Ma Prépa Math Spé

Résumés de cours: MP-PSI-TSI

My Ismail Mamouni

Professeur Docteur-Agrégé
CPGE My Youssef, Rabat,
myismail.chez.com
mamouni.myismail@gmail.com

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

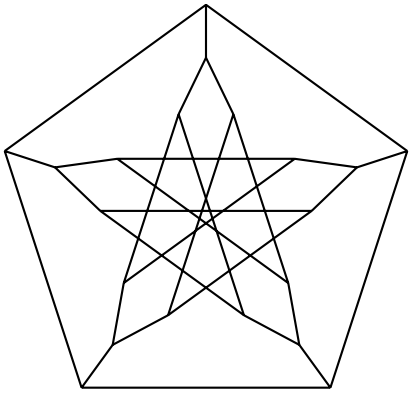
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم

وَرَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Présentation

Ce travail est un travail individuel qui répond à un besoin incessant pressenti auprès des élèves des CPGE. Ce travail se situe entre cours détaillé et fiches de cours résumés, il comporte des résumés de cours contenant tous les définitions, propriétés, théorèmes, remarques, ... Disons c'est un cours complet, mais sans démonstrations. Ce travail pourra aussi servir à un professeur débutant, cherchant un plan de cours.



Remerciements

L'auteur tient à adresser ses vifs remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, notamment les élèves des différents CPGE du Maroc par leurs questions, messages, ... Aux collègues par leurs, corrections, propositions, parfois source latex (Prs. Boujaida, Chaira, Ratbi et Delaunay), ...et à toute autre personne, qui par des actes simples et spontanés a donné du souffle à ce travail.
L'auteur ne saurait pas comment remercier Pr. Boujaida Sadik des CPGE My Youssef pour son initiation au package Tikz de Latex. L'artiste, comme on l'aime surnommer, était toujours disponible à apporter des idées de conception, tous les codes sources tikz (à 90%) utilisés ici sont des copier-coller des ses propres idées.
Enfin, tout ce que je pourrai dire ne pourrai pas remercier assez ma femme, Ouichou Lamya. En supportant de lourdes tâches quotidiennes, elle m'a épargné pour que je me consacre à ce travail entre autres. Comment aussi oublier mes deux enfants, Wassim et Naim; les courts moments de bonheur et de joie qu'on passe ensemble sont toujours assez suffisants pour me donner du plaisir, courage et forces à travailler encore plus.

Sommaire

1 Algèbre linéaire (révision programme sup) Page 1
2 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ Page 27
3 Réduction des endomorphismes Page 33
4 Espaces vectoriels normés Page 38
5 Calcul différentiel Page 51
6 Dualité Page 64
7 Coniques-Quadriques Page 74
8 Espaces vectoriels euclidiens Page 84
9 Intégration vectorielle Page 97
10 Séries dans un Banach Page 107
11 Suites et séries de fonctions Page 119
12 Séries entières et fonctions holomorphes Page 132
13 Intégrale dépendant d'un paramètre Page 138
14 Séries de Fourier Page 142
15 Équations différentielles Page 150
16 Courbes et surfaces Page 161
17 Intégrales multiples Page 169
18 Formes différentielles Page 173

Mamouni My Ismail

Algèbre Linéaire

Chapitre 1

Blague du jour

Une femme arrive et voit son mari avec une tapette mouche...
- Que fais-tu ?
- Je chasse les mouches... - En as-tu tué?
- Oui, 3 mâles, 2 femelles
Intriguée, elle lui demande:
- Comment fais-tu la différence entre les femelles et les mâles ?
- 3 étaient sur la cafetière et 2 sur le téléphone.

Al-Khawarizmi (783-850)

Mathématicien du jour

Mathématicien, géographe, astrologue et astronome musulman arabophone d'origine Ouzbékistan, plus précisément de la ville khiva, appel jadis Khwarezm.
Il est à l'origine des mots algorithme (qui n'est autre que son nom latin) et algèbre (issu d'une méthode et du titre d'un de ces ouvrages) ou encore de l'utilisation des chiffres arabes et de l'habitude de désigner l'inconnue par la lettre $\mathbf{x}$ dans une équation.
Son apport en mathématiques fut tel qu'il est également surnommé le père de l'algèbre , avec Diophante dont il reprendra les travaux. En effet, il fut le premier à répertorier de façon systématique des méthodes de résolution d'équations en classant celles-ci.

Dans tout le résumé de cours $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1 Structures d'espaces vectoriels.

1.1 Structures.

Définition 1

On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$-ev s'il est muni d'une LCI $+$ et d'une LCE . coefficients dans $\mathbb{K}$, vérifiant les axiomes suivants:

- $(E,+)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera not dorénavant par 0_E.
- $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x, \quad \forall x \in E, \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.
- $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y, \quad \forall(x,y) \in E^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
- $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x, \quad \forall x \in E, \quad \forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2$.
- $1.x = x, \quad \forall x \in E$.

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , une partie F de E est dite sous-espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- $0_E \in F$.
- $\forall(x,y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a: $x + \lambda y \in F$.

Autrement dit F est une partie de E stable pour les deux lois $+$ et . et qui hérite de E sa structure d'espace vectoriel .

Remarque 1

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel , il est plus judicieux de remarquer qu'il est inclut dans un espace vectoriel , puis montrer que c'en est un sous-espace vectoriel .

Définition 3

On appelle algèbre sur $\mathbb{K}$, tout ensemble A muni de deux lois de composition interne $+, \times$ et d'une loi de composition externe ,., telle que:

1. $(A,+,.)$ soit un $\mathbb{K}$-ev
2. $(A,+,\times)$ soit un anneau, dont l'élément neutre pour la 2ème loi est not 1_A.
3. $\forall(x,y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a: $\lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$

Définition 4

Soit A une algèbre, une partie B de A est dite sous-algèbre de A si elle vérifie les propriétés suivantes:

- $1_A \in B$.

- $\forall (x,y) \in B^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a: $x + \lambda y \in B$ et $x \times y \in B$.

Autrement dit B est une partie de A stable pour les deux lois internes et celle externe, et qui hérite de A sa structure d'algèbre.

1.2 Familles particulières.

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$-ev , $x \in E, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que x est une combinaison linéaires de x_k si

$$\exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n}) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Définition 6

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est un sous-espace vectoriel de E, s'appelle le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ et se note $\text{Vect}\left((x_k)_{1\leq k\leq n}\right)$. Autrement dit

$$x \in \text{Vect}\left((x_k)_{1\leq k\leq n}\right) \Longleftrightarrow \exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n}) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Proposition 1

- Soit $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E, alors $\text{Vect}(\mathcal{B})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $\mathcal{B}$.
- Par convention on écrit, $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Définition 7

Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrices de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrices de E, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Définition 8

Une famille est dite lie lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Proposition 2

1. Toute famille contenant un élément nul est liée.
2. Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
3. Tout famille contenant une famille lie est aussi liée.
4. L'image par une application linéaire d'une famille lie est aussi liée.

Définition 9

Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres.

Théorème 1

Une famille $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Et on peut surtout en conclure que si deux combinaisons linéaires d'une famille libre sont gales alors leurs coefficients sont égaux.

Proposition 3

1. Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.
2. Une famille formée par deux éléments est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.
3. Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.

Définition 10

On appelle base toute famille la fois libre et génératrices.

Théorème 2

Soit $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E et $x \in E$, alors

$$\exists ! (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ s'appellent coordonnes de x dans la base $\mathcal{B}$.

1.3 Notion de dimension.

Proposition 4

- Soit $\mathcal{B}$ une famille d'éléments de E, alors $\text{Vect}(\mathcal{B})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $\mathcal{B}$.
- Par convention on écrit, $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Définition 11

Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrices de E si et seulement si tout élément de E s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrices de E, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.

Définition 12

Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

Proposition 5

1. Toute famille contenant un élément nul est liée.
2. Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
3. Tout famille contenant une famille liée est aussi liée.
4. L'image par une application linéaire d'une famille lie est aussi liée.

Définition 13

Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres.

Théorème 3

Une famille $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre si et seulement si

$$\forall (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n, \ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0.$$

Et on peut surtout en conclure que si deux combinaisons linéaires d'une famille libre sont gales alors leurs coefficients sont gaux.

Proposition 6

1. Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.
2. Une famille formée par deux éléments est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.
3. Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.

Définition 14

On appelle base toute famille la fois libre et génératrices.

Théorème 4

Soit $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ une base de E et $x \in E$, alors

$$\exists!(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ s'appellent coordonnes de x dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 15

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrices finie.

Théorème 5

Théorème de la base incomplète
Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée par des éléments de n'importe quelle famille génératrices finie pour avoir une base.

2 Polynômes.

2.1 Degré d'un polynôme.

Définition 16

Soit P un polynôme non nul, de coefficients a_k, on appelle degré de P, le plus grand indice de ses coefficients non nuls, et on le note deg$P$.
Ce coefficient non nul d'indice maximal, s'appelle le coefficient dominant de P et se note co(P).
Par convention deg$0 = -\infty$.

L'ensemble des polynômes coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$, celui des polynômes de degré inférieur n, se note $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 2

- $\deg P = n \iff P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ avec $a_n \neq 0$.
- $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \iff \deg P \leq n$.

Proposition 7

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a les propriétés suivantes:

- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, avec égalité dans le cas o $\deg P \neq \deg Q$ ou bien $\deg P = \deg Q$ mais $\deg P + \deg \neq 0$.
- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$

2.2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 17

Soit A, B deux polynômes non nuls.

- On dit que B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ si $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.
- On dit que A et B sont associés si $\exists \lambda \neq 0$ tel que $P = \lambda Q$.
- Un polynôme est dit irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ quand ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les constantes et ses polynômes associés.

Proposition 8

Deux polynômes P et Q sont associés si et seulement si P divise Q avec $\deg P = \deg Q$. En particulier tout polynôme de degré 1 est irréductible.

Théorème 6

$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B \neq 0 \quad \exists ! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\quad A = BQ + R$ avec $\deg R < \deg Q$. Q s'appelle le quotient de la division euclidienne de A par B et R son reste.

Remarque 3

B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Algorithme d'Euclide.
Soit A, B deux polynôme non nuls, on effectue les divisions euclidiennes successives des quotients par leurs restes, jusqu' arriver un reste nul, alors le dernier reste non nul est un diviseur commun de A et B de degré minimal, ce reste un fois normalisé, s'appelle le PGCD de A et B et se note $A \wedge B$.

Définition 18

Deux polynômes sont dits premiers entre eux si et seulement si leur PGCD est gal 1.

Proposition 9

Soient P et Q deux polynômes non nuls, et D leurs PGCD, alors

$$P = DP', Q = DQ' \text{ avec } Q \wedge Q' = 1$$

Théorème 7

Théorème de Bézout.
Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$A \wedge B = 1 \iff \exists (A, B) \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } AU + BV = 1$$

Théorème 8

Théorème de Gauss.
Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]$ tel que A divise BC et $A \wedge B = 1$ alors A divise C.

Corollaire 1

- $A \wedge B = A \wedge C = 1 \Longrightarrow A \wedge BC = 1$.
- $A \wedge B = 1 \iff A \wedge B^{\beta} = 1 \iff A^{\alpha} \wedge B^{\beta} = 1$.
- Si A et B divisent C et sont premiers entre eux, alors AB divise C.

2.3 Racines d'un polynôme.

Définition 19

A chaque polynôme $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$, on associé la fonction réelle:

$$\begin{aligned} \widehat{P}(x) : \mathbb{K} &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_n x^n + \ldots + a_0 \end{aligned}$$

appelle fonction polynomiale de P et on dit que $\alpha \in K$ est une racine de P si et seulement si $\widehat{P}(\alpha) = 0$, dans la suite on notera $P(\alpha) = 0$ au lieu de $\widehat{P}(\alpha)$.

Théorème 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in K$, alors α est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.

Théorème 10

Théorème de D'Alembert
Tout polynôme, non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 2

- Un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ de degré ≥ 2 n'admet jamais de racine dans $\mathbb{K}$.
- Un polynôme, non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au maximum n racines.
- Tout polynôme qui admet un nombre de racines supérieur strictement son degré est nul, en particulier tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

Théorème 11

Tout polynôme, non constant admet au moins un facteur (diviseur) irréductible.

Théorème 12

Tout polynôme, non constant, P se décompose de façon unique en facteurs irréductibles sous la forme

$$P = \lambda P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et P_i des polynômes irréductibles unitaires.

Corollaire 3

- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1.
  En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{C}[X]$ est de la forme

  $$P(X) = \lambda(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_r)^{\alpha_r}$$

  o les z_i sont les racines de P.
- Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 ou ceux de degré 2 discriminant strictement négatif.
  En particulier la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ est de la forme

  $$P(X) = \prod_{i=1}^{r} \lambda(X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{p} (X^2 - 2\mathfrak{Re}(z_i) + |z_i|^2)^{\beta_i}$$

  o les x_i sont les racines réelles de P et z_i ceux complexes non réelles.
  Il faut noter que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}/\mathbb{R}$ racine de P, alors $\overline{z}$ aussi racine de P.

2.4 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$.

Définition 20

Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0$, on appelle polynôme dérivé de P, le polynôme not P' défini par $P'(X) = na_n X^{n-1} + \ldots + a_1$.

Proposition 10

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P' = n-1$ et $co(P') = n co(P)$. En particulier la dérivée d'un polynôme est nul si et seulement si il est constant.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a: $(P+\lambda Q)' = P' + \lambda Q'$, en conséquence l'application: $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-1}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P'(X) \end{array}$ est linéaire.

Définition 21

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on définit par récurrence la drive k–me de P l'aide de la formule $P^{(k)} = (P^{(k-1)})' = (P')^{(k-1)}$.
Et on convient d'crire $P^{(0)} = P$.

Proposition 11

- Si $\deg P = n$, alors $\deg P^{(k)} = n - k$ et $co P^{(k)} = A_n^k co P$, avec la convention $\mathcal{A}_n^k = 0$ si $k > n$.
  En particulier la drive k–me d'un polynôme est nul si et seulement si ce polynôme est de degré inférieur $k-1$.
- Si $\deg = n$ alors $P^{(n)} = n! co P$.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a: $(P+\lambda Q)^{(k)} = P^{(k)} + \lambda Q^{(k)}$, en conséquence l'application: $\begin{array}{ccc} K_n[X] & \longrightarrow & K_{n-k}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P^{(k)}(X) \end{array}$ est linéaire.
- $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ on a:

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k P^{(k)} Q^{(n-k)} \text{ Formule de Leibniz}$$

Définition 22

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on dit qu'une racine $a \in \mathbb{K}$ de P est de multiplicité $n \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $P(a) = \ldots P^{(n-1)}(a) = 0$ mais $P^{(n)}(a) \neq 0$. Et convient de dire que a est multiplicité nulle dans P lorsqu'elle n'est pas une racine de P.

Théorème 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \forall a \in \mathbb{K}$ on a: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$.

Théorème 14

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- a est une racine de P de multiplicité n
- $(X-a)^n$ divise P, $(X-a)^{n+1}$ ne divise pas P.
- $\exists Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X-a)^n$ avec $Q(a) \neq 0$.

2.5 polynômes scindés.

Définition 23

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}$ si et seulement si toutes ses racines sont dans $\mathbb{K}$.

Remarque 4

- Tout polynôme non constant est scindé dans $\mathbb{C}$.
- Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes ses racines sont réelles.

Théorème 15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé dans $\mathbb{K}$, alors

$$P(X) = co(P)\prod_{k=1}^{n}(X-z_k)^{\alpha_k}$$

où z_k sont les racines de P et α_k leurs multiplicités respectives.

En particulier $\deg P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$.

Formules de Vite-Newton entre racines et coefficients d'un polynôme scindé:
Soit $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0$ un polynôme scindé de degré n, et $z_1, \ldots, z_n$ ses racines distincts ou non,

on a les formules suivantes:

$$\sum_{k=0}^{n} z_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$
$$\sum \prod_{i<j} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$\sum \prod_{i_1<\ldots<i_k} z_{i_1} \ldots z_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$
$$\prod_{k=1}^{n} z_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

3 Applications linéaires.

3.1 généralités.

Définition 24

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$, on dira que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a: } u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations:

- L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.
- Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrive est inclut dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclut dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition 12

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes:

- Si $\mathcal{B} = \left((x_k)_{1\leq k\leq n}\right)$ famille de vecteurs de E, et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors:

$$u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k) \text{ en particulier } u\left(\text{Vect}(\mathcal{B})\right) = \text{Vect}\left(u(\mathcal{B})\right).$$

- Deux applications linéaires gales sur une famille génératrices sont gales sur l'espace vectoriel tout entier.
- Une application linéaire est nulle si et seulement si elle est nulle sur la base.
- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur la base.
- Si $\mathcal{B}$ famille génératrices de E, alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrices de Im u.
  En particulier si u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrices de F.
- Si $\mathcal{B}$ est libre dans E et u injective, alors $u(\mathcal{B})$ est libre dans F.
- Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F.

Proposition 13

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes:

- $u(0_E) = 0_F$.
- L'image directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel .
- $\ker u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de E, on l'appelle noyau de u.
- u est injective si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.
- Im $u = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, on l'appelle image de u.
- u est surjective si et seulement si Im $u = F$.

Proposition 14

Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes:

- $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.
- La compose de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.
- La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un groupe, on l'appelle le groupe linéaire de E.

3.2 Applications linéaires en dimension finie.

Théorème 16

- Tout $\mathbb{K}$-ev de dimension $\mathbf{n}$ est isomorphe $\mathbb{K}^{\mathbf{n}}$.
- Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphe si et seulement si ils sont de même dimension.

Théorème 17

Soient $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies, alors $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})$ est de dimension finie avec

$$\dim_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbb{K}}(\mathbf{E},\mathbf{F})) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{E}).\dim_{\mathbb{K}}(\mathbf{F})$$

3.3 Rang d'une application linéaire

Définition 25

Le rang d'une application linéaire, $\mathbf{u}$, noté $\mathrm{rg}(\mathbf{u})$ est défini par la relation suivante:

$$\mathrm{rg}(\mathbf{u}) = \dim \mathrm{Im}\ \mathbf{u}.$$

Théorème 18

Formule du rang
Soit $\mathbf{u} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ linéaire avec $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, on a le résultat suivant:

$$\dim \mathbf{E} = \dim \ker \mathbf{u} + \dim \mathrm{Im}\ \mathbf{u}$$

Corollaire 4

Soit $\mathbf{u} : \mathbf{E} \to \mathbf{F}$ linéaire, on a les propriétés suivantes:

- $\mathbf{u}$ est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathbf{u}) = \dim \mathbf{E}$.
- $\mathbf{u}$ est surjective $\mathrm{rg}(\mathbf{u}) = \dim \mathbf{F}$.
- $\mathbf{u}$ est bijective $\mathrm{rg}(\mathbf{u}) = \dim \mathbf{E} = \dim \mathbf{F}$.

Corollaire 5

Le rang est invariant par composition gauche ou a droite par un isomorphisme. Autrement dit si u est linéaire et v isomorphisme alors: $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$ et $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u)$.

Corollaire 6

Soit $u : E \to F$ linéaire o E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et égales, on a les équivalences suivantes:

u isomorphisme $\iff u$ injective
$\iff u$ injective

Corollaire 7

Un endomorphisme sur un espace vectoriel de dimension fini est bijectif si et seulement si il est injectif.

4 Somme d'espaces vectoriels.

4.1 généralités.

Définition 26

Soit E un espace vectoriel , F et G deux sous-espace vectoriel de E.

