montrer que la fonction u est holomorphe sur Ω .

- ④ Partant de la formule (2) de la deuxième partie et moyennant un résultat sur les zéros d'une fonction holomorphe, montrer que pour tout $z \in \Omega$,

$$\left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} (1 + 2u(z)) = 1 + 2u\left(-\frac{1}{z}\right).$$

- ⑤ En déduire que, pour tout $z \in \Omega$, $u(1+z) + \frac{1}{2} = \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right).$

- ⑥ Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{i\pi n^2}$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ et que sa somme, notée v , est continue sur cet ensemble.

- ⑦ Montrer que, pour tout $z \in \Omega$ et tout $\alpha > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} nF_{-1/2}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right)$ est convergente, où $F_{-1/2}$ est la fonction définie dans la quatrième partie.

- ⑧ Pour tout $z \in \Omega$, on pose

$$v_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(z)}{i\pi n^2} \quad \text{et} \quad w(z) = \frac{(i\pi)^{1/2}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right)$$

- ① Montrer que la fonction v_1 est holomorphe sur Ω et que $v'_1 = u$.

- ② On admet que la fonction w est holomorphe sur Ω ; calculer sa dérivée w' , au sens complexe, en admettant que l'on puisse dériver terme à terme la série définissant w .

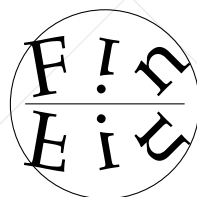
- ③ Montrer que, pour tout $z \in \Omega$,

$$v_1(z+1) - v_1(1) = \frac{-z}{2} + \frac{(i\pi)^{1/2}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right)$$

- ⑨ Montrer qu'il existe une constante c positive telle que, pour tout $z \in \Omega$, on ait

$$\left| v(z+1) - v(1) + \frac{z}{2} \right| \leq c|z|^{3/2}.$$

- ⑩ Montrer soigneusement que $q(x+1) - q(1) + \frac{x}{2} \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x^{3/2})$. En déduire que la fonction q est dérivable en 1 et préciser $q'(1)$.



À la prochaine

❑ Corrigé : Pr. Hfa, CPGE Agadir, Maroc

Rappels du cours :

En plus du programme Français, ce problème utilise ce petit rappel du cours, qui fait partie

du programme Marocain.

Définition :

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, $a \in U$, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

(i) On dit que f est holomorphe en a si $\lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$ existe dans $\mathbb{C}$.

Dans ce cas cette limite est notée : $f'(a) = \lim_{z \rightarrow a, z \neq a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$, dite

dérivée de f en a .

(ii) On dit que f est holomorphe sur U si f est holomorphe en tout point de U , et dans ce

cas, l'application $f' : U \rightarrow \mathbb{C}$ est dite la dérivée de f sur U .

Remarques : (Opérations sur les dérivées)

(i) On dérive de la même manière que pour les fonctions d'une variable réelle, le produit, le rapport (quand il est défini), les combinaisons linéaires, de deux fonctions holomorphes.

(ii) Si U est un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe sur U ,

alors f est constante sur U si et seulement si $\forall z \in U ; f'(z) = 0$.

Théorème : (Équations de Cauchy Riemann)

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

On pose : $\tilde{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x + iy \in U\}$ et $\forall (x, y) \in \tilde{U} ; \tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$.

On pose aussi : $\forall (x, y) \in \tilde{U} ; P(x, y) = \operatorname{Re}(f(x + iy))$ et $Q(x, y) = \operatorname{Im}(f(x + iy))$.

Alors $\tilde{U}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe sur U .

(ii) $\tilde{f}$ est de classe C^1 sur $\tilde{U}$ et $\forall (x, y) \in \tilde{U} ; \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y) = 0$.

(iii) P et Q sont de classe C^1 sur $\tilde{U}$ et $\forall (x, y) \in \tilde{U} ;$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

Remarque :

Sous les notations du théorème précédente, si f est holomorphe sur U , alors :

$$\forall (x, y) \in \tilde{U} ; f'(x + iy) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x, y) = -i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x, y)$$

Théorème : (Principe des zéros isolés)

Soient U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{C}$, et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe.

On suppose que f n'est pas identiquement nulle, et qu'il existe $a \in U$ tel que : $f(a) = 0$.

alors il existe $r > 0$, tel que $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z - a| < r\} \subset U$ et $\forall z \in D(a, r) \setminus \{a\} ; f(z) \neq 0$.

Autrement dit (par contraposée) si $\{z \in U \text{ tq } f(z) = 0\}$ admet un point d'accumulation, alors f est identiquement nulle.

Dans tout ce problème, on pose : $q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}$

1^{ère} Partie : Formule sommatoire de Poisson

Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^1 telle que : $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $g'(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On pose : $\forall t \in \mathbb{R} ; g_0(t) = g(t)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* ; g_n(t) = g(t + 2n\pi) + g(t - 2n\pi)$.

1.1) L'application $[t \mapsto g(t)e^{-ixt}]$ est continue sur $\mathbb{R}$, et d'après l'hypothèse ci-dessus :

$h(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, alors h est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On pose alors : $\forall x \in \mathbb{R} ; \hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-ixt} dt$. $\hat{g}$ est la transformée de Fourier de g .

1.2) L'application $[t \mapsto t^2 g(t)]$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $g(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$, alors il existe $A > 0$, tel que cette application est bornée sur $\mathbb{R} \setminus [-A, A]$, cette application est continue sur le

segment $[-A, A]$, donc bornée sur ce segment, et par suite bornée sur $\mathbb{R}$.

Il existe alors $M > 0 ; \forall t \in \mathbb{R} ; |t^2 g(t)| \leq M$.

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, Puisque : $\lim_{n \rightarrow \infty} (b - 2n\pi) = -\infty$ et

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a + 2n\pi) = +\infty$

$\exists N \in \mathbb{N}^* ; \forall n \geq N ; \forall t \in [a, b] ; (t - 2n\pi) \leq (b - 2n\pi) < 0$ et

$(t + 2n\pi) \geq (a + 2n\pi) > 0$.

$\forall n \geq N ; \forall t \in [a, b] ; |g_n(t)| \leq \frac{M}{(t - 2n\pi)^2} + \frac{M}{(t + 2n\pi)^2} \leq$

$\frac{M}{(b - 2n\pi)^2} + \frac{M}{(a + 2n\pi)^2}$.

$\frac{M}{(b - 2n\pi)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{M}{4\pi^2 n^2}$ et $\frac{M}{(a + 2n\pi)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{M}{4\pi^2 n^2}$ alors la série

$\sum \left(\frac{M}{(b - 2n\pi)^2} + \frac{M}{(a + 2n\pi)^2} \right)$ converge.

Par conséquent : la série $\left(\sum_{n \geq N} g_n(t) \right)$ converge normalement pour $t \in [a, b]$.

Conclusion : la série $\left(\sum_{n \geq 0} g_n(t) \right)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

1.3) On note $\tilde{g}$ la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $\tilde{g}(t) = \sum_{n \geq 0} g_n(t)$.

1.3.1) g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$; g_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Notons que : $\forall t \in \mathbb{R}$; $g'_0(t) = g'(t)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g'_n(t) = g'(t + 2n\pi) + g'(t - 2n\pi)$.

On remplace g par g' dans la question précédente, on obtient alors

que la série : $\left(\sum_{n \geq 0} g'_n \right)$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

D'où $\tilde{g}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}$; $\tilde{g}'(t) = \sum_{n \geq 0} g'_n(t)$.

1.3.2) Remarquons que d'après le raisonnement de la question 1.2) on a :

$\forall t \in \mathbb{R}$; les séries $\left(\sum_{n \geq 1} g(t + 2n\pi) \right)$ et $\left(\sum_{n \geq 1} g(t - 2n\pi) \right)$ convergent.

$\forall t \in \mathbb{R}$; $\tilde{g}(t + 2\pi) = \sum_{n \geq 0} g_n(t + 2\pi) = g(t + 2\pi) + \sum_{n \geq 1} g(t + 2(n +$

$1)\pi) + \sum_{n \geq 1} g(t - 2(n - 1)\pi)$.

$\tilde{g}(t + 2\pi) = g(t + 2\pi) + \sum_{n \geq 2} g(t + 2n\pi) + \sum_{n \geq 0} g(t - 2n\pi)$.

$\tilde{g}(t + 2\pi) = g(t + 2\pi) + g(t) + g(t - 2\pi) + \sum_{n \geq 2} (g(t + 2n\pi) + g(t - 2n\pi)) = \tilde{g}(t)$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$; $c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g}(t) e^{-ikt} dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}$; $\forall t \in \mathbb{R}$; $\left| \tilde{g}(t) e^{-ikt} - \sum_{p=0}^n g_p(t) e^{-ikt} \right| = \left| \tilde{g}(t) - \sum_{p=0}^n g_p(t) \right|$.

Alors, d'après 1.2) la série $\sum_{p=0}^n g_p(t) e^{-ikt}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers

$[t \mapsto \tilde{g}(t) e^{-ikt}]$, en particulier sur $[0, 2\pi]$. On déduit alors que :

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 0} \int_0^{2\pi} g_n(t) e^{-ikt} dt$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \left(\int_0^{2\pi} g(t + 2n\pi) e^{-ikt} dt + \int_0^{2\pi} g(t - 2n\pi) e^{-ikt} dt \right)$$

On pose : $u = t + 2n\pi$ et $v = t - 2n\pi$.

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \sum_{n \geq 1} \left(\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(u) e^{-iku} du + \int_{-2n\pi}^{-2(n-1)\pi} g(v) e^{-ikv} dv \right)$$

De 1.1) l'application $[t \mapsto g(t) e^{-ikt}]$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la relation de Chasle donne alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-ikt} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{+\infty} g(u) e^{-iku} du +$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 g(v) e^{-ikv} dv.$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} ; c_k(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \hat{g}(k).$$

1.3.3) $g(2n\pi) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors les séries $\left(\sum_{n \geq 0} g(2n\pi) \right)$ et

$\left(\sum_{n \geq 1} g(-2n\pi) \right)$ sont

absolument convergentes, et donc la famille $(g(2n\pi))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

$$\forall n \in \mathbb{Z} ; \hat{g}(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-int} dt = 2\pi c_n(\tilde{g}).$$

$\tilde{g}$ est 2π -périodique de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{Z} ; c_n(\tilde{g}') = inc_n(\tilde{g})$.

$$\forall n \in \mathbb{Z}^* ; |c_n(\tilde{g})| = \frac{1}{|n|} |c_n(\tilde{g}')| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + |c_n(\tilde{g}')|^2 \right).$$

La famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{Z}^*}$ est sommable, et d'après la formule de Parseval, la famille $(|c_n(\tilde{g}')|^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ est aussi sommable, donc la famille $(|c_n(\tilde{g})|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable, et par suite la famille $(\hat{g}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est aussi sommable.

D'autre part, en utilisant le théorème de Dirichlet, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(n) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\tilde{g}) = 2\pi \tilde{g}(0) = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(2n\pi).$$

2ème Partie : Application de la formule sommatoire de Poisson

Pour tout réel $\alpha > 0$, on note h_α la fonction définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $h_\alpha(t) = e^{-\alpha^2 t^2}$.

2.1) h_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et $\lim_{|t| \rightarrow \infty} t^2 h_\alpha(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} t^2 h'_\alpha(t) = 0$,

alors les applications

$[t \mapsto t^2 h_\alpha(t)]$ et $[t \mapsto t^2 h'_\alpha(t)]$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, et donc h_α

vérifie les hypothèses de g .

$$2.2) \forall x \in \mathbb{R} ; h_1(x) = e^{-x^2} \text{ et } \hat{h}_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-itx} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - itx} dt.$$

L'application $[(x, t) \mapsto e^{-t^2 - itx}]$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 ; \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| = |t| e^{-t^2}$ et l'application $[t \mapsto |t| e^{-t^2}]$ est continue intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$\hat{h}_1 \text{ est donc de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} ; \hat{h}_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt = -i \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2 - itx} dt.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \hat{h}_1'(x) + \frac{x}{2} \hat{h}_1(x) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix - 2t) e^{-t^2 - itx} dt = \frac{i}{2} [e^{-t^2 - itx}]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

$\hat{h}_1$ est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : (1)

$$y' + \frac{x}{2} y = 0.$$

2.3) La solution générale de (1) est $y(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ avec λ constante réelle.

Posons alors : $\forall x \in \mathbb{R} ; \hat{h}_1(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}} . \hat{h}_1(0) = \lambda = \sqrt{\pi}$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R} ; \hat{h}_1(x) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$.

2.4) $\forall x \in \mathbb{R} ; \hat{h}_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 t^2 - itx} dt$. On pose : $u = \alpha t$.

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \hat{h}_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - ix \frac{u}{\alpha}} du = \frac{1}{\alpha} \hat{h}_1\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2}}.$$

2.5) Maintenant, appliquons 1.3.3) à h_α . $2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_\alpha(2n\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{h}_\alpha(n)$.

$$2\pi \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4n^2\pi^2\alpha^2} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4\alpha^2}} \right).$$

Soit $a > 0$, on applique la formule ci-dessus pour $\alpha = \sqrt{\frac{a}{4\pi}}$. On obtient :

$$\sqrt{a} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 a} \right) = \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}} \right).$$

3^{ème} Partie : Un résultat général sur les fonctions holomorphes

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, on pose : $\forall t \in [0, 1] ; \gamma_{a,b}(t) = (1-t)a + tb$.

On note aussi : $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \text{Im}(z) > 0\}$.

3.1) Ω est un demi plan, alors $\forall a, b \in \Omega ; [a, b] \subset \Omega$.

Ω est donc convexe, et par suite Ω est connexe par arcs.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application continue.

On pose : $\forall (a, b) \in \Omega^2 ; \Phi(a, b) = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz = (b-a) \int_0^1 f((1-t)a + tb)dt$.

3.2) Soit a fixé dans Ω , et Φ_a l'application définie sur Ω par : $\forall b \in \Omega ; \Phi_a(b) = \Phi(a, b)$.

f est continue, alors l'application $\left[(t, b) \xrightarrow{F_a} f((1-t)a + tb) \right]$ est continue sur $[0, 1] \times \Omega$, alors

$\Phi_a(b) = \int_0^1 F_a(t, b)dt$ définit une application continue sur Ω .