- On appelle somme de F et G le sous-espace vectoriel de E not $F + G$ définie par la relation suivante
$$x \in F + G \iff \exists x_1 \in F,\ \exists x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$
- Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est directe et on la note par $F \oplus G$.
- Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espace vectoriel F et G sont supplémentaires dans E, et dans ce cas
$$\forall x \in E,\ \exists! x_1 \in F \text{ et } \exists! x_2 \in G \text{ tel que } x = x_1 + x_2.$$

Remarque 5

Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $\mathcal{B}_1 \subset F, \mathcal{B}_2 \subset G$, alors:

- $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) + \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.
- Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) \oplus \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

Théorème 19

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors:

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

Corollaire 8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espace vectoriel de E supplémentaires alors: $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Corollaire 9

Soit F et G deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev , E, de dimension finie alors:

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$$

4.2 Projection et projecteur.

Définition 27

Si $E = F \oplus G$, on rappelle que $\forall x \in E,\ \exists x_1 \in F$ et $\exists x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

- x_1 s'appelle la projection de x sur F parallèlement G et se note $p_{F//G}(x)$.
- x_2 s'appelle la projection de x sur G parallèlement F et se note $p_{G//F}(x)$.

Proposition 15

Avec les notations précédentes l'application: $p = p_{F//G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x_1 = p_{F//G}(x) \end{array}$ est linéaire

et vérifie les propriétés suivantes:

1. $p^2 = p$.
2. $\operatorname{Im} p = F,\ \ker p = G$ en particulier
$$E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p.$$

Définition 28

On appelle projecteur sur E, tout endomorphisme, p de E tel que

$$p^2 = p.$$

Proposition 16

Soit $\mathbf{p}$ un projecteur de $\mathbf{E}$, on a les propriétés suivantes:

1. $\mathbf{E} = \operatorname{Im}\mathbf{p} \oplus \ker\mathbf{p}$.
2. $\mathbf{x} \in \operatorname{Im}\mathbf{p} \iff \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
3. $\mathbf{p}$ est la projection sur son image parallèlement son noyau.

Conclusion. Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image parallèlement son noyau.

4.3 Symétries.

Définition 29

On appelle symétrie sur $\mathbf{E}$, tout endomorphisme, $\mathbf{s}$ de $\mathbf{E}$ tel que : $\mathbf{s}^2 = \mathbf{id}_{\mathbf{E}}$.

Proposition 17

Soit $\mathbf{s}$ une symétrie de $\mathbf{E}$, on a les propriétés suivantes:

1. $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{id}_{\mathbf{E}})$ est un projecteur.
2. En posant $\mathbf{F} = \operatorname{Im}\mathbf{p}$ et $\mathbf{G} = \ker\mathbf{p}$, on a $\mathbf{E} = \mathbf{F} \oplus \mathbf{G}$ avec $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{x} & \forall \mathbf{x} \in \mathbf{F} \\ -\mathbf{x} & \forall \mathbf{x} \in \mathbf{G} \end{cases}$.
   On dit alors que $\mathbf{s}$ est la symétrie par rapport $\mathbf{F}$ parallèlement $\mathbf{G}$.
3. Inversement tout projecteur $\mathbf{p}$ permet de définir la symétrie $\mathbf{s} = 2\mathbf{p} - \mathbf{id}_{\mathbf{E}}$ sur $\operatorname{Im}\mathbf{p}$ parallèlement $\ker\mathbf{p}$.

5 Matrices.

5.1 généralités.

a Trace d'une matrice carrée.

Définition 30

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A, le nombre note $\mathrm{tr}(A)$, défini par la relation suivante:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Proposition 18

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes:

- $\mathrm{tr}(A + \lambda B) = \mathrm{tr}(A) + \lambda \mathrm{tr}(B)$.
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
- $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.

b Transposée d'une matrice.

Définition 31

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposé de A, la matrice note ${}^tA$, définie par la relation suivante:

$${}^tA = (a_{j,i})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Proposition 19

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$ et P inversible, on a les propriétés suivantes:

- ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda {}^tB$.
- ${}^t(AB) = {}^tB.{}^tA$.
- ${}^tP$ est inversible, avec $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.

5.2 Matrices en tant qu'applications linéaires.

Remarque 6

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} M: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & MX \end{array}$$

est linéaire. Ainsi toute matrice peut être étudiée comme application linéaire, avec:

1. $X \in \ker M \iff X \in \mathbb{K}^p$ et $MX = 0$.
2. $Y \in \text{Im } M \iff Y \in \mathbb{K}^n$ et $\exists X \in \mathbb{K}^p$ tel que $Y = MX$.
   En particulier $\text{rg}(M) = \dim \text{Im } M = \text{rg}(\text{colonnes de } M)$.
3. $\text{rg}(M) + \dim \ker M = p$ =nombre de colonnes de M.

Proposition 20

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors: M est inversible $\iff \ker M = \{0\}$
$\iff \text{rg}(M) = n$

Théorème 20

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.

5.3 Matrice d'une application linéaire.

Définition 32

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel tels que $\dim E = n$ et $\dim F = p$. Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de F et $u : E \to F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice note

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

dont la j-ème colonne est forme par les coordonnes de $u(e'_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ \vdots \\ e'_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & \dots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Dans le cas où $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.

Proposition 21

Soient E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1 = (e_i), \mathcal{B}_2 = (e'_j)$ et $E \xrightarrow{u} F$ une application linéaire. On a les propriétés suivantes:

- Si $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ alors

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} e'_i$$

- Soit $x \in E$, et X la matrice colonne forme par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et Y celle forme par les coordonnés de $y = u(x)$ dans $\mathcal{B}_2$ alors l'équation linéaire $y = u(x)$ s'écrit sous la forme matricielle

$$Y = MX.$$

Proposition 22

Avec les notations de la proposition suivante, on a les propriétés suivantes

- Si $u, v : E \longrightarrow F$ est linéaire et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u + \lambda v) = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) + \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(v).$$

- $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = 0$ si et seulement si $u = 0$.
  En particulier deux applications linéaires sont gales si et seulement si leurs matrices associes dans les mêmes bases sont égales.
- Ainsi on définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M} : & \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) \end{array}$$

- Si E, F, G des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3$ et $E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$ applications linéaires alors:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_3}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_3}(v).\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$$

- Si E, F des espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $E \xrightarrow{u} F$ application linéaire alors: $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}(u^{-1})$$

5.4 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 33

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une famille de p vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice n lignes et p colonnes note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ dont les colonnes sont formes par les coordonnés des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Proposition 23

Avec les notations de la définition précédente on a:

$$\mathrm{rg}\left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\right) = \mathrm{rg}(\mathcal{C})$$

En particulier $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

5.5 Matrice de passage entre deux bases

Définition 34

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la la matrice carre d'ordre n note $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ définie par:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)$$

Proposition 24

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E de dimension n. Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$, on a les résultats suivants:

- $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E)$
- Soit $x \in E$, $X_1 = [x]_{\mathcal{B}_1}$ la matrice colonne forme par les coordonnés de x dans $\mathcal{B}_1$ et $X_2 = [x]_{\mathcal{B}_2}$ celle forme par ses coordonnés dans $\mathcal{B}_2$ alors:
$$X_1 = PX_2$$

Théorème 21

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel . $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E et $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F. Soit $u : E \to F$ linéaire. Posons $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(u)$, $N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(u)$ et $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_2 \to \mathcal{B}'_1}$, $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ on a les résultats suivants:

- $M = P.N.Q$
- Si u est un endomorphisme de E et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u), N = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u), P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ alors
$$M = P^{-1}.N.P$$

Corollaire 10

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

6 déterminants.

6.1 Formes n-linéaires.

a Formes bilinéaires.

Définition 35

On appelle forme bilinéaire sur E, toute application $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y) \end{array}$ linéaire par rapport l'une des variables fixant l'autre, autrement dit:

$$\varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda\varphi(x_2, y)$$
$$\varphi(x, y_1 + \lambda y_2) = \varphi(x, y_1) + \lambda\varphi(x, y_2)$$

Proposition 25

Soit φ une forme bilinéaire sur E, $(x,y) \in E^2$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, on a les résultats suivants:

- $\varphi(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu\varphi(x,y)$.
- $\varphi(x,y) = 0$ si $x = 0_E$ ou $y = 0_E$.

Définition 36

Soit φ une forme bilinéaire sur E, on dit que:

- φ est symétrique si et seulement si $\varphi(x,y) = \varphi(y,x) \quad \forall (x,y) \in E^2$.
- φ est antisymétrique ou bien alternée si et seulement si $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x) \quad \forall (x,y) \in E^2$.

Proposition 26

Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x,y) \in E^2$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ on a les résultats suivants:

- $\varphi(x,x) = 0$.
- $\varphi(x, y + \lambda x) = \varphi(x,y)$.

- $\varphi(x,y)=0$ si $\{x,y\}$ est lie.

Théorème 22

Toutes les formes bilinéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 sont proportionnelles.

b Formes n-linéaires.

Définition 37

On appelle forme n-linéaire sur E, toute application

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \underbrace{E\times\ldots\times E}_{n \text{ fois}} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \varphi((x_1,\ldots,x_n))\end{array}$$

linéaire par rapport chacune de ses variables en fixant les autres, autrement dit:

- Linéarité par rapport la première variable: $\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, y_2,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(x_i,y_2,\ldots,y_n)$.
- Linéarité par rapport la deuxième variable: $\varphi\left(y_1,\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, y_3,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(y_1 x_i,y_3,\ldots,y_n)$.
- Linéarité par rapport la dernière variable: $\varphi\left(y_1,\ldots,y_{n-1},\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1},x_i)$.

Proposition 27

Soit φ une forme n-linéaire sur E, $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on a les résultats suivants:

- $\varphi(\lambda_1 x_1,\ldots,\lambda_n x_n)=\prod_{i=1}^{n}\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ si l'un des x_i est nul.

Proposition 28

Soit φ une forme n-linéaire sur E, on dit que:

- φ est symétrique si et seulement si :
  $\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=\varphi(x_1,\ldots,x_n)\quad\forall(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$.

- φ est antisymétrique si et seulement si
  $\varphi(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\dots,x_n) \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n$.
- $\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n) = -\varphi(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n)$,
  $\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n, \forall 1 \leq i \neq j \leq n$.

Proposition 29

Soit φ une forme bilinéaire, alors φ est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Proposition 30

Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ on a les résultats suivants:

- $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0$ si $\exists i \neq j$ tel que $x_i = x_j$.
- $\varphi\left(x_1,\dots,x_i + \sum_{j\neq i} \lambda_j x_j,\dots,x_n\right) = \varphi(x_1,\dots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\dots,x_n) = 0$ si $\{x_1,\dots,x_n\}$ est lie.

Théorème 23

Toutes les formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n sont proportionnelles.

6.2 déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

a généralités.

Définition 38

Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E = n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, l'unique forme n-linéaire alternée définie sur E^n note $\det_{\mathcal{B}}$ vérifiant la relation suivante: $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$

Proposition 31

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{B}'$ famille d'éléments de E tel que $\text{card}\mathcal{B}' = \dim E$, on a les résultats suivants:

- $\mathcal{B}'$ est lie si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 0$.
- $\mathcal{B}'$ est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

- $\mathcal{B}'$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, et dans ce cas on a:

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$$

b Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Principe: Orienter E revient se fixer une base $\mathcal{B}_0$, toute autre base $\mathcal{B}$ est dite directe si et seulement si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$, dans le cas contraire c'est dire si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ elle est dite indirecte.
En général les bases canoniques sont directes et orientent l'espace vectoriel .
Équation d'une droite du plan.

Si D est la droite du plan passant par le point A est dirige par le vecteur $\vec{u}$, alors son équation s'obtient l'aide de la relation suivante:
$M \in D \iff \det_{\mathcal{B}}(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$ o $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

6.3 déterminant d'un endomorphisme.

Définition 39

Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme, alors $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E, on pose alors $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$ et on l'appelle le déterminant de u.

Proposition 32

Soit $u, v : E \longrightarrow E$ deux endomorphismes de E tel que $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ famille d'éléments de E, on a les résultats suivants:

- $\det(id_E) = 1$.
- $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
- u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$, avec $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$

6.4 déterminant d'une matrice carre d'ordre n.

Définition 40

Le déterminant d'une matrice carre d'ordre n,
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, not $\det(A)$ est par définition le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Notation. Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, son déterminant se note aussi $|a_{i,j}|$.

Proposition 33

- Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, de base $\mathcal{B}$ et u un endomorphisme de E, alors: $\det u = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$.
- $\det(I_n) = 1$.

Proposition 34

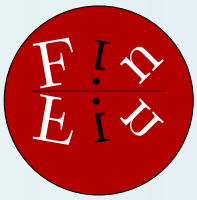
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq j \leq n$ o $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en enlevant la i–me ligne et j–me colonne, $\det(A_{i,j})$ s'appelle cofacteur d'indice (i,j), la matrice forme par ses cofacteurs s'appelle comatrice de A et se note $\mathrm{Com}(A)$. On dit qu'on a développé le déterminant suivant la j–me colonne.
- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall 1 \leq i \leq n$. On dit qu'on a développé le déterminant suivant la j–me colonne.

Proposition 35

- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P)$ o P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
- $A = (a_{i,j})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ avec } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}\mathrm{Com}(A)$$

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Si P est inversible alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.



Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$

Chapitre 2

Blague du jour

L'ingénieur, dans l'entreprise n'a pratiquement rien faire, si ce n'est
- De décider ce qu'il faut faire,
- De désigner quelqu'un pour le faire,
- D'écouter les raisons pour lesquelles la chose ne doit pas être faite,
- Ou doit être faite plus tard,
- Ou autrement,
- Ou par quelqu'un d'autre ;

Étienne Bézout, (1730-1783)

Mathématicien français, connu par le théorème d'arithmétique qui porte son nom. Il rédige le Cours complet de mathématiques l'usage de la marine et de l'artillerie, qui devint plus tard le livre de chevet des candidats au concours d'entrée à l'école polytechnique.

Mathématicien du jour

1 Notion d'idéal.

Dans toute cette partie $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif.

Définition 1

On appelle idéal de $\mathbf{A}$, toute partie $\mathcal{I} \neq \emptyset$ de $\mathbf{A}$, vérifiant la propriété suivante

$$a \in \mathcal{I},\ x \in \mathbf{A} \Longrightarrow a.x \in \mathcal{I}.$$

Remarque 1

- L'intersection et somme de deux idéaux de $\mathbf{A}$ est un idéal de $\mathbf{A}$.
- Si $\mathbf{f : A \longrightarrow B}$ est un morphisme d'anneau, alors $\ker \mathbf{f}$ est un idéal de $\mathbf{A}$.

Vocabulaire.

- Soit $\mathbf{a \in A}$, alors l'ensemble $\mathbf{aA} = \{\mathbf{a.x}$ tel que $\mathbf{x \in A}\}$ est un idéal de $\mathbf{A}$, appel idéal engendré par $\mathbf{a}$.
- Un idéal $\mathcal{I}$ est dit principal s'il est de la forme $\mathbf{aA}$.
- Un anneau est dit principal si tous ses idéaux sont principaux.

Théorème 1

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$ sont des anneaux principaux.

2 Arithmétique.

2.1 Théorèmes fondamentaux.

Théorème 2

Caractérisation du pgcd.
Soit $\mathbf{a, b} \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^*$ alors:
$\mathbf{d = a \wedge b} \iff$ $\mathbf{d}$ divise $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
si $\mathbf{d'} \in \mathbb{N}^*$ divise $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ alors $\mathbf{d'}$ divise $\mathbf{d}$

Théorème 3

Caractérisation du ppcm.
Soit $\mathbf{a, b} \in \mathbb{Z}$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*$ alors:
$\mathbf{m = a \vee b} \iff$ $\mathbf{m}$ multiple de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$
si $\mathbf{m'} \in \mathbb{N}^*$ multiple de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ alors $\mathbf{m'}$ multiple de $\mathbf{m}$

Théorème 4

Théorème de Bézout.
Soit $\mathbf{a, b} \in \mathbb{Z}$ alors:

$$\mathbf{a \wedge b = 1} \iff \exists \mathbf{u, v} \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \mathbf{au + bv = 1.}$$

Remarque 2

Les 3 théorèmes précédents sont encore valables dans $\mathbb{K}[X]$.

2.2 L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Définition 2

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $\mathbb{Z}$, on définit la relation d'équivalence dite congruence modulo n par la relation

$$a \equiv b\ [n] \Longleftrightarrow n \text{ divise } a - b.$$

- Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, sa classe d'équivalence est l'ensemble $\dot{a} = a + n\mathbb{Z} = \{x = a + nk \text{ tel que } k \in \mathbb{Z}\}$.
- Cette relation admet exactement n classes d'équivalence $\dot{0}, \cdots, \overline{n-1}$.
- L'ensemble forme par ses classes d'équivalence

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\dot{0}, \cdots, \overline{n-1}\}$$

  s'appelle ensemble quotient.

Théorème 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $\mathbf{Z}/n\mathbb{Z}$, on définit les lois de compositions internes suivantes:

$$a \dot{+} b = \dot{a} + \dot{b} \quad , \quad a\dot{b} = \dot{a}.\dot{b}$$

Muni de ses LCI, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau commutatif.

Théorème 6

Soit $a, n \in \mathbb{N}^*$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $\dot{a}$ inversible dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $\dot{a}$ n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- $a \wedge n = 1$.

Corollaire 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un corps.

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un anneau intègre.
- n est premier.

Notation.
L'ensemble des éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, se note $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ ou bien $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, c'est un groupe pour la loi .

Définition 3

Fonction indicatrice d'Euler. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\varphi(n) = \text{card}\{k \text{ tel que } 1 \leq k \leq n \text{ et } k \wedge n = 1\}.$$

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n \end{array}$ s'appelle la fonction indicatrice d'Euler.

Remarque 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi(n) = \text{card}\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Théorème 7

Théorème des restes chinois.
Soit $n, m \in \mathbb{Z}$ tel que $n \wedge m = 1$, soit $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $nu + mv = 1$, soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère le système suivant d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x \equiv a\,[n] \\ x \equiv b\,[m] \end{cases}$$

On a les résultats suivants:

- $x_0 = bnu + amv$ est une solution particulière de $\mathcal{S}$.
- Toute autre solution de $\mathcal{S}$ est congrue x_0 modulo nm.

Remarque 4

La forme originale du théorème, contenue dans un livre du mathématicien chinois Qin Jiushao publié en 1247, mais on trouve trace d'un problème analogue dans le livre de Sun Zi, le Sunzi suanjing datant du IIIe sicle :

Combien l'arme de Han Xing comporte-t-elle de soldats si, rangs par 3 colonnes, il reste deux soldats, rangs par 5 colonnes, il reste trois soldats et, rangs par 7 colonnes, il reste deux soldats?

3 Polynôme minimal.

3.1 Généralités.

Introduction.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire d'unit e, soit $a \in \mathcal{A}$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- On pose $P(a) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, o $a^0 = e$.
- Si $P(a) = 0$, on dit que P est un polynôme annulateur de a.
- L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ a & \longmapsto & P(a) \end{array}$ est un morphisme d'algèbre.
- On pose $\mathbb{K}[a] = \text{Im } \varphi = \{P(a) \text{ tel que } P \in \mathbb{K}[X]\}$.
- $\ker \varphi = \{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(a) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ formé pas les polynômes annulateurs de a.

Théorème 8

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire et $a \in \mathcal{A}$, alors $\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(a) = 0\}$ est un idéal principal de $\mathbb{K}[X]$. Si de plus $\{P \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que } P(a) = 0\} \neq \{0\}$, alors il est engendré par un unique polynôme unitaire not π_a, appelé polynôme minimal de a.

Remarque 5

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire et $a \in \mathcal{A}$ qui admet un polynôme annulateur non nul, alors:

- π_a est un polynôme annulateur de a qui divise tous les autres polynômes annulateurs de a.
- π_a est de degré minimal parmi les polynômes annulateurs de a.