3.3) Soient $a, b, c \in \Omega$.

$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = (c-a) \int_0^1 ((1-t)\bar{a} + t\bar{c})dt + (b -$$

$$c) \int_0^1 ((1-t)\bar{c} + t\bar{b})dt.$$

$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \frac{1}{2} \left((c\bar{a} - |a|^2) + (b\bar{c} - |c|^2) + (|c|^2 - a\bar{c}) + (|b|^2 -$$

$$\int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz = \frac{1}{2} \left((b\bar{a} - |a|^2) + (|b|^2 - a\bar{b}) \right).$$

$$\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz \text{ si et seulement si}$$

$$\left((c\bar{a} - |a|^2) + (b\bar{c} - |c|^2) + (|c|^2 - a\bar{c}) + (|b|^2 - c\bar{b}) \right) = \left((b\bar{a} - |a|^2) + (|b|^2 -$$

$$\text{si et seulement si } c\bar{a} + b\bar{c} - a\bar{c} - c\bar{b} = b\bar{a} - a\bar{b}$$

$$\text{si et seulement si } c(\bar{a} - \bar{b}) - (a - b)\bar{c} = b\bar{a} - a\bar{b}$$

$$\text{si et seulement si } \text{Im}(c(\bar{a} - \bar{b}) - b\bar{a}) = 0$$

$$\text{si et seulement s'il existe un réel } \lambda, \text{ tel que : } c = \frac{\lambda + b\bar{a}}{\bar{a} - \bar{b}}$$

$$\text{L'ensemble des } c \in \Omega \text{ tels que : } \int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz$$

est une droite horizontale si $(a - b) \in \mathbb{R}$ et c'est une demi-droite ouverte si non.

3.4) Dans la suite de cette partie, f est supposée holomorphe sur Ω , et si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$(x + iy) \in \Omega$, on pose : $P(x, y) = \text{Re}(f(x + iy))$ et $Q(x, y) =$

$\text{Im}(f(x + iy)).$

3.4.1) Les équations de Cauchy Riemann : $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$ et

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

3.4.2) Soit $(a, b, c) \in \Omega^3$. D'après la formule de Green-Riemann on a :

$$\int_{\partial T^+} Pdx - Qdy = \int \int_T \left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

$$\int_{\partial T^+} Qdx + Pdy = \int \int_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = 0. \text{ D'autre part, on a}$$

:

$$0 = \int_{\partial T^+} Qdx + Pdy = \pm \left(\int_{\gamma_{a,c}} Qdx + Pdy + \int_{\gamma_{c,b}} Qdx + Pdy + \int_{\gamma_{b,a}} Qdx + Pdy \right)$$

(*)

$$0 = \int_{\partial T^+} Pdx - Qdy = \pm \left(\int_{\gamma_{a,c}} Pdx - Qdy + \int_{\gamma_{c,b}} Pdx - Qdy + \int_{\gamma_{b,a}} Pdx - Qdy \right)$$

(**)

$\gamma_{a,c}$ est paramétré par : $\begin{cases} x = (1-t)\text{Re}(a) + t\text{Re}(c) \\ y = (1-t)\text{Im}(a) + t\text{Im}(c) \end{cases} ; t \in [0, 1] ;$

$$\begin{cases} x' = \text{Re}(c) - \text{Re}(a) \\ y' = \text{Im}(c) - \text{Im}(a) \end{cases}.$$

$$\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz = (b-a) \int_0^1 (P(x(t), y(t)) + iQ(x(t), y(t))) dt$$

$$\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz = \int_0^1 (\text{Re}(c) - \text{Re}(a)) P(x(t), y(t)) - (\text{Im}(c) - \text{Im}(a)) Q(x(t), y(t)) dt$$

$$+ i \int_0^1 (\text{Re}(c) - \text{Re}(a)) Q(x(t), y(t)) + (\text{Im}(c) - \text{Im}(a)) P(x(t), y(t)) dt.$$

$$\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz = \int_{\gamma_{a,c}} Pdx - Qdy + i \int_{\gamma_{a,c}} Qdx + Pdy.$$

D'où d'après les formules (*) et (**) ci-dessus :

$$\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz + \int_{\gamma_{b,a}} f(z)dz = 0 \text{ et } \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz =$$

$$\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz.$$

3.4.3) a est toujours fixé dans Ω . Soit $b \in \Omega$ et $c \in \Omega \setminus \{b\}$.

$$\frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c - b} = \frac{1}{c - b} \left(\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz - \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz \right) =$$

$$\frac{1}{c - b} \int_{\gamma_{b,c}} f(z)dz = \int_0^1 f((1-t)b + tc) dt.$$

L'application $[(t, c) \mapsto f((1-t)b + tc)]$ est continue sur $[0, 1] \times \Omega$, alors l'application

$$[c \mapsto \int_0^1 f((1-t)b + tc) dt] \text{ est continue sur } \Omega, \text{ donc}$$

$$\lim_{\substack{c \rightarrow b \\ c \neq b}} \frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c - b} = \int_0^1 f(b) dt = f(b).$$

3.4.4) On suppose que, pour tout $b \in \Omega$, la fonction $[r \mapsto \Phi(ir, b)]$, définie sur $]0, +\infty[$,

admet une limite dans $\mathbb{C}$ lorsque r tend vers 0^+ . On note $F(b)$ cette limite.

Soit $(b, c) \in \Omega^2$ et soit $r > 0$.

$$F(c) - F(b) = \lim_{r \rightarrow 0} (\Phi(ir, c) - \Phi(ir, b)) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_{ir, c}} f(z) dz + \int_{\gamma_{b, ir}} f(z) dz \right) \quad \forall r > 0 ; [t \mapsto ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)})] \text{ est continue sur le segment } [0, 1].$$

$$\int_{\gamma_{b, c}} f(z) dz = \Phi(b, c).$$

Fixons $b \in \Omega$ et soit $c \in \Omega \setminus \{b\}$.

$$\frac{F(c) - F(b)}{c - b} = \int_0^1 f((1-t)b + tc) dt, \text{ alors d'après la question précédente : } \lim_{\substack{c \rightarrow b \\ c \neq b}} \frac{F(c) - F(b)}{c - b} = f(b).$$

On déduit alors que F est holomorphe sur Ω et que $F' = f$ sur Ω .

4^{ème} Partie : Étude d'un exemple

Soit λ un réel fixé dans l'intervalle $] -1, 0[$; et f_λ la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ par :

$$f_\lambda(z) = z^\lambda \exp(-\frac{i}{z})$$

4.1) Les fonctions $[z \mapsto z^\lambda = \exp(\lambda \log(z))]$ et $[z \mapsto -\frac{i}{z}]$ sont holomorphes sur Ω , alors la

fonction f_λ est produit deux fonctions holomorphes sur Ω , f_λ est donc holomorphe sur Ω .