Théorème 9

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire et $a \in \mathcal{A}$, alors a admet un polynôme annulateur non nul si et seulement si $\mathbb{K}[a]$ est de dimension finie et non nulle, dans ce cas

$$\dim \mathbb{K}[a] = \deg \pi_u.$$

3.2 Cas d'un endomorphisme.

Principe. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel on prend $a = u \in \mathcal{L}(E) = \mathcal{A}$, les résultats précédents sont encore valables.

Définition 4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $u(x) = \lambda x$.
- x s'appelle alors vecteur propre de u associé λ.
- L'ensemble des valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$ s'appelle spectre de u et se note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.

Théorème 10

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- λ est une valeur propre de u.
- $u - \lambda id_E$ est non injective.
- $\ker(u - \lambda id_E) \neq \{0_E\}$.

$E_\lambda = \ker(u - \lambda id_E)$ s'appelle sous-espace propre de u, associé λ.

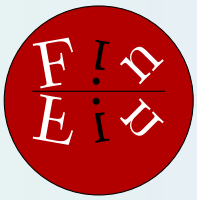
Remarque 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé, donc $u(x) = \lambda x$, dans ce cas on a les résultats suivants:

- $u^k(x) = \lambda^k x, \ \forall k \in \mathbb{N}$, en particulier λ^k est une valeur propre de u^k.
- $P(u)(x) = P(\lambda)x, \ \forall P \in \mathbb{K}[X]$, en particulier $P(u) = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = 0$.

Théorème 11

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors λ une valeur propre de u si et seulement si λ est une racine de π_u. (i.e. les valeurs propres de u sont exactement les racines de π_u).



Réduction d'endomorphismes

Chapitre 3

Blague du jour

On se propose de démontrer que $\boldsymbol{\pi}$ est irrationnel. En effet, après simplification, vu que cheval=$\boldsymbol{\beta\pi}$ =bête à pieds et que oiseau=$\boldsymbol{\beta\ell}$ =bête à ailes. On a:

$$\boldsymbol{\pi = \frac{cheval}{oiseau}}.$$

Alors, comme il n'y a aucune mesure entre le cheval et l'oiseau, $\boldsymbol{\pi}$ est incommensurable, ou comme on le dit plus familièrement dans le jargon mathématique, il est irrationnel...

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

Mathématicien du jour

Mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches sont importantes pour le développement de la mécanique quantique.
Enfant prodige; son génie se révéla tout d'abord dans sa capacité apprendre les langues. l'âge de 7 ans, il a déjà fait des progrès considérables en hébreu et, l'âge de 13 ans, il parlait dj 13 langues dont le persan, l'arabe, l'hindoustani, le sanskrit et le malais.

Dans tout ce résumé de cours, $\mathbf{E}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $\mathbf{u} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(\mathbf{E})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notion de sous-espace vectoriel $\mathbf{u}$-stables.

1.1 Généralités.

Définition 1

Un sous-espace vectoriel $\mathbf{F}$ de $\mathbf{E}$ est dit stable par $\mathbf{u}$, ou $\mathbf{u}$-stable si et seulement si $\mathbf{u}(\mathbf{F}) \subset \mathbf{F}$. Dans ce cas la restriction de $\mathbf{u}$ $\mathbf{F}$ induit un endomorphisme qu'on note par $\mathbf{u}_{|\mathbf{F}}$.

Remarque 1

- Pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est dit u-stable, il est pratique de montrer que $x \in F \Longrightarrow u(x) \in F$.
- La somme et l'intersection de sous-espaces u-stables sont u-stables.
- Si v est un autre endomorphisme de E commutant avec u, (i.e., $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont u-stables.

  En général $\ker P(v)$ et $\operatorname{Im} P(v)$ sont u-stables, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
- $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont u-stables, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

  En particulier, si $\lambda \in \operatorname{sp}(u)$, alors le sous-espace propre associé, $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{id}_E)$ est u-stable.

1.2 Caractérisation matricielle en dimension finie.

On suppose que est de dimension finie. Soit $(F_i)_{1 \le i \le r}$ des sous-espace vectoriel de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$, si on choisit pour tout F_i une base $\mathcal{B}_i$, alors $\mathcal{B} = \cup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$ est une base de E dite base adaptée à l'écriture $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.

Théorème 1

- Soit F et G sont deux sous-espace vectoriel de E tels que $E = F \oplus G$. Alors:
  - F est u-stable $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E adapte cette écriture telle que

$$\mathcal{M}_u(\mathcal{B}) = M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix} \qquad \text{matrice par blocs}$$

    Dans ce cas

$$\chi_M = \chi_A \cdot \chi_B, \ \pi_A \text{ et } \pi_B \text{ divisent } \chi_M.$$

  - F et G sont u-stables $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E adapte cette écriture telle que

$$\mathcal{M}_u(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

- Soit $(F_i)_{1 \le i \le r}$ des sous-espace vectoriel de E tels que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$, alors F_i sont tous u-stables $\Longleftrightarrow \exists \mathcal{B}$ base de E adapte cette écriture telle que

$$\mathcal{M}_u(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$$

Corollaire 1

Si F est un sous-espace vectoriel u-stable de E, alors

$$\chi_{u_{|F}} \text{ divise } \chi_u$$
$$\pi_{u_{|F}} \text{ divise } \pi_u$$

1.3 Théorèmes fondamentaux.

Théorème 2

Théorème de décomposition des noyaux.
Soit P et Q deux polynômes premiers entre eux, alors

$$\ker(PQ)(u) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u).$$

Théorème 3

Théorème de Cayley-Hamilton.
Si E est de dimension finie, alors

$$\chi_u(u) = 0$$

Théorème 4

Si E est de dimension finie, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de u de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ dans le polynôme caractéristique χ_u, alors

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \lambda_i = \operatorname{tr}(u)$$
$$\prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{\alpha_i} = \det(u)$$

2 Réduction d'endomorphismes en dimension finie.

2.1 Trigonalisation.

Définition 2

On dit que u est trigonalisable si et seulement si $\exists \mathcal{B}$ une base de E tel que $\mathcal{M}_u(\mathcal{B})$ soit triangulaire.

Définition 3

Une matrice est dite trigonalisable si et seulement si elle est semblable une matrice triangulaire.

Théorème 5

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, alors $\mathbf{u}$ est trigonalisable si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$ est trigonalisable.

Théorème 6

$\mathbf{u}$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Théorème 7

Dans $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$, toute matrice est trigonalisable.

Théorème 8

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable de spectre nul.

2.2 Diagonalisation.

a Généralités.

Définition 4

On dit que $\mathbf{u}$ est diagonalisable si et seulement si $\exists\mathcal{B}$ une base de E tel que $\mathcal{M}_{\mathbf{u}}(\mathcal{B})$ soit diagonale.

Définition 5

Une matrice est dite diagonalisable si et seulement si elle est semblable une matrice diagonale.

Théorème 9

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, alors $\mathbf{u}$ est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})$ est diagonalisable.

b Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisation.

Théorème 10

$\mathbf{u}$ est diagonalisable si et seulement si la somme directe de ses sous-espaces propres est gale E

Théorème 11

u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est gale celle de E

Théorème 12

u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dont les racines ont une multiplicité gale la dimension du sous-espace propre associé

Théorème 13

u est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé racines simples.

Théorème 14

u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé racines simples.

c Conditions suffisantes de diagonalisation.

Théorème 15

Si $\dim E = n$ et u admet n valeurs propres deux deux distinctes, alors u est diagonalisable, avec $\dim E_\lambda = 1$ pour toute valeur propre λ.

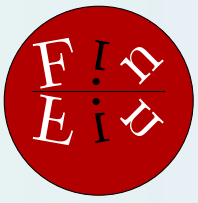
Théorème 16

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, toute matrice symétrique est diagonalisable.

d Décomposition spectrale d'un endomorphisme diagonalisable.

Si u est diagonalisable, soit $(p_1, \dots, p_s)$ la famille des projecteurs associés une décomposition de E de la forme $E = F_1 \oplus F_s$, o $F_1, \dots, F_s$ sont les sous-espaces propres de u: alors

$$u = \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_s p_s$$
$$P(u) = P(\lambda_1)p_1 + \cdots + P(\lambda_s)p_s \quad \forall P \in \mathbb{K}[X]$$



Espaces Vectoriels Normés

Chapitre 4

Blague du jour

Bientôt vous serez ingénieur, peut être ingénieur informaticien. Vérifier sur la liste ci-dessous si vous avez le profil, les types d'ingénieurs en informatique sont:
- L'ingénieur DISQUE DUR: il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
- L'ingénieur CD-ROM: il va toujours plus vite avec le temps.
- L'ingénieur RAM: il oublie tout de vous, dés le moment où vous lui tournez le dos.
- L'ingénieur WINDOWS: Tout le monde sait qu'il ne peut pas faire une chose correctement, mais personne ne peut s'en passer de ses services.

Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1903)

Mathématicien du jour

Mathématicien allemand, il a laissé son nom aux applications drive borne (Application lipschitzienne). En réalité, son travail s'étend sur des domaines aussi variés que la théorie des nombres, l'analyse, la géométrie différentielle et la mécanique classique, en particulier la résolution des équations du mouvement dans le formalisme d'Hamilton-Jacobi.

Dans tout le résumé $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

1 Généralités.

1.1 Notion de normes.

Définition 1

On appelle norme sur toute application $N : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes:

- $N(x) = 0 \iff x = 0_E$, condition de séparabilité.

- $N(\lambda x) = |\lambda| N(x),\ \forall x \in E$.
- $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$. Inégalité triangulaire.

Vocabulaire et notations.

- Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit un espace vectoriel normé quand il est muni d'une norme N.
- Pour tout $x \in E$, $N(x)$ s'appelle la norme de x et se note en général $\|x\|$.
- On dit alors que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé .
  Dans toute la suite, sauf mention du contraire, on considère que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé .
- Pour tous $x, y \in E$, $d(x,y) = \|x-y\|$ s'appelle la distance entre x et y.
- Pour tout $a \in E, r > 0$, $B(a,r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x,a) < r\}$ s'appelle boule ouverte de centre a et de rayon r. En particulier $x \in B(a,r) \iff \|x-a\| < r$.
- Pour tout $a \in E, r \geq 0$, $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \text{ tel que } d(x,a) \leq r\}$ s'appelle boule ouverte de centre a et de rayon r. En particulier $x \in \overline{B}(a,r) \iff \|x-a\| \leq r$.

Normes classiques.

1. Pour tout $x = (x_k) \in \mathbb{K}^n$, on pose:
   - Norme de la convergence absolue: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
   - Norme de la convergence quadratique: $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$.
   - Norme de la convergence uniforme: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$
2. Pour tout $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{K})$, on pose:
   - Norme de la convergence absolue: $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$.
   - Norme de la convergence quadratique: $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$.
   - Norme de la convergence uniforme: $\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(t)|$
3. Norme produit: Si $(E_i, \|.\|_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des espace vectoriel normé , on peut définir sur le produit cartésien, $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, la norme suivante, dite norme produit: $\|(x_i)_{1 \leq i \leq n}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|_i$.

Définition 2

- Une partie $A \subset E$ est dite bornée dans $(E, \|.\|)$ si et seulement si

$$\exists R \geq 0 \text{ tel que } \|x\| \leq R, \ \forall x \in A$$

  Autrement dit, $A \subset B(0_E, R)$.

- Une $f : X \longrightarrow (E, \|.\|)$ est dite bornée si et seulement si $f(X)$ est borne dans $(E, \|.\|)$
  Autrement dit, $\exists R \geq 0$ tel que $\|f(x)\| \leq R, \ \forall x \in X$

Définition 3

Une application $f : (E, \|.\|_E) \longrightarrow (F, \|.\|)_F$ est dite k-lipschitzienne si et seulement si

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E , \ \forall x, y \in E$$

Autrement dit: $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), \ \forall x, y \in E$, dans ce cas $f(B(x, R)) \subset B(f(x), kR)$

Proposition 1

- La somme de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.
- Le produit d'une application lipschitzienne avec une autre borne est lipschitzienne.

1.2 Quelques notions de topologie.

Définition 4

Soit $a \in E$ et $U \subset E$.

- On dira que U est un voisinage de a si $\exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.
- On dira que U est un ouvert de E s'il est voisinage de tous ses points, i.e.

$$\forall a \in U, \ \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset U$$

- On dira que U est un fermé de E si son complémentaire U^c est un ouvert de E, i.e,

$$\forall a \notin U, \ \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \cap U = \emptyset$$

Proposition 2

- $\emptyset$ et E sont la fois ouverts et fermés dans E.
- La réunion quelconque (même infinie) d'ouverts est un ouvert.

- L'intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- La réunion finie de fermés est un fermé.
- L'intersection quelconque (même infinie) de fermés est un fermé.

Définition 5

Soit $U \subset E$ et $a \in U$.

- On dira que a est un point intérieur de U quand U est un voisinage de a, on écrit alors $a \in \mathring{U}$.
- $a \in \mathring{U} \iff \exists r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.
- $\mathring{U}$ s'appelle l'intérieur de U.

Proposition 3

Soit U une partie de E, on a les propriétés suivantes:

- $\mathring{U}$ est un ouvert de U.
- $\mathring{U}$ est le plus grand ouvert inclut dans U.
- U est un ouvert si et seulement si $\mathring{U} = U$.
- $\mathring{\mathring{U}} = U$.
- Si V est une autre partie de E telle que $U \subset V$, alors $\mathring{U} \subset \mathring{V}$

Définition 6

Soit $U \subset E$ et $a \in E$.

- On dira que a est un point adhérant U si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ on a } B(a, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$$

  On écrit alors $a \in \overline{U}$.
- $\overline{U}$ s'appelle la frontière de U.

Proposition 4

Soit U une partie de E, on a les propriétés suivantes:

- $\overline{U}$ est un fermé de E.

- $\overline{U}$ est le plus petit fermé de E contenant U.
- U est un fermé si et seulement si $\overline{U} = U$.
- $\overline{\overline{U}} = U$.
- Si V est une autre partie de E telle que $U \subset V$, alors $\overline{U} \subset \overline{V}$
- $(\overline{U})^c = \mathring{U}^c$.

Proposition 5

L'adhérence d'une boule ouverte est exactement sa boule ferme associe.

$$\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r),\ \forall a \in U,\ \forall r > 0$$

Définition 7

Soit U une partie de E. On appelle frontière de U, l'ensemble not ∂U ou $Fr(U)$ définie par la relation:

$$Fr(U) = \overline{U} \setminus \mathring{U}$$

Plus précisément $a \in Fr(U) \iff \forall \varepsilon > 0,$ on a $B(a,\varepsilon) \cap U \neq \emptyset$ et $B(a,\varepsilon) \cap U^c \neq \emptyset$

Proposition 6

Soit U une partie de E, on a les propriétés suivantes:

- $Fr(U) = \overline{X} \setminus \overline{U^c}$. En particulier $Fr(U)$ est ferme.
- $Fr(U) = Fr(U^c)$.
- $\overline{U} = U \cup Fr(U)$.
- Un ensemble est un fermé si et seulement s'il contient sa propre frontière.
- Un ensemble est un ouvert si et seulement s'il est disjoint de sa propre frontière.
- Un ensemble est la fois ouvert et fermé si et seulement si sa frontière est vide.

Définition 8

On dit qu'une partie U de E est dense dans E, lorsque son adhérence est gal E tout entier. i.e, $\overline{U} = E$.

En général, on dit qu'une partie U de E est dense dans une autre partie V de E, lorsque $V \subset \overline{U}$.

Proposition 7

Soit U, V deux parties de E, les propriétés suivantes sont équivalents:

- U dense dans V.
- $\forall x \in V,\ \forall \varepsilon > 0 \quad U \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$.
- $\forall x \in V,\ \forall \varepsilon > 0,\ U \cap B(x, \varepsilon)$ contient une infinité d'éléments.

1.3 Notion de limite

a Suites convergentes

Définition 9

Une suite (x_n) valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dite convergente vers un élément $x \in E$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$

Dans le cas contraire, où (x_n) n'admet pas de limite dans E, on dit qu'elle est divergente.

Proposition 8

Soit (x_n) une suite valeur dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et $x \in E$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$.
- $\forall \varepsilon > 0$, on a $(x_n) \subset B(x, \varepsilon)$, partir d'un certain rang.

Proposition 9

Toute suite extraite d'une suite convergente, est aussi convergente et converge vers la même limite.

Théorème 1

Caractérisations séquentielles. Soit A partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ et $x \in E$, on a les caractérisation suivante:

- $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n) \subset A$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
- A est ferme si et seulement si toute suite valeurs dans A qui converge, admet sa limite dans A.

Proposition 10

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé . Une suite (x_n, y_n) valeurs dans $E \times F$ converge dans $F \times F$ si et seulement si (x_n) converge dans E et (y_n) converge dans F, dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (\lim_{n\to+\infty} x_n, \lim_{n\to+\infty} y_n)$$

b Notion de limite en un point adhérant.

Définition 10

Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé . Soit X une partie de E et $f : X \longrightarrow F$. Soit $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$.

On dit que f admet ℓ comme limite en a si et seulement si $\lim_{\|x-a\|\to 0} \|f(x) - \ell\| = 0$, on écrit alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

Proposition 11

Avec les notations de la définition précédente, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
- $\lim_{d(x-a)\to 0} d(f(x) - \ell) = 0$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0$ tel que $\forall x \in X, \quad \|x - a\| < r \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0$ tel que $f\left(B(x, r) \cap X\right) \subset B(\ell, \varepsilon)$.

Théorème 2

Caractérisation séquentielle de la limite. Avec les notations de la définition précédente, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Pour toute suite (x_n) valeurs dans E qui converge vers a, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$.

Définition 11

On définit la notion de limite infinie dans les cas suivants par:

- Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow F$, et $\ell \in F$.

- On écrit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f = \ell \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \|f(t)-\ell\| = 0$.
  Plus précisément: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, on a: $t > A \Longrightarrow \|f(t)-\ell\| < \varepsilon$.
- On écrit que $\lim\limits_{n\to-\infty} f = \ell \iff \lim\limits_{n\to-\infty} \|f(t)-\ell\| = 0$.
  Plus précisément: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A < 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, on a: $t < A \Longrightarrow \|f(t)-\ell\| < \varepsilon$.

- Si $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, et $a \in F$.
  - On écrit que $\lim\limits_{x\to a} f = +\infty \iff \lim\limits_{\|x-a\|\to 0} f(x) = +\infty$.
    Plus précisément: $\forall A > 0,\ \exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in E$, on a: $\|x-a\| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) > A$.
  - On écrit que $\lim\limits_{x\to a} f = -\infty \iff \lim\limits_{\|x-a\|\to 0} f(x) = -\infty$.
    Plus précisément: $\forall A < 0,\ \exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in E$, on a: $\|x-a\| < \varepsilon \Longrightarrow f(x) < A$.

C Relations de comparaison.

Définition 12

Soit Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé , $f : (E, \|.\|) \longrightarrow (F, \|.\|)$ et $a \in E$.

- On dira que f est dominée par g au voisinage de a si et seulement si $\exists M > 0,\ \exists r > 0$ tel que $\forall x \in B(a, r)$, on a: $\|f(x)\| \leq M \|g(x)\|$.
  On écrit alors: $f =_a O(g)$.
- On dira que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r > 0$ tel que $\forall x \in B(a, r)$, on a: $\|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|$.
  On écrit alors: $f =_a o(g)$.
- On dira que f est équivalente g au voisinage de a si et seulement si $f - g = o_a(g)$.
  On écrit alors: $f \sim_a g$.

Proposition 12

Avec les notations de la définition précédente, on a les propriétés suivantes:

- $f =_a O(1) \iff f$ est borne au voisinage de a.
- $\forall \lambda \neq 0$, on a $f =_a O(g) \iff \lambda f =_a O(g) \iff f =_a O(\lambda g)$. $f =_a O(1) \iff \lim\limits_{x\to a} f = 0$.
- $\forall \lambda \neq 0$, on a $f =_a o(g) \iff \lambda f =_a o(g) \iff f =_a o(\lambda g)$.
- la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

1.4 Continuité.

Définition 13

Soit Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé , $f : (E, \|.\|) \longrightarrow (F, \|.\|)$ et $a \in E$.

- On dit que f est continue au point a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue sur une partie X de E si et seulement si f est continue en tout point $x \in X$. L'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}(X, F)$.

Proposition 13

- La somme et compose de fonctions continues est continue.
- Toute fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^n$ est continue.
- Toute fonction lipschitzienne est continue.
- L'image réciproque d'un ouvert de F par une application continue est un ouvert de E.
- L'image réciproque d'un fermé de F par une application continue est un fermé de E.

Application: Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors:

- $\{x \in E$ tel que $f(x) > \alpha\}$, $\{x \in E$ tel que $f(x) < \alpha\}$ et $\{x \in E$ tel que $\alpha < f(x) < \beta\}$ sont des ouverts.
- $\{x \in E$ tel que $f(x) \geq \alpha\}$, $\{x \in E$ tel que $f(x) \leq \alpha\}$ et $\{x \in E$ tel que $\alpha \leq f(x) \leq \beta\}$ sont des fermés.
- $\{x \in E$ tel que $f(x) = \alpha\}$ est un fermé, alors $\{x \in E$ tel que $f(x) \neq \alpha\}$ est un ouvert.

2 Espaces vectoriels normés de dimension finie.

2.1 Suites de Cauchy

Définition 14

On appelle suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, toute suite (x_n) valeurs dans E, vérifiant la propriété suivante: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq n_0$ on a: $\|x_p - x_q\| < \varepsilon$

Proposition 14

Soit (x_n) une suite valeurs dans E, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- (x_n) est de Cauchy.
- $\forall \varepsilon > 0,\ existsn_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, \forall n \in \mathbb{N}$ on a: $\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} \|x_{n+p} - x_n\| \right) = 0$.

Théorème 3

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy qui admet une suite extraite convergente est aussi convergente.

Définition 15

un espace vectoriel normé E est dit complet (ou espace de Banach), si toute suite de Cauchy valeurs dans E, converge dans E.

Théorème 4

$\mathbb{R}^n$ est complet.

Théorème 5

Si E est complet, et $f : X \longrightarrow E$ lipschitzienne, alors f est prolongeable par continuité en tout point $a \in \overline{X}$.

2.2 Compacité.

Proposition 15

Soit (x_n) une suite valeurs dans E, et $a \in E$, alors a est une valeur d'adhérence de $(x_n) \iff \exists (x_{\varphi(n)})$ suite extraite de (x_n) telle que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)}$

Définition 16

Une partie X d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dite compacte, si de toute suite valeurs dans X, on peut en extraire une sous suite convergente dans X.

Proposition 16

- Toute partie ferme d'une partie compacte est compacte.

- Le produit d'une famille finie de compacts est un compact.
- L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Théorème 6

Théorème de Bolzano-Weierstrass: Toute suite borne valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie possède une valeur d'adhérence. Autrement dit, on peut en extraire une sous-suite convergente.

Théorème 7

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une partie est compacte si et seulement si elle est ferme et borne.

2.3 Connexité par arcs

Définition 17

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$.

- On appelle chemin dans X, toute application continue $\gamma : [0,1] \longrightarrow X$.
- On dit que X est connexe par arcs si pour tout $x, y \in X,\ \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X$ continue tel que $\gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$.

Proposition 17

- Une partie convexe est connexe par arcs.
- Les sous-espace vectoriel de E sont connexes par arcs.
- L'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arc.

Théorème 8

Théorème des valeurs intermédiaires: Une partie est connexe par arcs dans $\mathbb{R}$ si et seulement si c'est un intervalle.

Définition 18

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$. La relation définie sur E, par:

$$x, y \in X,\ \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow X \text{ continue tel que } \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y$$

est une relation d'équivalence, dont la classe d'équivalence s'appellent composantes connexes de X.

Pour tout $x \in X$, sa classe d'équivalence se note $C(x)$, et s'appelle la composante connexe de x.

Proposition 18

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et $X \subset E$, on a les propriétés suivantes:

- Les composantes connexes de X sont des parties connexes de E, maximales pour l'inclusion.
- Les composantes connexes d'une partie de $\mathbb{R}$ sont intervalles maximales pour l'inclusion.
- Soit $x \in X$ et $f : E \longrightarrow F$ continue, alors $f(C(x)) \subset C(x)$, avec égalité si f est surjective.

  En particulier, l'image d'une composante connexe d'un élément par une application continue surjective est la composante connexe de l'image de cet élément.

2.4 Normes équivalentes.

Définition 19

Deux normes N_1 et N_2 sur un espace vectoriel sont dites équivalentes si

$$\exists \alpha, \beta > \text{ tel que } \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \beta N_1(x) \quad \forall x \in E.$$

Remarque 1

Dans un espace vectoriel normé , les notions suivantes sont intrinsèques et ne dépendent pas du choix de la norme entre des normes équivalentes:

- Les notions de voisinage, ouvert, fermé, adhérence, frontière, densité.
- Les notions de suites ou applications bornées.
- La notion de suite de Cauchy.
- La convergence d'une suite ou l'existence de la limite d'une application en un point adhérant.
- La limite d'une suite convergente et celle d'une application en un point adhérant.
- La continuité et la notion d'application lipschitzienne.

Théorème 9

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3 Normes subordonnes

Définition 20

Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé , l'ensemble des applications linéaires continues de E vers F se note $\mathcal{L}_c(E,F)$, sur lequel on définit la norme note $|||.|||$, appelle norme subordonnes aux normes celles de E et F, définie par la relation suivante: $|||f||| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$

Proposition 19

Soit $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espace vectoriel normé , $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$, on a les propriétés suivantes:

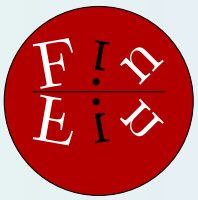
- $|||f||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup\limits_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\|$.
- $\|f(x)\| \leq |||f||| \, \|x\| \quad \forall x \in E$.
- $|||f \circ g||| \leq |||f||| |||g|||$ pour tout $g \in \mathcal{L}_c(G,E)$, avec G un espace vectoriel normé .
  En particulier, dans $\mathcal{L}_c(E)$, la norme subordonne est une norme d'algèbre.

Théorème 10

En dimension finie (départ et arrivée), toutes les applications linéaires, bilinéaires, multilinéaires sont continues.

Proposition 20

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a: $|||A|||_2 = |||{}^tA|||_2 = \sqrt{|||{}^tAA|||_2}$



Calcul Différentiel

Chapitre 5

Blague du jour

Pendant une conférence de presse tenue la Maison Blanche, le président George W.Bush accuse les mathématiciens et les informaticiens des états- Unis de promouvoir le programme démocratique:
Tous les départements de mathématiques, ou du moins d'informatique proposent une introduction aux AlGore-ithmes, déplore-t-il. Mais pas un seul enseigne les GeorgeBush-ithmes...

Hermann Amandus Schwarz (1843-1921)

Mathématicien allemand. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie. Il a travaillé sur des sujets allant de la théorie des fonctions à la géométrie différentielle en passant par le calcul des variations.

Mathématicien du jour

1 différentielle d'une application

1.1 dérivation vectorielle.

Définition 1

Soit $\mathbf{f : I \longrightarrow E}$ o $\mathbf{I}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbf{E}$ un espace de Banach. Soit $\mathbf{t_0 \in I}$. On dit que $\mathbf{f}$ est dérivable au point $\mathbf{t_0}$ si et seulement si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe dans $\mathbf{E}$, qu'on note par $\mathbf{f'(t_0)}$ et qu'on appelle dérivée de $\mathbf{f}$ au point $\mathbf{t_0}$.

Proposition 1

Une application $f : \begin{array}{ccc} I \subset \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (f_1(t), \cdots, f_p(t)) \end{array}$ est dérivable en un point $t_0 \in I$ si et seulement si toutes ses applications composantes $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables en t_0, dans ce cas $f'(t_0)) = (f_1'(t), \cdots, f_p'(t))$.

Remarque 1

- Toute fonction dérivable en un point y est continue, la réciproque est notamment en général fausse.
- L'application vectorielle $\begin{array}{ccc} I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} \end{array}$ est dérivable en un point $t_0 \in I$ si et seulement si les applications coordonnes $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont dérivables au point t_0, dans ce cas: $\vec{V}(t_0) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = \dot{x}(t_0)\vec{i} + \dot{y}(t_0)\vec{j}$.

Définition 2

Soit $f : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $k \in \mathbb{N}^*$

- Par récurrence on définit la dérivée k^{me} de f au point $t_0 \in I$ de la faon suivante:
  f est k-fois dérivables au point t_0 si et seulement si f est $(k-1)$-fois dérivable au point t_0 et $f^{(k-1)}$ dérivable au point t_0, dans ce cas on pose
  $$f^{(k)}(t_0) = \left(f^{(k-1)}\right)'(t_0)$$
- On dira que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle est k-fois dérivable sur I, avec $f^{(k)}$ continue sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^k(I, E)$.
- On dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle indéfiniment dérivable sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^\infty(I, E)$.

Proposition 2

Soient $f, g : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow E$ $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I, alors $f + \lambda g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
  En particulier, $\mathcal{C}^k(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors $f + \lambda g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
  En particulier, $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Théorème 1

Formule de Leibniz générale. Soient $f, g : I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et $B : E \times E \longrightarrow F$ (Banach)

bilinéaire, alors l'application $\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & B(f(t),g(t)) \end{array}$ est de classe $\mathcal{C}^k$, avec

$$(B(f(t),g(t)))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\left(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t)\right).$$

Théorème 2

Inégalité des accroissements finis. Soient $f : [a,b] \subset R \longrightarrow \mathbb{R}^p$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $\|f'(t)\| \leq k$ sur $]a,b[$, alors $\|f(b) - f(a)\| \leq k|b-a|$.

1.2 Notion d'application différentiable.

Définition 3

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ o U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a \in U$. On dit que f est différentiable au point a s'il existe une application linaire $\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ tel que $f(a+\overrightarrow{h}) - f(a) = \ell(\overrightarrow{h}) + o(\|h\|)$, $\forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$ tel que $a+\overrightarrow{h} \in U$.

L'application linaire (qui est unique) $\ell(\overrightarrow{h})$ s'appelle la différentielle de f au point a applique au vecteur $\overrightarrow{h}$ et se note $df_a(\overrightarrow{h})$, ainsi on a:

$$f(a+\overrightarrow{h}) - f(a) = df_a(\overrightarrow{h}) + o(\left\|\overrightarrow{h}\right\|), \ \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } a+\overrightarrow{h} \in U.$$

Remarque 2

- La notion de différentiabilité sur $\mathbb{R}$ généralise celle de la dérivabilité, plus précisément si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a \in I$, alors f est différentiable au point a si et seulement si f est dérivable au point a avec $df_a(h) = h.f'(a)$, $\forall h \in \mathbb{R}$.
- Toute fonction dérivable en un point y est continue, la réciproque est notamment en général fausse.
- Soit une application linaire $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, alors f est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, avec $df_a = f$.

Proposition 3

Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f et g sont différentiables au point a, alors $f + \lambda g$ est différentiable au point a avec

$$d(f+\lambda g)_a(\overrightarrow{h}) = df_a(\overrightarrow{h}) + \lambda dg_a(\overrightarrow{h}), \ \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition 4

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tels que U et V ouverts et $f(U) \subset V$. soit $a \in U$. Si f est différentiable au point a et g est différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a avec

$$d(g \circ f)_a(\overrightarrow{h}) = (dg)_{f(a)} \circ df_a(\overrightarrow{h}),\ \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n.$$

1.3 Matrice Jacobienne

Définition 4

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ différentiable en un point $a \in U$, sa matrice Jacobienne au point a est la matrice note $\mathcal{J}_a f \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, définie par la relation:

$$\mathcal{J}_a f = \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(df_a)$$

o $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$.

Proposition 5

Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f et g sont différentiables au point a, alors $f + \lambda g$ est différentiable au point a avec

$$\mathcal{J}_a(f + \lambda g) = \mathcal{J}_a f + \lambda \mathcal{J}_a g$$

Proposition 6

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $g : V \subset \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ tels que U et V ouverts et $f(U) \subset V$. soit $a \in U$. Si f est différentiable au point a et g est différentiable au point $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable au point a avec

$$\mathcal{J}_a(g \circ f) = \mathcal{J}_{f(a)} g \cdot \mathcal{J}_a f$$

Remarque 3

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ différentiable en un point $a \in U$, alors $\mathcal{J}_a f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le déterminant s'appelle le Jacobien de f au point a.

2 dérivées partielles.

2.1 dérivée suivant un vecteur

Définition 5

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $\overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, alors $\exists \varepsilon\ 0$ tel que $a + t\overrightarrow{h} \in U\ \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

On dit alors que f admet au point a une dérivée suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$ si la fonction $\varphi_{\overrightarrow{h}} : \begin{array}{ccc} [-\varepsilon, \varepsilon] & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & f(a + t\overrightarrow{h}) \end{array}$

est dérivable en 0, on pose alors

$$D_{\overrightarrow{h}} f(a) = \left(\varphi_{\overrightarrow{h}}\right)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{h}) - f(a)}{t}$$

qu'on appelle dérivée de f au point a suivant le vecteur $\overrightarrow{h}$.

Définition 6

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in U$ et $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On dit alors que f admet au point a une dérivée partielle par rapport x_i si et seulement si $D_{\overrightarrow{e_i}} f(a)$ existe, dans ce cas on pose;

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = D_{\overrightarrow{e_i}} f(a)$$

Remarque 4

- Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$ La dérivée partielle $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ s'obtient en dérivant la fonction $t \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ au point a_i, c'est dire: on fixe $n - 1$ variables et on dérivée par rapport l'autre variable.
- Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et continue en a et admet des dérivées partielles au $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ au voisinage de a, alors le Théorème des Accroissements Finis (TAF) s'écrit

$$f(a + t\overrightarrow{e_i}) - f(a) = t\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \alpha\overrightarrow{e_i}), \text{ tel que } \alpha \in]0, t[.$$

Proposition 7

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en un point $a \in U$, alors f admet en a une dérivée suivant

tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$, avec

$$df_a(\overrightarrow{h}) = D_{\overrightarrow{h}} f(a)$$

En particulier f admet des dérivées partielles en a.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 7

Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ en un point $a \in U$, si f admet au voisinage de a une dérivée suivant tout vecteur $h \in \mathbb{R}^n$, $D_{\overrightarrow{h}} f$, continue en a.

L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U se note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$.

Théorème 3

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ admet au voisinage de $a \in U$ des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ toutes continues en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$D_{\overrightarrow{h}} f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i, \ \forall \overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \overrightarrow{e_i}$$

Théorème 4

Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en a, alors f est différentiable en a avec

$$df_a(\overrightarrow{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i, \ \forall \overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \overrightarrow{e_i}$$

Proposition 8

- Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, avec

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f + \lambda g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}, \ \forall i \in \{1, \cdots, n\}$$

  Ainsi $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^p)$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

- La compose de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 5

Théorème de composition. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\begin{array}{rccl} \gamma : & I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & U \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)) \end{array}$

un chemin inclut dans U dérivable, alors $f \circ \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dérivable, avec

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$$

Théorème 6

Changement de variables. Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} V \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & U \\ (u,v) & \longmapsto & (x,y) \end{array}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$g(u,v) = f \circ \varphi(u,v) = f(x,y)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

Remarque 5

Coordonnes polaires. Si on pose $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ et $g(r,\theta) = f(x,y)$, alors:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial v} = -r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases}$$

En résolvant ce système d'inconnues $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $ddfy$, on obtient:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta \dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r} \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta \dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r} \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{cases}$$

Théorème 7

Inégalité des accroissements finis: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\exists M \geq 0$ vérifiant $\left\| df_a(\overrightarrow{h}) \right\| \leq k,\ \forall a \in U, \forall \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + \overrightarrow{h} \in U$, alors

$$\left\| f(a + \overrightarrow{h}) - f(a) \right\| \leq k \left\| \overrightarrow{h} \right\|$$

Théorème 8

Inégalité des accroissements finis: Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ où U ouvert connexe par arc, alors

f est constante si et seulement si $df_a = 0,\ \forall a \in U$.

2.3 Gradient.

Définition 8

On rappelle d'abord que pour toute forme linéaire $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe un unique vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(\vec{h}) = \vec{a} \cdot \vec{h}$.

En particulier, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors df_a est une forme linaire sur $\mathbb{R}^n$, pour laquelle il existe un unique vecteur not $\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$ tel que:

$$df_a(\vec{h}) = \overrightarrow{\text{grad}}f(a).\vec{h}$$

$\overrightarrow{\text{grad}}f(a)$ s'appelle le gradient de f au point a.

Remarque 6

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $a \in U, \vec{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \vec{e_i} \in \mathbb{R}^n$, on a: $df_a(\vec{h}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} h_i$, ainsi on conclut que:

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e_i}$$

Proposition 9

Soit $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ et fg sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}(f + \lambda g)(a) = \overrightarrow{\text{grad}}f(a) + \lambda \overrightarrow{\text{grad}}g(a) \\ \overrightarrow{\text{grad}}(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f(a) + f(a) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}g(a) \end{cases}$$

Définition 9

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle point critique ou stationnaire de f, tout point $a \in U$ $\overrightarrow{\text{grad}}f(a) = \vec{0}$.

3 dérivées d'ordre supérieures.

3.1 Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Définition 10

On dit que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$, si toutes ses dérivées partielles existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \ , \ \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Théorème 9

Formule de Taylor-Young l'ordre 2: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in U, \overrightarrow{h} = \sum_{i=1}^{n} h_i \overrightarrow{e_i}$ tel que $a + \overrightarrow{h} \in U$, on a:

$$f(a+\overrightarrow{h}) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o\left(\left\|\overrightarrow{h}\right\|\right)$$

En particulier, il existe une application bilinéaire $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ tel que :

$$f(a+\overrightarrow{h}) - f(a) = df_a(\overrightarrow{h}) + B(\overrightarrow{h},\overrightarrow{h}) + o\left(\left\|\overrightarrow{h}\right\|\right)$$

Théorème 10

Théorème de Schwarz: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $a \in U$, on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$$

Théorème 11

Formule de Taylor-Young l'ordre 2 en dimension 2: Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors pour tout $(a,b) \in U$, $h = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b) + \overrightarrow{h} = (a+x, b+y) \in U$, on a:

$$f(a+x,b+y)-f(a,b)=x\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+y\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+x^2\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+y^2\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b)+o(x^2+y^2)$$

Remarque 7

En un point critique (a,b), la formule précédente devient:

$$f(a+x,b+y)-f(a,b)=x^2\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+y^2\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b)+o(x^2+y^2)$$

3.2 Extrema des fonctions réelles.

Définition 11

Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ et $a\in U$:

- On dit que f admet au point a un minimum local, s'il existe un voisinage de a, $V\subset U$ tel que $f(a)\leq f(M),\ \forall M\in V$.
- On dit que f admet au point a un minimum local strict, s'il existe un voisinage de a, $V\subset U$ tel que $f(a)< f(M),\ \forall M\in V$.
- On dit que f admet au point a un maximum local, s'il existe un voisinage de a, $V\subset U$ tel que $f(a)\geq f(M),\ \forall M\in V$.
- On dit que f admet au point a un maximum local strict, s'il existe un voisinage de a, $V\subset U$ tel que $f(a)> f(M),\ \forall M\in V$.
- On dit que f admet au point a un extremum local, s'il admet en a un minimum ou maximum local.
- On dit que f admet au point a un extremum local strict, s'il admet en a un minimum ou maximum local strict.