4.2) Soit b un complexe fixé dans Ω . On pose : $\forall r > 0 ; J_{\lambda, b}(r) = \int_{\gamma_{ir, b}} f_\lambda(z) dz.$

$$J_{\lambda, b}(r) = (b - ir) \int_0^1 ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)}) dt.$$

$\forall r > 0 ; [t \mapsto ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)})]$ est continue sur le segment $[0, 1]$.

$$\forall r > 0 ; \forall t \in [0, 1] ; \left| \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)}) \right| =$$

$$\left| \exp(-\frac{i(t\bar{b} - (1-t)ir)}{((1-t)ir + tb)^2}) \right| = \exp(-\frac{t\text{Im}(b) + (1-t)r}{((1-t)ir + tb)^2}) \leq 1$$

$$\left| ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)}) \right| \leq \left| ((1-t)ir + tb)^\lambda \right| =$$

$$|(1-t)ir + tb|^\lambda$$

$$\left| ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)}) \right| \leq \left(((1-t)r + t\text{Im}(b))^2 + t^2\text{Re}(b) \right)^{\frac{\lambda}{2}}$$

$\frac{\lambda}{2} < 0$, alors $[t \mapsto t^{\frac{\lambda}{2}}]$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$, alors :

$$\left| ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)}) \right| \leq |b|^\lambda t^\lambda = \frac{|b|^\lambda}{t^{-\lambda}} \text{ avec } -\lambda < 1,$$

L'application $[t \mapsto \frac{|b|^\lambda}{t^{-\lambda}}]$ est continue intégrable sur $]0, 1[$.

$$\forall t \in]0, 1[; \lim_{r \rightarrow 0} ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)}) = b^\lambda t^\lambda \exp(-\frac{i}{tb}).$$

En plus l'application $[t \mapsto b^\lambda t^\lambda \exp(-\frac{i}{tb})]$ est continue sur $]0, 1[$.

Alors d'après le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^1 ((1-t)ir + tb)^\lambda \exp(-\frac{i}{((1-t)ir + tb)}) dt = \int_0^1 b^\lambda t^\lambda \exp(-\frac{i}{tb}) dt.$$

D'où $\lim_{r \rightarrow 0} J_{\lambda,b}(r) = F_{\lambda}(b) = b^{\lambda+1} \int_0^1 t^{\lambda} \exp\left(\frac{-i}{tb}\right) dt$.

4.3) On note G_{λ} la fonction, définie pour tout $z \in \Omega$, par $G_{\lambda}(z) = z^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{i}{z}\right) F_{\lambda}(z)$.

4.3.1) F_{λ} est holomorphe sur Ω et $F'_{\lambda} = f_{\lambda}$ d'après 3.4.4), G_{λ} est produit de trois fonctions

holomorphes sur Ω , alors G_{λ} est aussi holomorphe sur Ω .

4.3.2) $\forall z \in \Omega$; $G_{\lambda}(z) = z^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{i}{z}\right) z^{\lambda+1} \int_0^1 t^{\lambda} \exp\left(\frac{-i}{tz}\right) dt = \frac{1}{z} \exp\left(\frac{i}{z}\right) \int_0^1 t^{\lambda} \exp\left(\frac{-i}{tz}\right) dt$.

On pose : $u = \frac{1}{t}$; $dt = \frac{-du}{u^2}$. $\forall z \in \Omega$; $G_{\lambda}(z) = \frac{1}{z} \exp\left(\frac{i}{z}\right) \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{-iu}{z}\right) du$.

4.3.3) $G_{\lambda}(z) = \frac{1}{z} \int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{-i(u-1)}{z}\right) du = \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} (1+v)^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{-iv}{z}\right) dv$

(où l'on a posé $v = u - 1$) ; $\left| \exp\left(\frac{-iv}{z}\right) \right| = \left| \exp\left(\frac{-iv\bar{z}}{|z|^2}\right) \right| = \exp\left(\frac{-v\text{Im}(z)}{|z|^2}\right) \leq 1$

$G_{\lambda}(z) = i \left[(1+v)^{-\lambda-2} \exp\left(\frac{-iv}{z}\right) \right]_0^{+\infty} + i(\lambda+2) \int_0^{+\infty} (1+v)^{-\lambda-3} \exp\left(\frac{-iv}{z}\right) dv$

$G_{\lambda}(z) = -i + i(\lambda+2) \int_0^{+\infty} (1+v)^{-\lambda-3} \exp\left(\frac{-iv}{z}\right) dv$.

$\text{Im}(z) > 0$ et $v > 0$, alors $\left| \exp\left(\frac{-iv}{z}\right) \right| \leq 1$.

$|G_{\lambda}(z)| \leq 1 + (\lambda+2) \int_0^{+\infty} (1+v)^{-\lambda-3} dv = 1 +$

$\left[-(1+v)^{-\lambda-2} \right]_0^{+\infty} = 2$.

D'après 4.3) et l'étape précédente : $\left| F_{-\frac{1}{2}}(z) \right| = \left| G_{-\frac{1}{2}}(z) \right| |z|^{\frac{3}{2}} \left| \exp\left(\frac{-i}{z}\right) \right| \leq 2 |z|^{\frac{3}{2}}$.

5^{ème} Partie : Démonstration de la propriété proposée

Pour tout entier naturel non nul n , on note u_n la fonction définie, pour tout $z \in \mathbb{C}$, par :

$$u_n(z) = \exp(i\pi n^2 z)$$

5.1) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. $|u_n(z)| = \exp(-\pi n^2 \text{Im}(z))$.

Si $\text{Im}(z) \leq 0$ alors la série $(\sum u_n(z))$ diverge grossièrement.

Si $\text{Im}(z) > 0$ alors $|u_n(z)| = O_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ alors $(\sum u_n(z))$ converge absolument.

Finalement la série $(\sum u_n(z))$ converge si et seulement si $z \in \Omega$.

5.2) Séparons les indices paires et impaires dans la somme suivante :

$$u(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi n^2(z+1)) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \exp(i\pi n^2 z) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi 4n^2 z) - \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi (2n-1)^2 z)$$

$$u(z+1) = u(4z) - u(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\pi 4n^2 z). \text{ D'où : } \forall z \in \Omega ;$$

$$u(z+1) + u(z) = 2u(4z).$$

5.3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, on pose :

$$\tilde{u}_n(x, y) = u_n(x + iy) \quad \text{et} \quad \tilde{u}(x, y) = u(x + iy).$$

5.3.1) Soient $a > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times [a, +\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* ; \left| n^k \tilde{u}_n(x, y) \right| = n^k \exp(-\pi n^2 y) \leq n^k \exp(-\pi n^2 a).$$

$n^k \exp(-\pi n^2 a) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors la série $\left(\sum n^k \exp(-\pi n^2 a)\right)$ converge et par suite la série

$\left(\sum_{n \geq 1} n^k \tilde{u}_n\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

0.

5.3.2) $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \tilde{u}_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

En effet : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[; \tilde{u}_n(x, y) = \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x).$

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, y) = i\pi n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, y) \right| = \pi n^2 \exp(-\pi n^2 y).$$

La série $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, y)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

D'où en appliquant à y fixé le théorème de dérivation sous le signe

$$\sum, \text{ la fonction } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y)$$

existe en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, avec $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) = i\pi \sum_{n \geq 1} n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x).$

5.3.3) $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \tilde{u}_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

En effet : $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[; \tilde{u}_n(x, y) = \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x).$

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}(x, y) = -\pi n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}(x, y) \right| = \pi n^2 \exp(-\pi n^2 y).$$

La série $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial y}(x, y)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

D'où en appliquant à x fixé le théorème de dérivation sous le signe

$$\sum, \text{ la fonction } \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, y)$$

existe en tout point de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, avec $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, y) =$

$$-\pi \sum_{n \geq 1} n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x) = i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y).$$

5.3.4) $\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[; \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) = i\pi \sum_{n \geq 1} n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x).$

Cette série converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, et pour tout $n \geq 1$, la

fonction $\left[(x, y) \mapsto n^2 \exp(-\pi n^2 y + i\pi n^2 x) \right]$ est continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}$ est donc continue sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et d'après la question précédente, $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}$ est aussi continue

sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$, alors $\tilde{u}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ et vérifie :
 $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(x, y) = 0$

D'où u est holomorphe sur Ω .

5.4) Soit $z \in \Omega$, on a bien $\frac{i}{z} \notin \mathbb{R}^-$ car $\text{Im}(z) > 0$.

(Dans cette question, une faute de frappe à l'énoncé, un signe - oublié)

$$\left(\frac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2u(z)) = \left(\frac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} \exp(i\pi n^2 z)\right) \text{ et } 1 +$$

$$2u\left(\frac{-1}{z}\right) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right).$$

D'après la question précédente :

$$h(z) = \left(\frac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2u(z)) - \left(1 + 2u\left(\frac{-1}{z}\right)\right) = \left(\frac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} \exp(i\pi n^2 z)\right) - \left(1 + 2 \sum_{n \geq 1} \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right).$$

définit une fonction holomorphe sur l'ouvert connexe par arcs Ω .

D'après la formule (2), si $z = ia$ avec $a > 0$, alors $h(z) = 0$.

D'où d'après le principe des zéros isolés, h est nulle Ω , ce qui établit :

$$\forall z \in \Omega ; \left(\frac{i}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 + 2u(z)) = 1 + 2u\left(\frac{-1}{z}\right)$$

5.5) D'après 5.2), $u(z+1) + \frac{1}{2} = 2u(4z) - u(z) + \frac{1}{2} = (2u(4z) + 1) - \frac{1}{2}(2u(z) + 1)$.

Alors en appliquant la question précédente :

$$u(z+1) + \frac{1}{2} = \left(\frac{i}{4z}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2u\left(\frac{-1}{4z}\right)) - \frac{1}{2} \left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}} (1 + 2u\left(\frac{-1}{z}\right))$$

$$u(z+1) + \frac{1}{2} = \left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(u\left(\frac{-1}{4z}\right) - u\left(\frac{-1}{z}\right)\right) = \left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 1} \left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right)$$

$$5.6) \forall n \geq 1 ; \forall z \in \mathbb{C} ; \left[\text{Im}(z) \geq 0 \implies |u_n(z)| \leq 1 \implies \left| \frac{u_n(z)}{i\pi n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \right].$$

Alors la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{u_n}{i\pi n^2}\right)$ converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \text{Im}(z) \geq 0\}$.

En plus : $\forall n \geq 1 ;$ l'application $[z \mapsto \frac{u_n(z)}{i\pi n^2}]$ est continue sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tq } \text{Im}(z) \geq 0\}$.

D'où $v(z) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{u_n(z)}{i\pi n^2}\right)$ définit une application continue sur cet ensemble.

5.7) D'après 4.3.3) : $\forall z \in \Omega$; $\left| F_{-\frac{1}{2}}(z) \right| \leq 2|z|^{\frac{3}{2}}$. alors :

$\forall z \in \Omega$; $\forall \alpha > 0$; $\forall n \geq 1$; $\frac{\alpha z}{\pi n^2} \in \Omega$ et donc : $\left| n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right) \right| \leq$

$$2n \left| \frac{\alpha z}{\pi n^2} \right|^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{n^2} (\alpha |z|)^{\frac{3}{2}}.$$

$\forall z \in \Omega$; $\forall \alpha > 0$; $\forall n \geq 1$; La série $\left(\sum_{n \geq 1} n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right) \right)$ converge

absolument, donc converge.

5.8) Pour tout $z \in \Omega$, on pose :

$$v_1(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{u_n(z)}{i\pi n^2} \quad \text{et} \quad w(z) = \frac{(i\pi)^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{n \geq 1} \left(n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right).$$

5.8.1) On reprend un raisonnement identique à celui de 5.3) pour établir que v_1 est holomorphe sur Ω .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad ; \quad v'_1(x + iy) = \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial x}(x, y) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{i\pi n^2} \frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x}(x, y) = \sum_{n \geq 1} \tilde{u}_n(x, y) = u(x + iy).$$

D'où : $\forall z \in \Omega$; $v'_1(z) = u(z)$, c'est à dire : $v'_1 = u$.

5.8.2) Vu ce qui est admis dans l'énoncé : pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$w'(z) = \frac{(i\pi)^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4}{\pi n} F'_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - \frac{2}{\pi n} F'_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right). \text{ Utilisons}$$

4.3.1) :

$$w'(z) = \frac{(i\pi)^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{4}{\pi n} \left(\frac{4z}{\pi n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \frac{2}{\pi n} \left(\frac{z}{\pi n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right) \right)$$

$$w'(z) = \frac{(i\pi)^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right) \right).$$

$$w'(z) = \left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n \geq 1} \left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right) \right) = u(1+z) + \frac{1}{2}.$$

(selon 5.5)

5.8.3) Posons : $\forall z \in \Omega$; $w_1(z) = v_1(z+1) - v(1)$. w_1 est holomorphe sur l'ouvert connexe

par arcs Ω , et $\forall z \in \Omega$; $w'_1(z) = v'_1(z+1) = u(z+1) = w'(z) - \frac{1}{2}$.

Alors l'application $[z \mapsto w_1(z) - w(z) + \frac{z}{2}]$ est constante sur Ω .

D'après 4.3.3) la série $\sum_{n \geq 1} \left(n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right)$ converge normalement pour $z \in \Omega$,

$|z| \leq 1$, on peut alors intervertir les signe $\sum_{n \geq 1}$ et $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Omega}}$, la constante cherchée est alors nulle !

D'où : $\forall z \in \Omega$; $w_1(z) - w(z) + \frac{z}{2} = 0$; c'est à dire :

$$\forall z \in \Omega ; v_1(z+1) - v(1) = -\frac{z}{2} + \frac{(i\pi)^{\frac{1}{2}}}{2} \sum_{n \geq 1} \left(n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2n F_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right)$$

5.9) D'après la question précédente, pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$\left| v(z+1) - v(1) + \frac{z}{2} \right| = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left| \sum_{n \geq 1} \left(nF_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right) \right|.$$

et selon 4.3.3), $\forall n \geq 1$; $\left| nF_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right) \right| \leq$

$$2n \left| \frac{4z}{\pi n^2} \right|^{\frac{3}{2}} + 4n \left| \frac{z}{\pi n^2} \right|^{\frac{3}{2}} = |z|^{\frac{3}{2}} \frac{\theta}{n^2}.$$

où θ est un réel strictement positif indépendant de z .