Théorème 12

Si $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et admet en $a\in U$ un extremum local, alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}f(a)=\overrightarrow{0}.$$

Remarque 8

La réciproque du théorème précédent est en général fausse, toute fois on a le résultat suivant:

Théorème 13

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $(a,b) \in U$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \overrightarrow{0}$ (point critique), on pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \ , \ s = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(a,b) \ , \ t = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(a,b).$$

- Si $r^2 - st < 0$ et $s > 0$, alors f admet en (a,b) minimum local strict.
- Si $r^2 - st < 0$ et $s < 0$, alors f admet en (a,b) maximum local strict.

  Dans les deux cas, on dit que (a,b) est un point elliptique.
- Si $r^2 - st > 0$, alors f n'admet pas en (a,b) d'extrémum local, car $f(x,y) - f(a,b)$ change de signe au voisinage de (a,b).

  On dit que (a,b) est un point hyperbolique, point col ou selle.
- Si $r^2 - st = 0$, on ne peut rien dire. On dit que (a,b) est un point parabolique.

Théorème 14

Extrema liés: la règle des multiplicateurs de Lagrange: Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq p$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $V = \{x \in U \text{ tel que } f_i = 0, \ \forall 1 \leq i \leq p\}$. Si $f|_V$ admet un extremum local en un point $a \in V$, alors

$$\exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \text{ tel que } \overrightarrow{\text{grad}} f(a) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\text{grad}} f_i(a).$$

Les coefficients $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ s'appellent les multiplicateurs de Lagrange au point a.

3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, où $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition 12

- Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^0$ en un point $a \in U$, si elle est continue en ce point.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$, une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ en un point $a \in U$, si f admet au voisinage de a des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ toutes de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ en a.
- Une application $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un point $a \in U$, si f est de classe $\mathcal{C}^k$ en a, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- L'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur U se note $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$, en particulier

$$\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p).$$

Proposition 10

- Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur U et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, ainsi $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}^p)$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
- La compose de deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

3.4 $\mathcal{C}^k$-difféomorphismes.

Définition 13

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V, toute application bijective $f : U \longrightarrow V$ tel que f et f^{-1} soient de classe $\mathcal{C}^k$.

Pour $k = 0$, on parle plutôt d'homéomorphisme.

Remarque 9

Rappelons le résultat suivant:

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ continue bijective, alors f^{-1} est continue, donc f est un homéomorphisme.

Théorème 15

Théorème d'inversion locale: Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$ et de classe $\mathcal{C}^k$. Si $\det(\mathcal{J}_f(a)) \neq 0$ en un point $a \in U$, alors il existent U_1 voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$, V_1 voisinage ouvert de $f(a)$ dans $\mathbb{R}^p$ tel que f soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U_1 sur V_1.

Théorème 16

Théorème d'inversion globale: Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : U \longrightarrow V$ bijective et de classe $\mathcal{C}^k$, alors:

$$f \text{ est un } \mathcal{C}^k\text{-difféomorphisme de } U \text{ sur } V \text{ si et seulement si } \det(\mathcal{J}_f(a)) \neq 0$$

Dans ce cas

$$(df_a)^{-1} = d(f^{-1})_{f(a)}, \ \forall a \in U$$

Théorème 17

Théorème des fonctions implicites: Soit $n \geq 2$ et $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$ tel que $f(a) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$, alors ils existent U_1 voisinage ouvert de $a' = (a_1, \cdots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant a_n et $\varphi : U_1 \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^k$ tels que, $\forall x \in V_1$, $\forall y \in I$, on a:

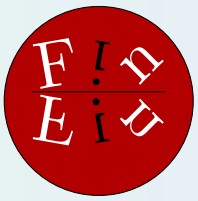
$$f(x, y) = 0 \Longleftrightarrow y = \varphi(x)$$

Remarque 10

Cas particulier du théorème des fonctions implicites. $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ et $(a,b) \in U$ tel que $f(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$, alors $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ et $\varphi : I =]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_2[\longrightarrow J =]b-\varepsilon_2, b+\varepsilon_2[$ de classe $\mathcal{C}^k$ telles que $\forall x \in I,\ \forall y \in J$, on a: $f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$. En particulier les courbes d'équation $y = \varphi(x)$ et $f(x,y) = 0$ coïncident au voisinage du point (a,b) dont ont même tangente:

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

Ainsi, en posant $A = (a,b)$ et $M = (x,y)$, la relation devient $\overrightarrow{\text{grad}} f(A) \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, c'est à dire que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a,b)$ (quand il est non nul) est orthogonal au point (a,b) l'équipotentielle d'équation $f(x,y) = 0$.

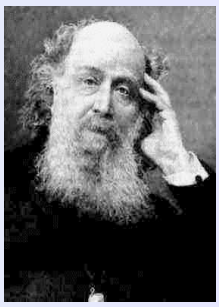


Dualité

Chapitre 6

Blague du jour

• Quelles sont les fonctions les plus homogènes, mais les moins sérieuses des mathématiques?
-Réponse: les polynômes du second degré.
• Comment faire entrer un éléphant dans un frigo par les analystes?
-Réponse: Différenciez-le et faites-le entrer dans le frigo. Puis intégrez-le, toujours dans le frigo.



James Joseph Sylvester (1814-1897)

Mathématicien du jour

Mathématicien et géomètre anglais. Il a travaillé avec Arthur Cayley sur les formes algébriques, particulièrement sur les formes quadratiques et leurs invariants et la théorie des déterminants. Il a introduit le terme de matrice et la fonction indicatrice d'Euler. Il a reçu la Royal Medal et la Médaille Copley.

Dans tout le résumé $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie gale $\mathbf{n}$.

1 Formes linéaires

1.1 Formes linéaires et hyperplans

Définition 1

On appelle forme linéaire sur $\mathbf{E}$ toute application linéaire $\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{E} \longrightarrow \mathbb{K}$. L'ensemble $\mathbf{LiE}, \mathbb{K}$ des formes linéaires sur $\mathbf{E}$, se note $\mathbf{E}^*$ et s'appelle le dual de $\mathbf{E}$, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de même dimension que $\mathbf{E}$.

Définition 2

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E, vérifiant $\dim H = \dim E - 1$.

Théorème 1

Si H est un hyperplan de E et $x_0 \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.

Théorème 2

- Si φ est une forme linéaire non nulle sur E, alors $\ker \varphi$ est un hyperplan de E.
- Inversement, si H est un hyperplan de E, alors il existe φ, une forme linéaire non nulle sur E, tel que $H = \ker \varphi$.

Théorème 3

Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E tel que $\ker \varphi = \ker \psi$, alors $\exists \lambda \neq 0$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

Remarque 1

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et φ une forme linéaire non nulle sur E, alors pour tout $x \in E$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $\varphi(x) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, où $a_i = \varphi(e_i)$
Ainsi, dans une base fixe, tout hyperplan H de E a une équation de type:

$$H : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

Cette équation est unique, à une constante multiplicatives près.

1.2 Base duale

Théorème 4

Étant donné un vecteur e non nul d'un espace vectoriel E, il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.
En particulier, le vecteur nul est le seul vecteur de E sur lequel toutes les formes linéaires sont nulles.

Théorème 5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors il existe une unique base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ de E^*, vérifiant:

$$\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{(Symbole de Kronecker)}$$

On pose $\varphi_i = e_i^*$ et $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ s'appelle la base duale de $\mathcal{B}$ dans E^*

Remarque 2

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors sa base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ dans E^*, est définie par la relation suivante: Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a: $e_i^*(x) = x_i$.

1.3 Codimension et équations d'un sous-espace vectoriel

Définition 3

Soit F un sous-espace vectoriel de E, sa codimension est l'entier naturel not codim$F$, défini par la relation suivante: codim$F$ = dim E − dim F.

Théorème 6

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = p$, alors il existe $n - p$ formes linéaires indépendantes $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-p})$ dans E^* tel que : $F = \bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i$.

Remarque 3

Tout sous-espace vectoriel F de E tel que $\dim F = p$, admet $n - p$ équations indépendantes de la forme:

$$F : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + \cdots + a_{n-p,n}x_n = 0 \end{cases}$$

Remarque 4

Tout sous-espace affine $\mathcal{F}$ de E tel que $\dim \mathcal{F} = p$, admet $n - p$ équations indépendantes de la forme:

$$\mathcal{F} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + \cdots + a_{n-p,n}x_n = b_{n-p} \end{cases}$$

Théorème 7

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille d'éléments de E et u l'application linéaire de E^* dans $\mathbb{K}^p$, définie par la relation suivante:

$$\begin{array}{rccc} u : & E^* & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & \varphi & \longmapsto & (\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_p)) \end{array}$$

On a les résultats suivants:

- rg($\mathcal{B}$) = rg(u).

- $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est libre dans E si et seulement si u est surjective.
- $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est génératrice dans E si et seulement si u est injective.
- $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E si et seulement si u est un isomorphisme.

Théorème 8

Soit $\mathcal{C} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ une famille d'éléments de E^* et u l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^p$, définie par la relation suivante:

$$\begin{array}{rccc} u: & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{array}$$

On a les résultats suivants:

- $\text{rg}(\mathcal{C}) = \text{rg}(u)$.
- $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est libre dans E^* si et seulement si u est surjective.
- $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est génératrice dans E^* si et seulement si u est injective.
- $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est une base de E^* si et seulement si u est un isomorphisme.

Théorème 9

Soit $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E, on a le résultat suivant:

$$\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_i \subset \ker \varphi \iff \exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } \varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \varphi_i$$

1.4 Applications

a Systèmes linéaires

Théorème 10

Soit $(H_1, H_2, \dots, H_p)$ des hyperplans de E, alors $F = \bigcap_{i=1}^{p} H_i$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F \geq n - p$ et $\text{codim} F \leq p$, avec égalité si et seulement si les H_i sont définis par des équations linéairement indépendantes.

Théorème 11

L'ensemble de solutions du système linéaire

$$\mathcal{S}:\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{p,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{p,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim F \geq n-p$ et $\operatorname{codim} F \leq p$, avec galit si et seulement si les quations de $\mathcal{S}$ sont linéairement indépendantes.

Théorème 12

L'ensemble de solutions du système linéaire

$$\mathcal{S}:\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \vdots & & & & \\ a_{p,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{p,n}x_n & = & b_p \end{cases}$$

est un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim \mathcal{F} \geq n-p$ et $\operatorname{codim} \mathcal{F} \leq p$, avec égalité si et seulement si les équations de $\mathcal{S}$ sont linéairement indépendantes.

b Base antiduale

Théorème 13

Soit $(\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ une base de E^*, alors il existe une unique base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que $\varphi_i = e_i^*$. $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ s'appelle la base antiduale de $(\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

Formes quadratiques

Dans toute la suite de ce résumé $\mathbb{K}$ désigne le corps rel $\mathbb{R}$, et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie gale n.

2.1 Généralités

Définition 4

Soit $\begin{array}{rccc} \phi: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x,y) & \longmapsto & \phi(x,y) \end{array}$

- On dit que ϕ est bilinéaire si elle vérifie les deux propriétés suivantes:
  - $\phi(x_1+\lambda x_2,y)=\phi(x_1,y)+\lambda\phi(x_2,y),\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(x_1,x_2,y)\in E^3$.
  - $\phi(x,y_1+\lambda y_2)=\phi(x,y_1)+\lambda\phi(x,y_2),\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(y_1,y_2,x)\in E^3$.

  Autrement dit:
  - Pour $x\in E$ fixé, l'application partielle associe $\phi_x:\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&\mathbb{K}\\ y&\longmapsto&\phi_x(y)=\phi(x,y)\end{array}$ est linéaire.
  - Pour $y\in E$ fixé, l'application partielle associe $\phi_y:\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&\mathbb{K}\\ x&\longmapsto&\phi_y(x)=\phi(x,y)\end{array}$ est linéaire.
- On dit que ϕ est symétrique si elle vérifie la propriété suivante:

$$\phi(x,y)=\phi(y,x),\ \forall(x,y)\in E^2.$$

  Autrement dit: $\phi_x(y)=\phi_y(x),\ \forall(x,y)\in E^2$.

Remarque 5

- L'ensemble des formes bilinéaires sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
- L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de celui des formes bilinéaires.

Définition 5

On appelle forme quadratique sur E, toute application $q:E\longrightarrow\mathbb{K}$ telle que, l'application ϕ définie par la relation suivante: $\phi:\begin{array}{ccc}E\times E&\longrightarrow&\mathbb{K}\\ (x,y)&\longmapsto&\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))\end{array}$ soit bilinéaire.
ϕ s'appelle forme polaire associe q, elle est symétrique par construction.

Remarque 6

- L'ensemble des formes quadratiques sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
- Toute forme quadratique sur E vérifie les deux propriétés suivantes: $q(0_E)=0$ et $q(\lambda x)=\lambda^2q(x),\ \forall x\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}$.

Théorème 14

Soit $\phi:E\times E\longrightarrow\mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique, alors l'application q définie par la relation suivante: $q:\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&\mathbb{K}\\ x&\longmapsto&\phi(x,x)\end{array}$ est une forme quadratique sur E, vérifiant les égalités suivantes dites de polarisation:

$$\begin{aligned}\phi(x,y)&=\frac{1}{4}(q(x+y)-q(x-y))\\&=\frac{1}{2}(q(x+y)-q(x)-q(y))\end{aligned}$$

Théorème 15

L'application qui une forme bilinéaire symétrique ϕ associe la forme quadratique $q : x \mapsto \phi(x,x)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 16

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, et q sa forme quadratique associe. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on pose

$$M = (\phi(e_i, e_j))_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{matrice de } \phi \text{ dans la base } \mathcal{B}$$

Pour tout $(x,y) \in E^2$ de coordonnés respectifs $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$, on a:

$$\phi(x,y) = {}^tX \cdot M.Y \quad , \quad q(x) = {}^tX \cdot M.X$$

M s'appelle la matrice associée ϕ et q relativement à la base $\mathcal{B}$ et se note

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(q)$$

Théorème 17

Les matrices d'une forme bilinéaire symétrique ϕ et de sa forme quadratique associe q dans deux bases différentes sont équivalentes, en particulier ont même rang.
Ce rang commun s'appelle le rang de ϕ et q et se note $\mathrm{rg}(\phi)$ et $\mathrm{rg}(q)$.

Plus précisément si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\phi)$ et $P = P_{\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}'}$, on a:

$$M' = {}^tP \cdot M \cdot P$$

Remarque 7

Expressions analytiques: Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, et q sa forme quadratique associe. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E, on pose $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ leur matrice relativement la base $\mathcal{B}$.
Pour tout $(x,y) \in E^2$ de coordonnes respectifs $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}, Y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$, on a:

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{i,j}x_iy_j \\ q(x) &= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} m_{i,j}x_ix_j \end{aligned}$$

La méthode de dédoublement d'indice permet de retrouver l'expression analytique de ϕ partir de celle de q, en remplaçant x_i^2 par x_iy_i et x_ix_j par $\frac{x_iy_j+x_jy_i}{2}$.

2.2 Formes quadratiques non dégénérées.

Définition 6

Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associe.

- On dira que ϕ et q sont positives si et seulement si $q(x) = \phi(x,x) \geq 0, \forall x \in E$.
- On dira que ϕ et q sont définies si et seulement si $q(x) = \phi(x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E, \forall x \in E$.
- On dira que ϕ et q sont dégénérés si et seulement si $\exists x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $\phi(x,y) = 0,\ \forall y \in E$.
- On dira que ϕ et q sont non dégénérées si et seulement si $\forall x \in E$, on a $\phi(x,y) = 0,\ \forall y \in E \Longrightarrow x = 0_E$.

Théorème 18

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Si ϕ une forme bilinéaire symétrique positive et q sa forme quadratique associe, alors:

$$|\phi(x,y)|^2 \leq q(x) \cdot q(y)$$

Si de plus, ϕ est définie, alors on a galit si et seulement si $\{x,y\}$ est lie.

Remarque 8

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, on a les rsultats suivants:

- ϕ est dégénérée si et seulement si $\exists x \neq 0_E$ tel que $\phi_x = 0$.
- Si ϕ est non dégénérée, alors l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \phi_x \end{array}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel .

Définition 7

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associe. On appelle noyau de q le sous-espace vectoriel de E, not $\ker q$ défini par la relation suivante:

$$\ker q = \{x \in E \text{ tel que } \phi(x,y) = 0\ \forall y \in E\}$$

Théorème 19

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, q sa forme quadratique associe et et M leur matrice dans une base $\mathcal{B}$ de E. Soit $x \in E$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ les coordonnés de x dans $\mathcal{B}$, alors

$$x \in \ker q \Longleftrightarrow X \in \ker M$$

Théorème 20

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique, q sa forme quadratique associe et M leur matrice dans une base fixe de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- q est non dégénérée.
- $\ker q = \{0\}$.
- $\mathrm{rg} M = n$.
- M est inversible.

2.3 Orthogonalité.

Définition 8

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associe.

- On dit que deux éléments de E, x et y sont q-orthogonaux si et seulement si $\phi(x,y) = 0$.
- Soit F un sous-espace vectoriel de E, on appelle le q-orthogonal de F, le sous-espace vectoriel de E, note $F^{\perp}$ ou F°, défini par la relation suivante:

$$F^{\circ} = \{x \in E \text{ tel que } \phi(x,y) = 0,\ \forall y \in F\}$$

Remarque 9

Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique et q sa forme quadratique associe. Soit $x \in E$. Si q est en plus non dégénérée, alors

$$\phi(x,y) = 0\ \forall x \in E \Longrightarrow x = 0_E.$$

Autrement dit: $E^{\perp} = \{0_E\}$.

Théorème 21

Toute forme quadratique q admet au moins une base orthogonale $\mathcal{B}$, dans ce cas $\mathcal{M}_q(\mathcal{B})$ est diagonale.

Théorème 22

Loi d'inertie de Sylvester. Toute forme quadratique q, se décompose sous la forme

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i^2(x) - \sum_{i=1}^{q} g_i^2(x)$$

où f_i et g_i sont des formes linéaires linéairement indépendantes. Le couple (p,q) est unique, s'appelle signature de q et vérifie $p + q = \mathrm{rg}(q)$.

Remarque 10

Décomposition de Gauss d'une forme quadratique en somme de carrés. Soit une forme quadratique q non nulle, d'expression analytique:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} a_{ij}x_ix_j$$

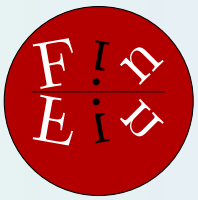
- 1ér cas: $\exists i$ tel que $a_{ii} \neq 0$, par exemple $a_{11} \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} q(x) &= ax_1^2 + x_1B(x_2,\cdots,x_n) + C(x_2,\cdots,x_n) \\ &= a\left(x_1 + \frac{B(x_2,\cdots,x_n)}{2a}\right)^2 + C(x_2,\cdots,x_n) - \frac{B(x_2,\cdots,x_n)^2}{4a^2} \\ &= aX_1^2 + q_1(x_2,\cdots,x_n) \end{aligned}$$

- 2ème cas: $\forall i a_{ii} = 0$ et $\exists i \neq j$ tel que $a_{ij} \neq 0$, par exemple $a_{12} \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} q(x) &= ax_1x_2 + x_1B(x_3,\cdots,x_n) + x_2C(x_3,\cdots,x_n) + D(x_3,\cdots,x_n) \\ &= a\left(x_1 + \frac{C(x_3,\cdots,x_n)}{a}\right)\cdot\left(x_2 + \frac{B(x_3,\cdots,x_n)}{a}\right) + \left(D - \frac{BC}{a}\right)(x_3,\cdots,x_n) \\ &= \frac{a}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{B+C}{a}\right)^2 - \frac{a}{4}\left(x_1 - x_2 + \frac{C-B}{a}\right)^2 + q_2(x_3,\cdots,x_n) \\ &= \lambda_1X_1^2 + \lambda_2X_2^2 + q_2(x_3,\cdots,x_n) \end{aligned}$$

  Puis on reprend la même discussion sur les coefficients des formes quadratiques $q_1(x_2,\cdots,x_n)$ ou $q_2(x_3,\cdots,x_n)$



Coniques-Quadriques

Chapitre 7

Blague du jour

- Deux canards sont sur une rive, ils se regardent. L'un dit: " Coin Coin !!" L'autre dit: " Ben merde! J'allais dire la même chose!!"
-Comment fait-on aboyer un chat? On lui donne une tasse de lait et il la boit!
Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ? L'Allemand examine le moteur, L'Anglais examine le cuir, Le Grec examine l'échappement, L'Italien examine le Klaxon.

Nicolas Copernic (1473-1543)

Mathématicien du jour

Médecin et astronome polonais. Il est l'auteur célèbre de la théorie selon laquelle le Soleil se trouve au centre de l'Univers (héliocentrisme) et la Terre - que l'on croyait auparavant centrale - tourne autour de lui. Les conséquences de cette théorie - dans le changement profond des points de vue scientifique, philosophique et social qu'elle imposa - sont parfois baptisées révolution copernicienne. Copernic emprunte la plupart des éléments mathématiques à Ibn al Shatir, mais en changeant l'origine (le soleil au lieu de la terre).

1 Coniques.

1.1 Équation cartésienne.

a Introduction:

Une conique est l'intersection d'un cône avec un plan.

b Equation cartésienne:

La forme générale de l'équation cartésienne d'une conique est:

$$f(x,y) = \underbrace{ax^2+2bxy+cy^2}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{dx+ey}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{f}_{\text{Cte}} = 0$$

c Centre de symétrie:

solution du système $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0.$

d Asymptotes:

solutions de l'équation $ax^2+2bxy+cy^2=0$, (partie quadratique nulle).

e Équation de la tangente:

en un point (x_0,y_0), on remplace dans l'équation cartésienne x^2 par xx_0, y^2 par yy_0, xy par $\frac{xy_0+x_0y}{2}$, x par $\frac{x+x_0}{2}$ et enfin y par $\frac{y+y_0}{2}$.

f Équation réduite dans un repère orthonormé et paramétrage:

- Ellipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, on pose $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$.
- Hyperbole: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, on pose $\begin{cases} x(t) = a\cosh t \\ y(t) = b\sinh t \end{cases}$.
- Parabole: $y^2=2px$, on pose $\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}$.

g Comment trouver l'équation réduite dans un repère orthonormé:

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ la matrice associée à la forme quadratique.

- 1ère étape: diagonaliser la matrice A dans une b.o.n : valeurs et vecteurs propres.
- 2ème étape : Prendre $X = {}^t PX_1$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ (anciennes variables), P matrice où on exprime les vecteurs propres dans la base initiale, et $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ (nouvelles variables).
- Exprimer x et y en fonction de x_1 et y_1, injecter dans l'équation cartésienne initiale de la conique puis en déduire la forme réduite.

h Genre de la conique:

On discute sur $\Delta = \det A$.

- $\Delta > 0$, (A définie positive), la conique est une ellipse si $f > 0$, un point si $f = 0$ et vide si $f < 0$.
- $\Delta < 0$, (A définie négative), la conique est une hyperbole si $f \neq 0$ ou la réunion de deux droites si $f \neq 0$.
- $\Delta = 0$, (A dégénérée), la conique est une parabole ou vide ou droite ou réunion de deux droites parallèles.

i Axes de symétrie:

Sont dirigés par les vecteurs propres de la matrice A associés à des valeurs propres non nulles.

1.2 Propriétés géométriques

Définition 1

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point n'appartenant pas $\mathcal{D}$ et e un réel strictement positif. On appelle conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que :

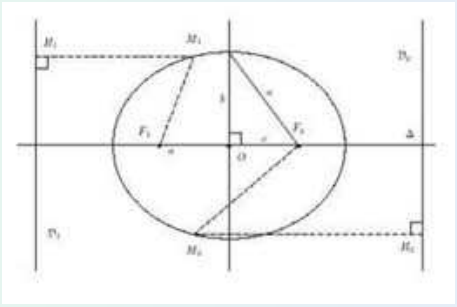
$$MF = e\,d(M, \mathcal{D})$$

- Si $e < 1$, on parle d'ellipse.

- Si $e = 1$, on parle de parabole.
- Si $e > 1$, on parle d'hyperbole.

a Ellipse ($e < 1$).

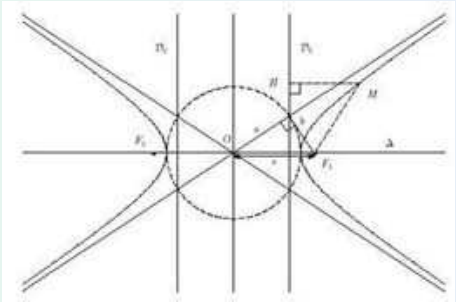
- Équation réduite: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a \geq b$.
- Paramètres: $c^2 = a^2 - b^e$
  $c = ea$
  $p = \frac{b^2}{a}$
  $h = d(F_1, D_1) = \frac{b^2}{c}$
  $p = eh$
- Foyers: de coordonnés $(\pm c, 0)$.
- Directrice: d'équation $x = c + h$ et $x = -c - h$.



b Hyperbole ($e > 1$).

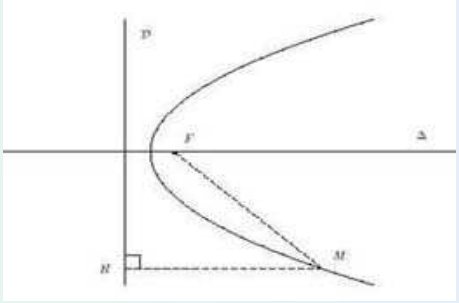
- Équation réduite: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a \geq b$.
- Paramètres: $c^2 = a^2 + b^e$
  $c = ea$
  $p = \frac{b^2}{a}$
  $h = d(F_1, D_1) = \frac{b^2}{c}$
  $p = eh$
- Foyers: de coordonnés $(\pm c, 0)$.

- Directrice: d'équation $x = c + h$ et $x = -c - h$.



C Parabole ($e = 1$).

- Équation réduite: $y^2 = 2px$.
- Foyer: de coordonnés $(\frac{p}{2}, 0)$.
- Directrice: d'équation $x = -\frac{p}{2}$.



2 Quadriques.

2.1 Généralités.

a Equation cartésienne:

Une quadrique est une surface de l'espace définie par équation cartésienne implicite de la forme:

$$f(x,y) = \underbrace{ax^2+by^2+cz^2+2dxy+2exz+2fyz}_{\text{partie quadratique}} + \underbrace{\alpha x+\beta y+\gamma z}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\lambda}_{\text{Cte}} = 0$$

b Centre de symétrie:

solution du système $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = 0.$

c Équation du plan tangent:

en un point (x_0,y_0,z_0), on utilise le principe de dédoublement: on remplace dans l'équation cartésienne x^2 par xx_0, y^2 par yy_0, xy par $\dfrac{xy_0+x_0y}{2}$, x par $\dfrac{x+x_0}{2}$ et enfin y par $\dfrac{y+y_0}{2}$. De même pour les termes contenant z.

d Remarque:

- L'intersection d'une quadrique avec un plan est une conique.
- Une quadrique de révolution est une surface obtenue par la rotation d'une conique autour de l'un de ses axes de symétrie.

  Exemples:

  - Le paraboloïde de révolution, obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe.
  - L'ellipsoïde de révolution, obtenu en faisant tourner une ellipse autour d'un de ses axes. Il sera en forme de "ballon de rugby" si l'axe de révolution est l'axe focal de l'ellipse et en forme de "soucoupe" si l'axe de révolution est l'axe non focal de l'ellipse.

– L'hyperboloïde de révolution à une nappe, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe non focal.
– L'hyperboloïde de révolution à deux nappes, obtenu en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

2.2 Formes réduites.

a Cas possibles

1. Le paraboloïde elliptique:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$
Si $a=b$, il est de révolution d'axe (Oz).
Paramétrage: $\begin{cases} x=at\cos\theta \\ y=bt\sin\theta \\ z=\dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$

---

2. Le paraboloïde hyperbolique:
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz.$$
Il n'est jamais de révolution.
Paramétrage: $\begin{cases} x=at\cosh\theta \\ y=bt\sinh\theta \\ z=\dfrac{t^2}{2p} \end{cases}$

---

3. L'ellipsoïde:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Si $a=b$, il est de révolution d'axe (Oz).
Paramétrage: $\begin{cases} x=a\cos\varphi\cos\theta \\ y=b\cos\varphi\sin\theta \\ z=c\sin\varphi \end{cases}$

---

4. L'hyperboloïde à une nappe:
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$
Si $a=b$, il est de révolution d'axe (Oz).

Paramétrage: $\begin{cases} x = a\cosh\varphi\cos\theta \\ y = b\cosh\varphi\sin\theta \\ z = c\sinh\varphi \end{cases}$

---

5. L'hyperboloïde à deux nappe:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Si $a=b$, il est de révolution d'axe (Oz).

Paramétrage: $\begin{cases} x = a\sinh\varphi\cos\theta \\ y = b\sinh\varphi\sin\theta \\ z = c\cosh\varphi \end{cases}$

---

6. Cône elliptique:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Paramétrage: $\begin{cases} x = at\cos\theta \\ y = bt\sin\theta \\ z = ct \end{cases}$

---

7. Cylindre elliptique:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Paramétrage: $\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \\ z = t \end{cases}$

---

8. Cylindre hyperbolique:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Paramétrage: $\begin{cases} x = a\cosh\theta \\ y = b\sinh\theta \\ z = t \end{cases}$

---

9. Cylindre parabolique:

$$y^2=2px.$$

Paramétrage: $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \\ z = u \end{cases}$

b Comment trouver l'équation réduite dans un repère orthonormé:

Soit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ la matrice associée à la forme quadratique.

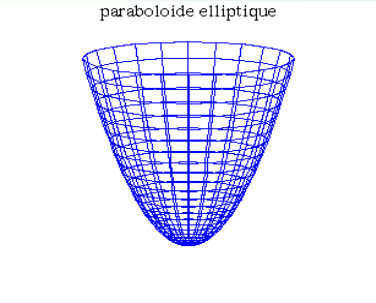
- 1ère étape: diagonaliser la matrice $\mathbf{A}$ dans une b.o.n : valeurs et vecteurs propres.
- 2ème étape : Prendre $\mathbf{X} = {}^t\mathbf{P}\mathbf{X_1}$ où $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (anciennes variables), $\mathbf{P}$ matrice où on exprime les vecteurs propres dans la base initiale, et $\mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ (nouvelles variables).
- Exprimer x, y et z en fonction de x_1, y_1, z_1, injecter dans l'équation cartésienne initiale de la quadrique puis en déduire la forme réduite.

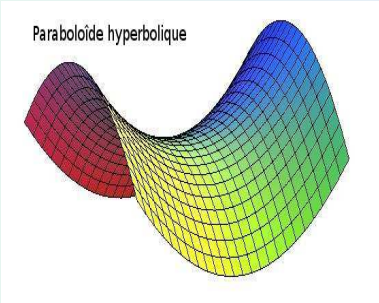
c Comment reconnaître le type de la quadrique:

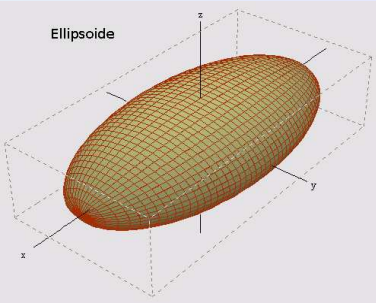
- Si une des variables est absente, c'est un cylindre.

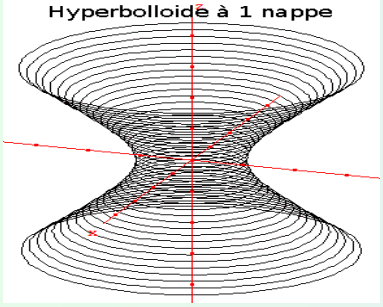
  Si la matrice $\mathbf{A}$ a:
- 2 valeurs propres égales non nulles, alors la quadrique est de révolution.
- 3 valeurs propres strictement de même signe, on a : un ellipsoïde, un point ou le vide.
- 2 valeurs propres strictement de même signe et une nulle, on a: un paraboloïde elliptique, un cylindre elliptique, une droite ou le vide.
- 2 valeurs propres strictement de signes différents et une nulle, on a: un paraboloïde hyperbolique, un cylindre hyperbolique, 2 plans sécants.
- 2 valeurs propres strictement d'un signe, la troisième strictement de l'autre, on a: un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône.
- une valeur propre non nulle et 0 valeur propre double, on a: un cylindre parabolique, 2 plans parallèles, un plan ou le vide.

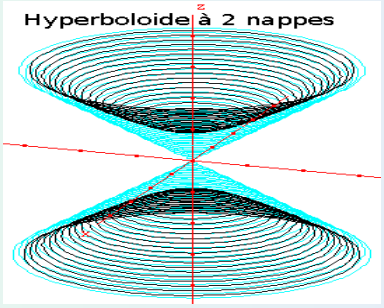
d Figures: les 9 quadriques en images.

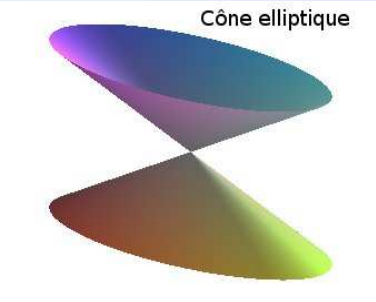


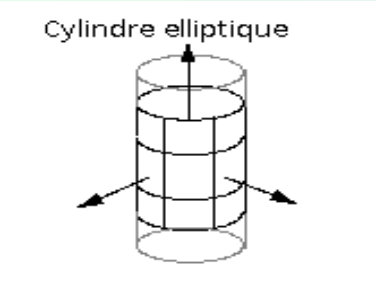


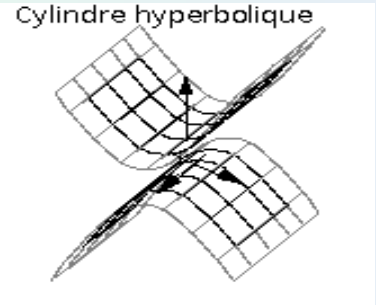


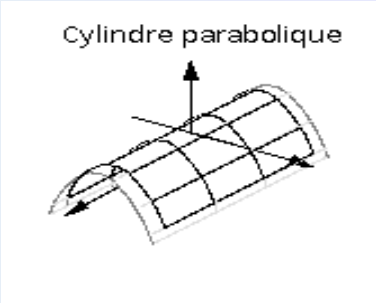












Espaces vectoriels euclidiens

Chapitre 8

Blague du jour

Êtes-vous accroc à l'Internet ? La réponse serait oui si:
- A trois heures du matin, vous vous levez pour un besoin pressant et regardez en revenant si vous avez reçu des mails.
- Vous inclinez la tête à gauche et à quand vous souriez
- Sur la porte de la cuisine est écrit: "upload"
- Sur la porte des toilettes est écrit: "download"

Euclide (-325, -265 Av-J.C)

Mathématicien du jour

Mathématicien de la Grèce antique ayant probablement vécu en Afrique (Alexandrie d'Égypte), auteur des Éléments, qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes. Malheureusement, on ne sait rien, ou presque, de celui que l'on peut considérer comme le plus grand enseignant de mathématiques de l'histoire.

Dans tout le résumé de cours, $\mathbf{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension quelconque.

1 Produit scalaire.

1.1 Généralités.

Définition 1

Cas réel.
On appelle produit scalaire réel sur $\mathbf{E}$ toute forme biliéaire définie sur $\mathbf{E}\times\mathbf{E}$ symétrique définie positive.
Autrement dit une application $\langle,\rangle:\mathbf{E}\times\mathbf{E}\to\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :
Bilénaire:

$\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \lambda \langle x_2, y \rangle, \forall (x_1, x_2, y) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \lambda \langle x, y_2 \rangle, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Symétrique: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle . \forall (x, y) \in E^2$.
Définie: $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
Positive: $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$.

Définition 2

Cas complexe.
On appelle produit scalaire Complexe sur E toute forme sesquilinéaire définie définie positive sur $E \times E$. Autrement dit une application $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes:

$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \ \forall (x, y) \in E^2$.
linéaire à droite:
$\langle x, y_1 + \lambda y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \lambda \langle x, y_2 \rangle, \forall (x, y_1, y_2) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
Définie: $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
Positive: $\langle x, x \rangle \geq 0, \forall x \in E$.

Vocabulaire.

- On appelle espace pré hilbertien tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
- On appelle espace hermitien tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel , de dimension finie, muni d'un produit scalaire complexe.
- On appelle espace hermitien tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel , de dimension finie, muni d'un produit scalaire réel.

Dans toute la suite, E est un espace pré hilbertien.

1.2 Normes et distances.

On définit alors la norme euclidienne sur E ainsi: pour tout $x \in E$ on pose

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

et on a les propriétés suivantes: $\forall (x, y) \in E^2$

- Cas réel: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$
  $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$
- Cas complexe: $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle)$
  $\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Im}(\langle x, y \rangle)$

- Inégalité de Cauchy-Schwartz: $|< x, y >| \leq \|x\| \, \|y\|$ avec égalité si et seulement si $\{x, y\}$ liée.

- Identité du parallélogramme. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

- Identités de polarisation.

  – Cas réel: $$< x, y > = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

  – Cas complexe: $$\mathrm{Re}(< x, y >) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$
  $$\mathrm{Im}(< x, y >) = \frac{\|x-iy\|^2 - \|x+iy\|^2}{4} = \frac{\|x-iy\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

- Inégalité triangulaire. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

- Théorème de Pythagore: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longleftrightarrow < x, y >= 0$.

Distance euclidienne. On définit alors la distance euclidienne sur E^2 de la façon suivante: pour tout $(x, y) \in E^2$ on pose:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

On a les propriétés suivantes: $\forall (x, y, z) \in E^3$.
$d(x, x) = 0$
$d(x, y) = d(y, x)$
$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ Inégalité triangulaire

1.3 Orthogonalité.

- Vecteurs unitaires. Ce sont les $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$.

  Tout $x \neq 0_E$ peut être normalisé pour obtenir lélement unitaire, $\frac{x}{\|x\|}$.

- Vecteurs orthogonaux. On dit que deux éléments $(x, y) \in E^2$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, càd: $< x, y >= 0$, on écrit alors: $x \perp y$.

- Famille orthogonale. On appelle famille orthogonale, toute famille $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ formée par des éléments deux à deux orthogonaux, càd: $< e_i, e_j >= 0$ si $i \neq j$.

- Famille orthonormale. On appelle famille orthonormale, toute famille orthogonale $(e_i)_{1 \leq i \leq m}$ formée par des éléments tous unitaires càd: $< e_i, e_j >= \delta_{i,j}$.

Théorème 1

Toute famille orthonormale est libre et toute famille orthogonale ne contenant pas d'élément nul est libre.