On pose alors : $c = \frac{\theta\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}^{*+}$. $\forall z \in \Omega$;

$$\left| v(z+1) - v(1) + \frac{z}{2} \right| \leq c |z|^{\frac{3}{2}}.$$

5.10) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, d'après la question précédente :

$\left| v(x+iy+1) - v(1) + \frac{x+iy}{2} \right| \leq c |x+iy|^{\frac{3}{2}}$. On applique 5.6), on fixe x , et on fait tendre y vers 0.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$; $\left| q(x+1) - q(1) + \frac{x}{2} \right| \leq c |x|^{\frac{3}{2}}$, d'où

$$\left(q(x+1) - q(1) + \frac{x}{2} \right) = o_{x \rightarrow 0} \left(|x|^{\frac{3}{2}} \right).$$

Finalement : $q(x+1) = q(1) - \frac{x}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

On déduit alors que q est dérivable en 1 et $q'(1) = -\frac{1}{2}$.



À la prochaine

Devoir Libre

28 Formule de Green-Rieman & Intégrale de Dirichlet

Blague du jour

On raconte qu'une secrétaire d'une société dont je tairais le nom avait insérer le cd dans son pc avec la pochette en plastique transparent.
Elle pensait que ça protégeait des virus ...



George Green (1793-1841)

Physicien britannique, auteur d'un Essai sur l'application de l'analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme en introduisant plusieurs concepts importants, parmi lesquels les fonctions potentielles. Sa particularité est qu'il était presque totalement autodidacte, il n'a passé qu'un an environ à l'école, entre 8 et 9 ans et a travaillé longtemps dans le moulin qu'il a hérité de son père.

Mathématicien du jour

Suite Il l'intégra l'université de Cambridge comme étudiant à l'âge de 40 ans. Il écrivit des publications dans le domaine de l'optique, de l'acoustique et de l'hydrodynamique. C'est surtout à Lord Kelvin, qui le fit connaître, qu'il doit sa renommée.

Énoncé : e3a 2009, PSI

Applications simples du cours.

Rappels.

Soit $I = [a, b]$ (avec $a < b$) un intervalle de $\mathbf{R}$ et U un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

On considère $V : (x, y) \in U \mapsto \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs et γ un arc orienté plan de paramétrage : $t \in I \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de classe C^1 par morceaux sur I , parcouru dans le sens

des t croissants.

On rappelle que la circulation de V le long de γ , notée $\int_{\gamma} V$ se calcule par la formule

$$\int_{\gamma} V = \int_{\gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$

On suppose P et Q de classe C^1 sur U . L'arc γ est supposé fermé, sans point double et parcouru dans le sens trigonométrique. Il délimite un domaine G d'un seul tenant, inclus dans U .

On rappelle la formule de **Green-Riemann** :

$$\int_{\gamma} V = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

1. Dans cette question seulement, on prend $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq x^2 \text{ et } y^2 \leq x\}$ et pour γ l'arc frontière délimitant ce domaine, parcouru dans le sens trigonométrique.

1.1. Représenter le domaine G et γ .

1.2. Calculer directement, en paramétrant l'arc : $\int_{\gamma} V$ avec
 $P : (x, y) \mapsto 2xy - x^2$ et $Q : (x, y) \mapsto x + y^2$

1.3. Retrouver le résultat précédent en utilisant la formule de Green-Riemann.

2. On suppose que les deux fonctions P et Q vérifient : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$.

2.1. Que vaut $\int_{\gamma} V$?

2.2. Donner un exemple de champ de vecteur V , non identiquement nul, et vérifiant la propriété :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$$

3.

3.1. Démontrer que les intégrales curvilignes suivantes :

$$A_1 = \int_{\gamma} x \, dy, A_2 = - \int_{\gamma} y \, dx \text{ et } A_3 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x \, dy - y \, dx)$$

sont égales. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

3.2. Représenter graphiquement l'arc orienté γ d'équations paramétriques

$$t \in [-\pi, \pi] \mapsto \begin{pmatrix} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{pmatrix}$$

dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.

On précisera les tangentes aux points singuliers.

- 3.3. Déterminer l'aire délimitée par la courbe γ .

Problème.

Préliminaires.

1. Illustrer graphiquement la double inégalité : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.

2. On veut montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ est convergente.

On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

- 2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.

- 2.2. Pour tout $x > 1$, on définit $\phi : x \mapsto \phi(x) = \int_1^x \varphi(t) \, dt$.

Montrer que l'on a : $\forall x > 1, \phi(x) = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} \, dt$.

- 2.3. Prouver que $\phi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

- 2.4. Dédurre de ces résultats que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \, dt$ est convergente.

Une première façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Soient

les deux fonctions :

$$P : (x, y) \mapsto P(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} [x \sin(x) - y \cos(x)]$$

$$Q : (x, y) \mapsto Q(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} [x \cos(x) + y \sin(x)]$$

et V le champ de vecteurs : $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$.

- Justifier le fait que P et Q sont deux fonctions de classe C^1 sur tout domaine U de $\mathbf{R}^2$ ne contenant pas l'origine.
- Soit γ un arc paramétré sans point double, n'entourant pas l'origine et parcouru dans le sens trigonométrique. Démontrer que $\int_{\gamma} V = 0$.
- On considère Γ l'arc de cercle de rayon $\rho > 0$ paramétré par $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \begin{pmatrix} x(\theta) = \rho \cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et on note A_{ρ} l'intégrale
$$A_{\rho} = \int_{\Gamma} (P(x, y) dx + Q(x, y) dy)$$
 - Montrer que $A_{\rho} = \int_0^{\pi/2} e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta)) d\theta$.
 - Calculer $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A_{\rho}$.
 - Montrer que $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} A_{\rho} = 0$. On pourra, par exemple, utiliser les préliminaires.
- Soient r et R deux réels tels que $0 < r < R$. On considère l'arc γ constitué par :

- γ_1 : le segment $[A_1, A_2]$ où $A_1 = (r, 0)$ et $A_2 = (R, 0)$,
 γ_2 : le quart de cercle de centre O et de rayon R reliant A_2 à $A_3 = (0, R)$,
 γ_3 : le segment $[A_3, A_4]$ où $A_4 = (0, r)$,
 γ_4 : le quart de cercle de centre O et de rayon r reliant A_4 à A_1 .

- Représenter graphiquement l'arc orienté γ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ direct.
- Montrer que $\int_{\gamma_1} V = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt$.
- Montrer que $\int_{\gamma_1} V dt = 0$.
- En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Une deuxième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

On

pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t) \sin(2nt)}{\sin(t)} dt$ et $v_n =$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2nt)}{t} dt.$$

1.

- Vérifier que u_n et v_n existent pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
 - En calculant $u_{n+1} - u_n$, montrer que u_n est indépendante de n et donner sa valeur.
- Soit h une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

On pose, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $H_m = \int_{\alpha}^{\beta} h(t) e^{imt} dt$.

Montrer, en utilisant une intégration par parties, que $\lim_{m \rightarrow +\infty} H_m = 0$.

Ce résultat est connu sous le nom de Lemme de Riemann-Lebesgue.

3. Montrer que la fonction $h : t \mapsto h(t) = \frac{1}{t} - \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ est prolongeable en une fonction de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4.

4.1. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.

4.2. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Une troisième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Soit $u \in$

$\mathbb{R}^{+*}$. On note $\Delta = [0, u] \times [0, u]$ et $J = \iint_{\Delta} \sin(x) e^{-xy} dx dy$.

1. Donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \sin(x) e^{-\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2. En utilisant l'intégrale J , montrer que

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x} (1 - e^{ux}) dx = \int_0^u \frac{1 - e^{yu} (\cos(u) + y \sin(u))}{1 + y^2} dy$$

3. On note alors $K_1 = \int_0^u e^{-xu} \frac{\sin(x)}{x} dx$ et $K_2 = \int_0^u \frac{y \sin(u) + \cos(u)}{1 + y^2} e^{-yu} dy$.

3.1. Prouver que $\lim_{u \rightarrow +\infty} K_1 = 0$.

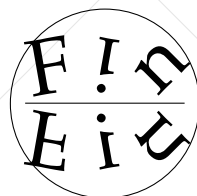
3.2. En utilisant une majoration, déterminer $\lim_{u \rightarrow +\infty} K_2$.

3.3. Retrouver alors la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

4.

4.1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ est convergente.

4.2. En utilisant ce qui précède, calculer la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

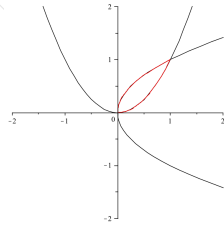


À la prochaine

❑ Corrigé : Pr. Devulder, CPGE France

Applications simples du cours.

- 1.1. G est l'intersection de "l'intérieur" de deux paraboles.



- 1.2. On peut paramétrer γ par

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} (t^2, -t) & \text{si } t \in [-1, 0] \\ (t, t^2) & \text{si } t \in]0, 1] \end{cases}$$

On en déduit que

$$\int_{\gamma} V = \int_{-1}^0 ((-2t^3 - t^4)2t + 2t^2(-1)) dt + \int_0^1 ((2t^3 - t^2) + (t - t^4)(2t)) dt = \frac{1}{30}$$

- 1.3. Si on utilise la formule de Green-Riemann, on obtient

$$\int_{\gamma} V = \iint_G (1 - 2x) dx dy$$

On a $G = \{(x, y) / x \in [0, 1], y \in [x^2, \sqrt{x}]\}$. Par théorème de Fubini (appliqué à une fonction continue sur un compact) on a donc

$$\int_{\gamma} V = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x) dy \right) dx = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{30}$$

- 2.1. D'après la formule de Green-Riemann, on $\int_{\gamma} V = 0$ dans le cas envisagé.

- 2.2. Soit $f : (x, y) \mapsto \cos(xy)$. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}^2$, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

En posant $P(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -y \sin(xy)$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x \sin(xy)$ on a donc la relation voulue.

- 3.1. En utilisant la formule de Green-Riemann on a

$$A_1 = \int_{\gamma} x dy = \iint dx dy$$

$$A_2 = - \int_{\gamma} y dx = \iint dx dy$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} (x dy - y dx) = \iint dx dy$$

et ces trois quantités sont égales à l'aire délimitée par γ .

- 3.2. Notons $M(t) = (x(t), y(t)) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$; on a $M(t + 2\pi) = M(t)$, $M(t + \pi) = \text{sym}_0(M(t))$, $M(-t) = \text{sym}_{(Ox)}(M(t))$.

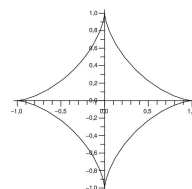
On peut donc faire une étude sur $[0, \pi/4]$ puis une symétrie par rapport à la première bissectrice (courbe sur $[0, \pi/2]$) puis une symétrie d'axe Ox (courbe sur $[-\pi/2, \pi/2]$) puis une symétrie par rapport à l'origine (courbe sur $[-\pi/2, 3\pi/2]$) et donc en entier puisqu'il y a 2π -périodicité). On a $\forall t \in [0, \pi/4]$, $x'(t) = -3 \sin(t) \cos^2(t) \leq 0$, $y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t) \geq 0$ et x décroît sur $[0, \pi/4]$ alors que y croît. Le seul point d'annulation commun est en 0 (point stationnaire). Comme

$$x(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2} + o_0(t^2)\right)^3 = 1 - \frac{3}{2}t^2 + o_0(t^2)$$

$$y(t) = (t + o_0(t))^3 = o_0(t^2)$$

la tangente en $M(0)$ est portée par $(x''(0), y''(0)) = (-3, 0)$ et est horizontale. D'après les symétries détectées, on a un point

de rebroussement de première espèce. On obtient la courbe suivante



3.3. On peut utiliser l'une des formules de 3.1 pour obtenir l'aire. Elle vaut

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (3 \cos^4(t) \sin^2(t) + 3 \sin^4(t) \cos^2(t)) dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2(t) \sin^2(t) dt$$

Avec la formule du sinus double,

$$\mathcal{A} = \frac{3}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \frac{3}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4t)) dt = \frac{3\pi}{8}$$

Problème.

Préliminaires.

1. La fonction $t \mapsto \sin(t)$ est concave sur $[0, \pi/2]$ (sa dérivée seconde, $-\sin$, est négative sur cet intervalle). Son graphe est donc situé au dessus de la corde $[(0,0), (\pi/2, 1)]$ et en dessous de la première bissectrice (tangente à l'origine). Ceci s'écrit

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$$

2.1. φ est continue sur $]0, 1]$ et de limite 1 en 0. Elle est donc prolongeable par continuité en 0 (avec $\varphi(0) = 1$).

2.2. Une intégration par parties (les fonctions étant $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$, celle-ci est licite) donne

$$\forall x \geq 1, \phi(x) = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

2.3. $\left| \frac{\cos(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$ est de limite nulle quand $x \rightarrow +\infty$. $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$

est continue sur $[1, +\infty[$ et dominée par $1/t^2$; elle est donc intégrable sur $[1, +\infty[$. A fortiori, sont intégrale entre 1 et x admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$. On peut donc écrire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

2.4. Pour tout $x > 0$, on a $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^1 \varphi + \phi(x)$ admet une limite quand $x \rightarrow +\infty$ et on peut écrire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt + \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Une première façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Par théorèmes généraux, P et Q sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et donc, en particulier, de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout domaine U (ouvert selon le programme) de $\mathbf{R}^2$ qui ne contient pas $(0,0)$.

2. Avec les hypothèses faites, on peut utiliser le théorème de Green-Riemann. Or, un calcul donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2 + y^2)^2} \left((-x^2 + y^2 + yx^2 + y^3) \cos(x) - (x^3 + xy^2 + 2xy^3) \sin(x) \right) \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\int_\gamma V = 0$$

3.1. On a

$$P(x(\theta), y(\theta)) = \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho} (\sin(x(\theta)) \cos(\theta) - \cos(x(\theta)) \sin(\theta))$$

$$P(x(\theta), y(\theta)) = \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho} (\cos(x(\theta)) \cos(\theta) + \sin(x(\theta)) \sin(\theta))$$

On multiplie la première quantité par $-\rho \sin(\theta)$ et la seconde par $\rho \cos(\theta)$ pour obtenir

$$A_\rho = \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-y(\theta)}}{\rho} \cos(x(\theta)) d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta)) d\theta$$

3.2. On veut utiliser le théorème de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall \rho \in \mathbf{R}^+, \theta \mapsto e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))$ est continue sur $[0, \pi/2]$.
- $\forall \theta \in [0, \pi/2], \rho \mapsto e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))$ est continue sur $\mathbf{R}^+$.
- $\forall \rho \geq 0, \forall \theta \in [0, \pi/2], |e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))| \leq 1$. Le majorant est une fonction intégrable sur $[0, \pi/2]$ (continue sur ce segment).