Théorème 2

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. De toute famille $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E, on peut construire une famille orthogonale $(e'_i)_{1\leq i\leq n}$, en posant:

$e'_1 = e_1$
$e'_2 = e_2 + \lambda e'_1$ avec λ obtenue à l'aide de la relation $< e'_2, e'_1 >= 0$
$\vdots$
$e'_n = e_2 + \lambda_1 e'_1 + \ldots + \lambda_{n-1} e'_{n-1}$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ obtenues à l'aide des relations: $< e'_n, e'_1 >= \ldots =< e'_n, e'_{n-1} >= 0$

qui vérifie en plus $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \text{Vect}(e'_1, \ldots, e'_k),\ \forall 1 \leq k \leq n$

Corollaire 1

De toute famille $\mathcal{B}$, on peut construire une famille orthogonale, voir orthonormale, $\mathcal{C}$ de même rang que $\mathcal{B}$.

Théorème 3

Théorème de Pythagore: Soit $(e_i)_{1\leq i\leq m}$ une famille orthogonale, alors:

$$\|e_1 + \ldots + e_m\|^2 = \|e_1\|^2 + \ldots + \|e_m\|^2 .$$

Dans tout la suite E est un espace euclidien ou hermitien, et les résultats énoncés ne sont pas forcement vraies en dimensions quelconque.

1.4 Bases orthonormales (b.o.n)

Théorème 4

Tout espace vectoriel euclidien ou hermitien admet un b.o.n

Théorème 5

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de E et $x, y \in E$, on a les propriétés suivantes:

1. $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$.
2. $< x, y >= \sum_{i=1}^{n} < x, e_i >< e_i, y >$.
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, e_i > |^2$.

Théorème 6

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, et $A = (a_{i,j}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $a_{i,j} =< u(e_j), e_i >$.

1.5 Supplémentaire orthogonale.

Définition 3

Soit A une partie de E, on appelle l'orthogonal de A, le sous-espace vectoriel de E, noté $A^{\perp}$, défini par $x \in A^{\perp} \Longleftrightarrow < x, y >= 0,\ \forall y \in A$.

On a en particulier $A^{\perp} = \text{Vect}(A)^{\perp}$ et $A \subset B \Longrightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

Théorème 7

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$.

En particulier $\dim F^{\perp} = \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Théorème 8

Dans un espace euclidien ou hermitien, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire unique

Théorème 9

Toute base orthonormale directe d'un sous-espace vectoriel F de E, peut être complétée pour obtenir une base orthonormale directe de E.

1.6 Projection orthogonale.

Définition 4

Soit F un sous-espace vectoriel de E, la projection p sur F parallèlement à $F^{\perp}$, s'appelle la projection orthogonale sur F.

Dans ce cas, $\forall x \in E$, on a: $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$.

Théorème 10

Soit p une application linéaire, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. p est une projection orthogonale.
2. Im $p = \ker p^{\perp}$.
3. $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle,\ \forall x, y \in E$
4. La matrice A de p dans au moins une base orthonormale directe de E est symétrique et vérifie $A^2 = A$.
5. La matrice A de p dans toute base orthonormale directe de E est symétrique et vérifie $A^2 = A$.

1.7 Application: calcul de la distance d'un point à un sous-espace vectoriel .

Principe: Soit F sous-espace vectoriel de E, $x \in E$ et $p(x)$ la projection orthogonale de x sur F, alors

$$d(x, F) = d(x, p(x))$$

Théorème 11

Si $\dim F = r$ et $(e_i)_{r+1 \leq i \leq n}$ une base orthonormale directe de $F^{\perp}$, alors $d(x, F)^2 = \sum_{i=r+1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$.

Dans toute la suite, E est un espace euclidien.

---

2 Adjoint d'un endomorphisme

2.1 Généralités.

Théorème 12

Pour toute forme linéaire φ définie sur E, il existe un unique $a \in E$ tel que $\varphi(x) = \langle a, x\rangle,\ \forall x \in E$.

Définition 5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle,\ \forall x, y \in E$. u^* s'appelle l'adjoint de u.

Proposition 1

Soit u et v deux endomorphismes de E, on a les propriétés suivantes:

1. $u^{**} = u$.
2. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe de E, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$.
4. $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.
5. u est bijective si et seulement si u^* bijective, dans ce cas $(u^*)^{-1} = \left(u^{-1}\right)^*$.
6. $\operatorname{Im} u^* = (\ker u)^\perp$ et $\ker u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

Remarque 1

Dans le cas hermitien, tous les résultats ci-dessus sont valables sauf celui de la matrice de l'adjoint u^* dans une base orthonormale directe $\mathcal{B}$ qui devient: si $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\overline{A}$.

2.2 Endomorphismes auto-adjoint et matrices symétriques.

Définition 6

Un endomorphisme u est dit auto-adjoint ou symétrique si et seulement si $u^* = u$

Théorème 13

Soit u un endomorphisme de E, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. u est auto-adjoint.
2. $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle,\ \forall x, y \in E$.
3. La matrice de u dans au moins une base orthonormale directe est symétrique.
4. La matrice de u dans toute base orthonormale directe est symétrique.

Théorème 14

. Tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable dans une base orthonormale directe . On dit qu'il est orthogonalement diagonalisable.

2.3 Automorphismes orthogonales et matrices orthogonales.

Définition 7

On appelle automorphisme orthogonal de E, toute application linéaire $u : E \to E$ qui conserve le produit scalaire. càd: $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall (x, y) \in E^2$.

Théorème 15

Soit une application linéaire $u : E \to E$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. u automorphisme orthogonal
2. u automorphisme avec $u^* = u^{-1}$.
3. u conserve le produit scalaire.
4. u conserve la norme i.e: $\|u(x)\| = \|x\|, \forall x \in E$.
5. u conserve la distance i.e: $d(u(x), u(y)) = d(x, y), \forall (x, y) \in E^2$
   On dit aussi que u est un isométrie.
6. u transforme au moins une base orthonormale directe en une base orthonormale directe .
7. u transforme toute base orthonormale directe en une base orthonormale directe .
8. $u^* = u^{-1}$.

Remarque 2

- La composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.
- La réciproque d'un automorphisme orthogonal est un automorphisme orthogonal.
- L'ensemble des automorphismes orthogonaux est sous-groupe de $GL(E)$, on l'appelle le groupe orthogonal et on le note par $O(E)$.

Remarque 3

- Si u est un automorphisme orthogonal, alors $\det u = \pm 1$, si $\det u = 1$, on dit que u est un automorphisme orthogonal direct ou positif ou parfois une rotation.

- La composée de deux automorphismes orthogonaux direct est un automorphisme orthogonal direct.
- La réciproque d'un automorphisme orthogonal direct est un automorphisme orthogonal direct.
- L'ensemble des automorphismes orthogonaux directs est sous-groupe de $\mathbf{O(E)}$, on l'appelle le groupe orthogonal spécial et on le note par $\mathbf{SO(E)}$.
- Les propriétés suivantes sont équivalentes:
  - $\mathbf{u}$ est un automorphisme orthogonal direct.
  - $\mathbf{u}$ transforme au moins une base orthonormale directe en une base orthonormale directe .
  - $\mathbf{u}$ transforme toute base orthonormale directe en une base orthonormale directe .

Définition 8

Une matrice $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si et seulement si elle vérifie l'une des relations suivantes, (qui sont d'ailleurs éequivalentes) : $\mathbf{M^tM = I_n}$ ou bien $\mathbf{MM^t = I_n}$.

Autrement dit: $\mathbf{M}$ inversible, avec $\mathbf{M^{-1} = {}^t M}$.

Proposition 2

Le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.

En particulier, L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $\mathbf{GL_n}(\mathbb{R})$, on l'appelle le groupe orthogonal d'ordre $\mathbf{n}$ et on le note $\mathbf{O(n)}$.

Théorème 16

Soit $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

- $\mathbf{M}$ est une matrice orthogonale.
- Les colonnes et lignes de $\mathbf{A}$ forment une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ pour son produit scalaire
- $\mathbf{A}$ est la matrice d'un endomorphisme orthogonale dans une base orthonormale directe
- $\mathbf{A}$ est la matrice de passage entre deux base orthonormale directe

Théorème 17

Toute matrice symétrique $\mathbf{A}$ est orthogonalement diagonalisable, i.e:

$$\exists \mathbf{P} \in \mathbf{O(n)} \text{ et } \mathbf{D} \text{diagonale telles que } \mathbf{A = {}^tPDP}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont toutes réelles.

Remarque 4

Si $M \in O(n)$, alors $\det(M) = \pm 1$. L'ensemble des matrices orthogonales directes ($\det(M) = 1$), est un sous–groupe de $O(n)$, on l'appelle le groupe spécial d'ordre n et on le note $SO(n)$.

3 Applications.

3.1 Matrice de Gram.

Définition 9

Soit $\mathcal{C} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille d'éléments de E, on appelle matrice de Gram de $\mathcal{B}$, la matrice carrée d'ordre p, notée $G(x_1, \ldots, x_p)$ et définie par la relation:

$$G(x_1, \ldots, x_p) = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq p}$$

Théorème 18

1. Soit $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille d'éléments de E, et G sa matrice de Gram. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale directe de E et A la matrice de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$, alors $G = {}^tAA$.

   En particulier: $\text{rg}\mathcal{C} = \text{rg}G$ et G est positive et est définie positive quand $\mathcal{C}$ est un base.

2. Toute matrice définie positive est la matrice de Gram d'une base de E.

3.2 Méthode des moindres carrés

Principe. On considère le système linéaire $AX = b$. Dans le cas où ce système n'admet pas de solution, on cherche x pour lequel l'erreur $\|AX - b\|$ est minimale. On se ramène à l'étude des extremum de la fonction réelle à n variables: $X \mapsto {}^tX {}^tAAx - 2{}^tx {}^tAb + {}^tbb$, dont le gradient vaut $2{}^tAAx - 2{}^tAb$, on se ramène alors à la résolution du système linéaire carré suivant: ${}^tAAx = {}^tAb$

3.3 Factorisation QR.

Théorème 19

Toute matrice carré A se décompose sous la forme $A = QR$ où Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieure. Cette factorisation est unique quand A est inversible.

3.4 Factorisation de Cholseky.

Théorème 20

Toute matrice symétrique définie positive $\mathbf{A}$, se décompose sous la forme $\mathbf{A} = \mathbf{L}^t\mathbf{L}$, où $\mathbf{L}$ est une matrice triangulaire inférieure.

4 Géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

4.1 Vocabulaire

- On appelle isométrie affine sur $\mathbb{R}^n$, toute application affine qui conserve les distances, i.e, dont l'application linéaire associée à un automorphisme orthogonal.
- On appelle déplacement affine sur $\mathbb{R}^n$, toute isométrie affine positive (directe), i.e, dont l'application linéaire associée à une rotation.
- On appelle réflexion sur $\mathbb{R}^n$, toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

4.2 Transformation orthogonales du plan.

Théorème 21

Les déplacements du plan sont soit les translations soit les rotations

Comment reconnaître un déplacement du plan à partir de son expression analytique

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

On étudie la matrice associée $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et les points fixes solutions su système $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$

Si $\mathbf{M} = \mathbf{I_2}$, alors il s'agit d'une translation de vecteur (e, f)

Sinon on vérifie d'abord que $\mathbf{M}$ est une matrice orthogonale.

Si $\det \mathbf{M} = 1$, il s'agit d'une rotation $\mathbf{r}_{\omega,\theta}$ où ω le point fixe et θ déterminée à l'aide de la relation $a = \cos\theta,\ b = \sin\theta$.
Propriétés des rotations du plan.

- $r_\theta \circ r_{\theta'} = r_{\theta+\theta'}$.
- $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$.
- $< x, y >= \|x\| \|y\| \cos\theta, \det(x,y) = \|x\| \|y\| \sin\theta, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ faisant un angle θ entre eux.
- Toute rotation du plan d'angle θ peut être décomposeé en deux réflexions dont les axes font un angle $\frac{\theta}{2}$ entre eux.
- $\det(x,y)$ est égal à la surface du parallélogramme de cotés x et y.

4.3 Transformation orthogonales de l'espace.

Théorème 22

Les déplacements de l'espace sont soit les translations soit les rotations soit les vissage

Comment reconnaître un déplacement de l'espace à partir de son expression analytique $X' = MX + b$

- Si $M = I_3$, il s'agit alors d'une translation de vecteur b.

- Sinon, on vérifie que M est une matrice orthogonale, pour cela on considère ses colonnes C_1, C_2, C_3 et on vérifier que $\|C_1\| = \|C_2\| = 1, < C_1, C_2 >=< C_1, C_3 >=< C_2, C_3 >= 0$.
Si $C_1 \wedge C_2 = C_3$, alors $\det M = 1$.

- On cherche après l'ensemble des points fixes solutions de l'équation $X = MX + b$.

- Si on trouve une droite Δ, il s'agit alors d'une rotation $r_{\Delta,\theta}$ où θ est donné par les relation $\mathrm{tr}M = 1 + 2\cos\theta$ et $\mathrm{signe}\sin\theta = \mathrm{signe}\det(\vec{i}, C_1, \vec{a}$ où $\vec{a}$ vecteur qui dirige Δ.

- Si on trouve l'ensemble vide, il s'agit alors d'un vissage, i.e $r_{\Delta,\theta} \circ t_{\vec{u}}$ tel que $\vec{u} \parallel \Delta$.

- On commence d'abord par déterminer la direction de Δ dirigé par un vecteur $\vec{a}$ solution de l'équation $MX = X$

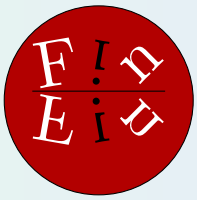
- On trouve l'équation de Δ à l'aide de la relation $(X' - X) \wedge \vec{a} = \vec{0}$.

- On trouve le vecteur $\vec{u}$ de la translation à l'aide de la formule $\vec{a} = X' - X$ où $X \in \Delta$.

- On trouve l'angle de la rotation à l'aide de la trace et le déterminant comme ci-dessus.

Propriétés des rotations de l'espace.

- Toute rotation de l'espace se décompose en produit de deux réflexions.
- $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \theta$, $\|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \sin \theta, \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ faisant un angle θ entre eux.
- Soit $\mathbf{r}$ la rotation d'axe $\boldsymbol{\Delta}$ dirigé par $\mathbf{a}$ et d'angle θ, alors $\forall \mathbf{x} \perp \boldsymbol{\Delta}$ on a: $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (\cos \theta)\mathbf{x} + (\sin \theta)\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}$.

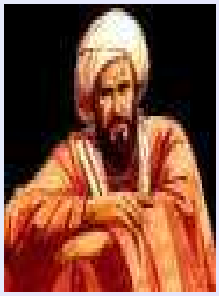


Intégration vectorielle

Chapitre 9

Blague du jour

Êtes-vous accroc l'Internet ? La réponse serait oui si:
- Votre dernière pensée avant de vous endormir est "shutdown completed".
- Vous cherchez "Cancel" quand vous appuyez sur le mauvais bouton de l'ascenseur
- Quand vous fermez une fenêtre, vos doigts se mettent en position F4.
- Quand vous avez un pépin avec votre voiture, vous quittez, fermez puis redémarrez.



Ibn Rochd-Averroés (1126-1198)

Mathématicien du jour

Abu'l-Walid Muhammad ibn Rouchd de Cordoba, au Maroc), connu aussi sous son nom latin d'Averroés, est la fois un philosophe, un théologien marocain, un juriste, un mathématicien et un médecin.
Son œuvre est reconnue en Europe Occidentale mais combattue dans le monde musulman, où ses œuvres sont brûlés et aussitôt oublie après sa mort. Certains vont jusqu'à le décrire comme l'un des fondateurs de la pensée laïque en Europe de l'Ouest.

1 Intégration sur un segment

1.1 Fonctions en escaliers

a Subdivision d'un segment

Définition 1

On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ tel que $x_0 = a, x_n = b$.

On dit que $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si elle existe une subdivision de $[a,b]$, dite adapte φ, tel que φ est constante sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extrémités gauche et droite.

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

b Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2

Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, et $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ adapte φ, et λ_i la constante prise par φ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ alors la somme
$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x_{i+1}-x_i)$ ne dépend pas du choix de σ on l'appelle alors l'intégrale de φ sur $[a,b]$ et on la note par
$\int_{[a,b]} \varphi$ ou bien $\int_a^b \varphi(t)dt$

1.2 Fonctions continues par morceaux

a Approximation d'une fonction continue par morceaux l'aide de fonctions en escaliers

Définition 3

On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si elle existe une subdivision de $[a,b]$, dite adapte f, tel que f est continue sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extrémités.
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Théorème 1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, alors $\forall \varepsilon > 0$ ils existent φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

b Propriétés de l'intégrale

- Linaire: $\int_{[a,b]} f + \lambda g = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$.
- Positif: $f \geq 0 \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \geq 0$.

- Croissant: $f \leq g \Longrightarrow \int_{[a,b]} f \leq 0 \int_{[a,b]}$.
- Relation de CHASLES. $\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]}$.
- $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- $\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$. Inégalité de la moyenne.

c Cas des fonctions continues

Théorème 2

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue positive, alors: $\int_{[a,b]} f = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $[a, b]$.

Théorème 3

Inégalité de Cauchy-SchwartzSoit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues, alors $\left(\int_{[a,b]} fg\right) \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Avec égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

1.3 Primitive d'une fonction continue

Définition 4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, on appelle primitive de f sur $[a, b]$ toute fonction F de classe C^1 sur $[a, b]$ telle que $F' = f$.

Théorème 4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue alors l'application F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et tout autre primitive G de f s'obtient à l'aide de la formule $G(x) = \int_a^x f(t)dt + G(a)$.

Corollaire 1

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 alors:

$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ noté souvent $[f]_a^b$.

Corollaire 2

Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 alors:

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$ Intégration par parties.

Corollaire 3

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [a, b] \to R$ de classe C^1 alors $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, en posant le changement de variable $u = \varphi(t)$.

Formules de Taylor :

On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1}, on a les résultats suivants:

- Formule de Taylor avec reste intégral: $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$
- Inégalite de Taylor-Lagrange: $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$.

1.4 Calcul approché d'intégrales

a Sommes de Riemann

Théorème 5

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$$

Intéprétation. En posant $R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$, appelée somme de Riemann, on a alors $R_n(f) = \int_a^b \varphi(t)dt$, avec φ en escalier sur $[a, b]$ égale à $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ sur chaque intervalle

$\left]a+k\frac{b-a}{n}, a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right[$ ainsi on approche $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide de celui d'une fonction en escalier qui est somme de surfaces de rectangles.

Remarque 1

Le théorème s'écrit encore:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)dt$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)dt.$$

Le cas le plus pratique est $a=0, b=1$, le théorème s'écrit alors:

$$\lim_{n\to+1}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(t)dt$$

qu'on peut lire ainsi la moyenne de Césaro (arithmétique) converge vers l'intégrale.

b Méthode des trapézes

Le principe est d'approcher $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide de $T_n(f)=\int_a^b \varphi(t)dt$ où φ affine par morceaux sur $[a,b]$ qui coïncide (interpole) avec aux extremités $x_k=a+k\frac{b-a}{n}$ avec $0\leq k\leq n$. On a alors le résultat suivant:

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^2, alors $\left|T_n(f)-\int_a^b f(t)dt\right|\leq\frac{(b-a)^3}{12n^2}M_2(f)$ où

$T_n(f)=\frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_k)+f(x_{k+1}))$ et $x_k=a+k\frac{b-a}{n}, \forall 0\leq k\leq n$ avec $M_2(f)=\sup_{[a,b]}|f''|$. Dans tout ce résume, I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, bornes ouvertes ou fermes, finies ou infinies.