Le théorème s'applique et indique que $\rho \mapsto A_\rho$ est continue sur $\mathbf{R}^+$. En particulier,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} A_\rho = A_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

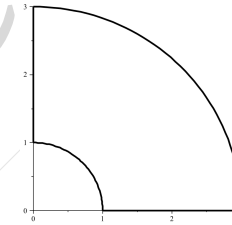
3.3. En utilisant la première question des préliminaires, on a

$$\forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], |e^{-\rho \sin(\theta)} \cos(\rho \cos(\theta))| \leq e^{-\rho \sin(\theta)} \leq e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta}$$

On en déduit que

$$|A_\rho| \leq \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta} d\theta = -\frac{\pi}{2\rho} \left[e^{-\frac{2\rho}{\pi}\theta} \right]_0^{\pi/2} \leq \frac{\pi}{2\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0$$

4.1. Le dessin est fait ici avec $r = 1$ et $R = 3$.



4.2. γ_1 est paramétré par $t \in [r, R] \mapsto (t, 0)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_1} V = \int_r^R P(t, 0) dt = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt$$

4.3. γ_3 est paramétré par $t \in [-R, -r] \mapsto (0, -t)$ et ainsi

$$\int_{\gamma_3} V = - \int_{-R}^{-r} Q(0, -t) dt = 0$$

4.4. D'après la question 2, $\int_{\Gamma} V = 0$. Par ailleurs (en prenant garde au fait que γ_4 est parcouru dans le sens horaire)

$$\int_{\gamma_2} V = A_R \text{ et } \int_{\gamma_4} V = -A_r$$

Avec les deux questions précédentes, on a donc

$$0 = \int_r^R \frac{\sin(t)}{t} dt + A_R - A_r$$

Il reste à faire tendre r vers 0^+ et R vers $+\infty$ (on a vu l'existence des limites) pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Une deuxième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1.1. $f_n : t \mapsto \frac{\cos(t) \sin(2nt)}{\sin(t)}$ et $g_n : t \mapsto \frac{\sin(2nt)}{t}$ sont continues sur $]0, \pi/2]$ et prolongeables par continuité en 0 (par $f_n(0) = 2n$ et $g_n(0) = 2n$). Ce sont donc des fonctions intégrables sur le segment $[0, \pi/2]$ et u_n et v_n existent a fortiori.

1.2. La formule $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$ indique que

$$u_{n+1} - u_n = 2 \int_0^{\pi/2} \cos((2n+1)t) \cos(t) dt$$

La formule $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$ indique alors que

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^{\pi/2} (\cos((2n+2)t) + \cos(2nt)) dt$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} - u_n = 0$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc constante et

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = u_1 = \int_0^{\pi/2} 2 \cos^2(t) dt = \frac{\pi}{2}$$

2. Une intégration par parties donne

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, H_m = \left[h(t) \frac{e^{imt}}{im} \right]_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{im} \int_{\alpha}^{\beta} h'(t) e^{imt} dt$$

Ainsi, on a

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, |H_m| \leq \frac{|h(\alpha) + h(\beta)|}{m} + \frac{|\beta - \alpha|}{m} \|h'\|_{\infty, [\alpha, \beta]}$$

ceci étant licite car h' est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$. On a

alors immédiatement

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} H_m = 0$$

3. h est une fonction continue sur $[0, \pi/2]$ et

$$h(t) = \frac{\sin(t) - t \cos(t)}{t \sin(t)} = \frac{(t + o(t^2)) - (t + o(t^2))}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)}$$

On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$$

et h est prolongable par continuité en posant $h(0) = 0$. On a alors une fonction continue sur $[0, 1]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ avec

$$\forall t > 0, h'(t) = \frac{t^2 - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)} = \frac{(t - \sin(t))(t + \sin(t))}{t^2 \sin^2(t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{(t^3/6)(2t)}{t^4} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Par un corollaire des accroissements finis, on en déduit que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ avec $h'(0) = 1/3$.

4.1. On remarque que $v_n - u_n = \int_0^{\pi/2} h(t) \sin(2nt) dt$. D'après le lemme de Riemann-Lebesgue (en passant la partie imaginaire) on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

4.2. Le changement de variable $x = 2nt$ donne

$$v_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ (on a existence des différentes quantités avec ce qui précède) on en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi}{2}$$

Une troisième façon de calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Un simple calcul de dérivée montre que

$$x \mapsto -\frac{e^{-\alpha x}}{1 + \alpha^2}(\cos(x) + \alpha \sin(x))$$

est une primitive sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto \sin(x)e^{-\alpha x}$.

2. Avec le théorème de Fubini (sur un pavé et utilisé avec une fonction de classe $\mathcal{C}^1$) on a

$$J = \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)e^{-xy} dy \right) dx = \int_0^u \left[-\frac{\sin(x)}{x} e^{-xy} \right]_{y=0}^{y=u} dx = \int_0^u \frac{\sin(x)}{x} (1 - e^{ux}) dx$$

mais aussi

$$J = \int_0^u \left(\int_0^u \sin(x)e^{-xy} dx \right) dy = \int_0^u \left[-\frac{e^{-yx}}{1 + y^2}(\cos(x) + y \sin(x)) \right]_{x=0}^{x=u} dy = \int_0^u \frac{1 - e^{yu}(\cos(u) + y \sin(u))}{1 + y^2} dy$$

L'égalité demandée s'en déduit.

- 3.1. Comme $|\sin(x)/x| \leq 1$, on a

$$K_1 \leq \int_0^u e^{-xu} dx = \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

- 3.2. On a aussi

$$|K_2| \leq \int_0^u \frac{1+y}{1+y^2} e^{-yu} dy$$

$\frac{1+y}{1+y^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^+$ et de limite nulle en $+\infty$. C'est

donc une fonction bornée sur $\mathbf{R}^+$. Soit M un majorant de son module.

$$|K_2| \leq M \int_0^u e^{-yu} dy = M \frac{1 - e^{-u^2}}{u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$$

- 3.3. La question 2 donne

$$\int_0^u \frac{\sin(x)}{x} dx = K_1(u) + \int_0^u \frac{dy}{1+y^2} - K_2(u)$$

En faisant tendre u vers $+\infty$ ($\int_0^u \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(u)$) on a alors e^{ux}

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

4.1. $x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ est continue sur $\mathbf{R}^{+*}$, prolongeable par continuité en 0 (par la valeur 1) et dominée par $1/x^2$ (donc intégrable au voisinage de $+\infty$). C'est donc une fonction intégrable sur $\mathbf{R}^+$ et son intégrale sur $\mathbf{R}^+$ existe a fortiori.

- 4.2. Par un calcul similaire à celui de la question 2.2 des préliminaires, on a (en primitivant $\sin$ en $1 - \cos$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx$$

En posant $t = x/2$, on en déduit que

$$\frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2t)}{4t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$



À la prochaine