2 Intégration sur un intervalle quelconque

2.1 Notion d'intégrale convergente

Définition 5

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue.

1. Si $I =]a, b]$, on dit que f admet une intégrale convergente sur I, si $\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et soit finie, dans ce cas, on pose $\int_I f = \lim\limits_{x \to a^+} \int_a^x f(t)dt$.
2. Si $I = [a, b[$, on dit que f admet une intégrale convergente sur I, si $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et soit finie, dans ce cas, on pose $\int_I f = \lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$.
3. Si $I =]a, b[$, on dit que f admet une intégrale convergente sur I, si $\int_{]a,c]} f$ et $\int_{[c,b[} f$ convergent, où $c \in]a, b[$ choisi convenablement.

Définition 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, on dira que $\int_I f$ converge si et seulement si $\int_I \mathrm{Re}(f)(t)dt$ et $\int_I \mathrm{Im}(f)dt$ convergent, dans ce cas on pose

$$\int_I f(t)dt = \int_I \mathrm{Re}(f)(t)dt + i\int_I \mathrm{Im}(f)dt$$

Proposition 1

Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et $\lambda \in \mathbb{C}$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I (f + \lambda g)$ converge avec $\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$

Proposition 2

Soit $f : I = [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive, alors $\int_I f$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(tdt$ est majore.

Définition 7

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, dont une subdivision adapte est $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$. On dira que $\int_I f$ converge si et seulement si tous les intégrales $\int_{]x_k,x_{k+1}[}$ convergent, dans ce cas on pose:

$$\int_I f = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{]x_k,x_{k+1}[} f$$

2.2 Fonctions intégrables.

a Généralités

Définition 8

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue. On dira que $\int_I f$ converge absolument si et seulement si $\int_I |f|$ converge.
On dit aussi que f est intégrable ou sommable sur I

Proposition 3

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, alors f est intégrable sur I si et seulement si $|f|$ est intégrable sur I.

Définition 9

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, dont une subdivision adapte est $\sigma = (x_k)_{0\leq k\leq n}$. On dira que f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

Théorème 6

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue.

1. Si l'intégrale $\int_I f$ converge absolument alors elle converge, avec
$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$$
2. La réciproque n'est pas toujours vraie.

Proposition 4

Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continues intégrables sur I et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + \lambda g$ est intégrable sur I.
En particulier l'ensemble des fonction intégrables sur I, not $\ell^1(I)$ est un espace vectoriel pour les lois + et .

Proposition 5

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ continue, alors f est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont intégrables.

b Quelques règles d'intégrabilité.

Étude du prolongement par continuait.

Théorème 7

Si $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, admettant une limite finie en b avec $b \in \mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Remarque 2

- Le théorème est encore valable sur les intervalles $]a, b]$ et $[a, b[$ avec a, b réels.
- Si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$, le théorème n'est pas toujours vrai, comme pour la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non intégrable sur $[1, +\infty[$ bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Étude de la limite aux bornes de la primitive.

Théorème 8

Soit $f : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue positive, telle que $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et soit finie, alors f est intégrable sur $[a, b[$. Et dans ce cas $\int_a^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$

Remarque 3

Le théorème est encore vrai sur les intervalles de la forme $]a, b]$ ou $]a, b[$ pour les fonctions continues qui y gardent un signe constant, toute fois il risque d'être faux pour les fonctions qui changent de signe comme pour la fonction $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[\pi, +\infty[$ qui n'est pas intégrable bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_\pi^x \dfrac{\sin t}{t}dt$ existe et soit finie.

Pour ce type de fonction on étudie plutôt $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x |f(t)|dt$, si elle est finie, alors $|f|$ est intégrable donc f aussi, et dans ce cas $\int_a^x f(t)dt = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$.

Application.

- $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, a]$ si et seulement si $\alpha < 1$.
- $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Comparaison une fonction de référence.

Théorème 9

Soit $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $|f| \leq g$, alors:
g intégrable sur $I \Longrightarrow f$ intégrable sur I.

Corollaire 4

Soit $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $g \leq f \leq h$, si g et h sont intégrables sur I, alors f est aussi intégrable sur I.

Corollaire 5

Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $f =_b o(g)$ ou $f =_b O(g)$, si g est intégrable sur I, alors f est aussi intégrable sur I.

Remarque 4

Soit f continue, si:

- $\exists \alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{+\infty \to t}^{\alpha} f(t)$ existe et soit finie, alors f est intégrable au voisinage de $+\infty$.
- $\exists \alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{0 \to t}^{\alpha} f(t)$ existe et soit finie, alors f est intégrable au voisinage de 0.

Corollaire 6

Soit $f, g : [a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que $f \sim_b g$, alors:
g est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si f est aussi intégrable sur $[a, b[$.

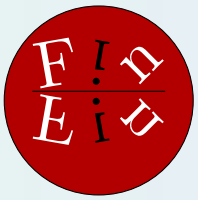
Comparaison avec une série

Théorème 10

Soit $f : [0, +\infty[$ continue positive croissante telle que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$, alors:
f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la série $\sum\limits_{n \geq 0} f(n)$ converge, avec:

$\int_n^{+\infty} f(t)dt \sim \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ en cas de convergence.

$\int_0^n f(t)dt \sim \sum_{k=0}^{n} f(k)$ en cas de divergence.

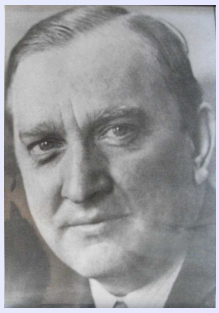


Séries dans un Banach

Chapitre 10

Blague du jour

• Qu'est ce que crie un escargot sur le dos d'une tortue ?
Réponse: Yaaaaaaaaaaahooooooooooooooooooooooooouuuuuuuuuuuuuuu !!!!
• Que dit un hérisson qui se cogne à un cactus ?
Réponse: maman !
• Quel est l'animal le plus heureux ?
Réponse: Le hiboux. Parce que sa femme s'appelle chouette.



Stefan Banach (1892 - 1945)

Mathématicien du jour

Mathématicien polonais. Pendant la guerre, il est réformé, travaille à la construction de routes et suit à l'Université les leçons de mathématiques. Avec Steinhaus, il fonda plusieurs revues mathématiques en Pologne. Il est un des fondateurs de l'analyse fonctionnelle. Ses autres travaux touchent à la théorie de la mesure de l'intégration, de la théorie des ensembles et des séries orthogonales, il a notamment donné son nom aux espaces dits de Banach.

1 Séries numériques.

1.1 Convergence.

Définition 1

On appelle séries numérique $(\sum x_n)$ de terme général x_n, réel ou complexe, la suite de terme général $S_n = x_0 + ... + x_n$, appelée somme partielle.
La séries converge si la suite des sommes partielles converge.
La limite S s'appelle somme de la séries et se note $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.
La quantité $R_n = S - S_n$ s'appelle reste de rang n.

Remarque 1

- CN de la convergence: Si une séries numérique converge, alors son terme général tend vers 0, la réciproque n'est pas toujours vraie. Contre exemple: $\sum \frac{1}{n}$.
- CNS de la convergence: la série $(\sum_n x_n)$ converge si et seulement si la suite (S_n) est de Cauchy.

Remarque 2

- L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel.
  En particulier si deux séries $(\sum_n x_n)$ et $(\sum_n y_n)$ sont convergente, $(\sum_n (x_n+y_n))$ est aussi convergente avec
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x_n+y_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}x_n+\sum_{n=0}^{+\infty}y_n$$
- Une séries complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$ converge si et seulement si les Séries réelles de terme général x_n et y_n convergent.
- La suite géométrique $(\sum a^n)$ converge si et seulement si $|a|<1$, avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

1.2 Convergence absolue.

Définition 2

On dit que la série $(\sum x_n)$ converge absolument quand la série $(\sum |x_n|)$ converge.

Théorème 1

Inégalité triangulaire: Toute série $(\sum x_n)$ qui converge absolument est convergente avec
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}|x_n|$$

Remarque 3

La réciproque de ce théorème est en général fausse. La séries alterne $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans converger absolument, on dit qu'elle est semi-convergente.

Théorème 2

Soit $(\sum_n x_n)$ et $(\sum_n y_n)$ deux séries absolument convergentes, alors la séries de terme général z_n défini par la relation

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k} \quad \text{Produit de convolution de Cauchy}$$

(on écrit en général $(z_n) = (x_n) * (y_n)$) est absolument convergente, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} y_n\right)$$

1.3 Séries termes positifs: règles de convergence..

Dans tout ce paragraphe (sauf mention du contraire), les séries considérées x_n et y_n sont termes positifs.

Règle 1

La séries $\left(\sum x_n\right)$ termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k)$ est majore.

Règle 2

règles de comparaison.

Si $0 \leq x_n \leq y_n$ PCR ou si $x_n = O(y_n)$ ou bien si $x_n = o(y_n)$, alors:

1. $\left(\sum_n a_n z^n\right) y_n$ converge $\Longrightarrow \left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ converge.
2. $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ diverge $\Longrightarrow \left(\sum_n a_n z^n\right) y_n$ diverge.

Règle 3

règles de comparaison logarithmique.

On pose $w_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. Si (w_n) est croissante, en particulier si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_{n+1}}{w_n} < 1$, alors:

1. $\left(\sum_n a_n z^n\right) y_n$ converge $\Longrightarrow \left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ converge.
2. $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ diverge $\Longrightarrow \left(\sum_n a_n z^n\right) y_n$ diverge.

Règle 4 règle d'équivalence.

Si $x_n \underset{+\infty}{\sim} y_n$, alors

1. $\left(\sum_n a_n z^n\right) y_n$ converge $\Longrightarrow$ $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ converge, dans ce cas $\sum_{k=n}^{+\infty} x_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} y_n$.
2. $\left(\sum_n a_n z^n\right) y_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ converge, dans ce cas $\sum_{k=0}^{n} x_n \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} y_n$.

Règle 5 règle de comparaison avec une intégrale.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ décroissante vers 0 l'infini, alors:

$\left(\sum_n a_n z^n\right) f(n)$ converge $\Longleftrightarrow$ f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Remarque 4

1. séries de Riemann: $\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. séries de Bertrand: $\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1, \beta > 1$.

Règle 6 règle de D'Alembert.

On cherche $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$, et on distingue les cas suivants:

1. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, alors $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ converge.
2. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, alors $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ diverge.
3. Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, on ne peut rien dire.

Règle 7 règle de Cauchy.

On cherche $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$, et on distingue les cas suivants:

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, alors $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ converge.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, alors $\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ diverge.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, on ne peut rien dire.

Règle 8 règle condensation de Cauchy.

Si (x_n) est suite décroissante, alors:

$\left(\sum_n a_n z^n\right) x_n$ diverge $\iff \left(\sum_n 2^n x_{2^n}\right)$ converge.

Remarque 5

1. Toutes les règles précédentes sont applicable pour les séries termes positifs, toute fois on peut les appliquer dans le cas général, mais pour étudier la convergence absolue.
2. La règle suivante est applicable dans le cas général (même complexe), et permet de ramener l'étude d'une séries semi-convergente celle d'une séries absolument convergente.

Règle 9 Transformation d'Abel.

Soit $(x_n), (y_n)$ deux suites complexes, alors:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (x_k - x_{k+1})y_k + x_n y_n - x_1 y_0$$

Remarque 6

1. La transformation d'Abel est aussi connue sous le nom de sommation par parties, vu sa ressemblance avec le principe d'intégration par parties.

2. Si (ε_n) est une suite réelle strictement décroissante vers 0 et (z_n) une suite complexe, dont la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ est borne, alors la séries $\left(\sum_n \varepsilon_n z_n\right)$ est convergente.

1.4 Séries alternées

Définition 3

On appelle série alternée toute série réelle dont le terme général change de signe donc de la forme $(-1)^n x_n$ où x_n garde un signe constant.

Théorème 3

Critère spécial de Leibniz pour les Séries alternes
Soit $\sum (-1)^n x_n$ une série alternée telle que $|x_n|$ décroit vers 0, alors la séries $\sum (-1)^n x_n$ converge. avec:

- R_n est du même signe que son premier terme $(-1)^{n+1} x_{n+1}$.
- $|R_n| \leq |x_{n+1}|$.
- La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x_n$ est comprise entre les sommes partielles S_{2n} et S_{2n+1}.

2 Séries dans un espace vectoriel normé

2.1 Convergence.

Définition 4

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que la série $\sum x_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k)$ converge dans E, sa limite s'appelle somme de la série et se note $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$, ainsi on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$$

Théorème 4

Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach, alors $\sum x_n$ converge si et seulement si S_n est de Cauchy.

Remarque 7

Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé et si $\sum x_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Définition 5

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et (x_n) une suite d'éléments de E. On dit que la série $\sum x_n$ converge absolument si la série $\sum \|x_n\|$.

Théorème 5

Si $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et si $\sum x_n$ converge absolument, alors elle converge, avec

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|$$

Théorème 6

Soit $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach.

1. Si $\sum x_n$ et $\sum x_n$ convergent, alors $\sum (x_n + y_n)$ converge, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n$$

2. Si $\sum x_n$ et $\sum x_n$ convergent absolument, alors $\sum (x_n + y_n)$ converge absolument, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n + y_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| + \sum_{n=0}^{+\infty} \|y_n\|$$

3

Familles sommables

3.1 Ensembles dénombrables

Définition 6

Un ensemble $\mathcal{I}$ est dit dénombrable, s'il existe une injection $\sigma : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Remarque 8

- Un ensemble est dénombrable s'il est équipotent (en bijection) avec une partie de $\mathbb{N}$;
- Tout ensemble fini est dénombrable;
- Toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable;
- La réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrables;
- Le produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, mais $\overline{\mathbb{Q}}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

Proposition 1

- Tout ensemble dénombrable $\mathcal{I}$ peut être muni d'une relation d'ordre totale.
- Tout ensemble dénombrable $\mathcal{I}$ admet une suite de partie $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{I}$ (dite exhaustive) , vérifiant la propriété suivante $\begin{cases} I_n \subset I_{n+1} \\ I = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \end{cases}$.

Théorème 7

Si $\mathcal{I}$ est un ensemble dénombrable et $(\mathcal{I}_n)$ un suite exhaustive de $\mathcal{I}$, alors pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, il existe une partie $\mathcal{I}_k$ tel que $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}_k$.

3.2 Familles dénombrables à termes positifs

Dans toute cette partie, on considère $\mathcal{I}$ un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ une famille dénombrable de réels positifs.

Définition 7

On dit que $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est sommable si et seulement si $\exists M > 0$ tel que $\sum_{k\in\mathcal{J}} x_k \leq M$ pour toute partie finie $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$. On appelle alors somme de la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$, le réel noté $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k$ défini par

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \sup_{\mathcal{J}\subset\mathcal{I},\text{fini}} \sum_{k\in\mathcal{J}} x_k$$

Théorème 8

- Si il existe une suite exhaustive $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}$ telle que la suite $\left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est sommable, avec $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$
- Si la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est sommable, alors pour suite exhaustive $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}$ la suite $\left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, avec $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$.

Proposition 2

Si les familles $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ et $(y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ sont sommables, alors la famille $(x_k + y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est sommable, avec $\sum_{k\in\mathcal{I}} (x_k + y_k) = \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k + \sum_{k\in\mathcal{I}} y_k$

3.3 Familles dénombrables à valeurs dans un espace vectoriel normé

Dans toute cette partie, on considère $\mathcal{I}$ un ensemble dénombrable et $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ une famille dénombrable à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$.

Définition 8

On dit que la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est absolument sommable quand la famille $(\|x_k\|)_{k\in\mathcal{I}}$ est sommable

Théorème 9

Si $(E, \|.\|)$ est un Banach et si $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est absolument sommable, alors pour suite exhaustive $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{I}$, on a la suite $\left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, dont limite ne dépend pas du choix de la suite exhaustive, on appelle somme de la famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$, l'élément de E, noté $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k$ défini par $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$.

Corollaire 1

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$ est absolument sommable si et seulement si la série $\sum x_n$ converge absolument. Dans le cas où E est un Banach, les sommes relatives aux deux notions sont identiques, i.e: $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$.

Corollaire 2

- Si $(E,\|.\|)$ est un Banach et si $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ et $(y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ sont absolument sommables, alors pour tout scalaire λ, on a: $(x_k+\lambda y_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est absolument sommable, avec $\sum_{k\in\mathcal{I}}(x_k+\lambda y_k) = \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k + \lambda\sum_{k\in\mathcal{I}} y_k$.
- Une famille dénombrable de réels $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est absolument sommable si et seulement si les familles $(x_k^+)_{k\in\mathcal{I}}$ et $(x_k^-)_{k\in\mathcal{I}}$ sont absolument sommables, dans ce cas $\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k^+ - \sum_{k\in\mathcal{I}} x_k^-$.
- Une famille dénombrable de complexes $(z_k)_{k\in\mathcal{I}}$ est absolument sommable si et seulement si les familles $(\mathrm{Re}z_k)_{k\in\mathcal{I}}$ et $(\mathrm{Im}z_k)_{k\in\mathcal{I}}$ sont absolument sommables,

  dans ce cas: $\sum_{k\in\mathcal{I}} z_k = \sum_{k\in\mathcal{I}} \mathrm{Re}z_k + i\sum_{k\in\mathcal{I}} \mathrm{Im}z_k$.

3.4 Autres modes de sommation.

Définition 9

Une série d'un espace vectoriel normé $\sum x_n$ est dite commutativement convergente si et seulement si la série de terme général $(x_{\sigma(n)})$ converge pour toute bijection, $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Théorème 10

Toute série absolument convergente à termes dans un espace de Banach est commutativement convergente.

Définition 10

Une famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ d'un espace vectoriel normé est dite sommable par paquets si et seulement si pour toute partition dénombrable $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathcal{J}}$ de $\mathcal{I}$, les familles suivantes sont dénombrables: $(x_k)_{k\in\mathcal{I}_n}$ et $(y_n)_{n\in\mathcal{J}}$ où $y_n = \sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k$.

Théorème 11

Toute famille $(x_k)_{k\in\mathcal{I}}$ sommable à termes dans un espace de Banach est sommable par paquets, dans ce cas

pour toute partition dénombrable $(\mathcal{I}_n)_{n\in\mathcal{J}}$ de $\mathcal{I}$, on a:

$$\sum_{k\in\mathcal{I}} x_k = \sum_{n\in\mathcal{J}} \left(\sum_{k\in\mathcal{I}_n} x_k \right)$$

Théorème 12

Si $(x_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}}$ est une suite double absolument sommable à termes dans un espace de Banach, alors les sommes suivantes existent et sont égales:

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_{p,q} &= \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} x_{p,q}\right)\\ &= \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} x_{p,q}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} x_{p,q}\right)\end{aligned}$$

4 Sommation dans un algèbre normée.

Dans toute cette partie $(A, \|.\|)$ est une algèbre normée de Banach.

Théorème 13

Si $a \in A$ tel que $\|a\| < 1$, alors $\sum a^k$ converge absolument, $1_A - a$ est inversible avec $(1_A - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$

Corollaire 3

Soit E est un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset B(0, |||u|||)$.

Corollaire 4

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de A, alors $\mathcal{U}$ est un ouvert et l'application $a \mapsto a^{-1}$ est un homéomorphisme de $\mathcal{U}$ vers lui même.

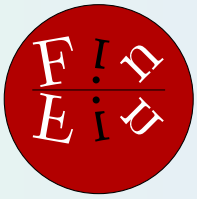
Théorème 14

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors la série de terme général $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$ converge

absolument, avec $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_p v_q\right)$

Corollaire 5

Pour tout $a \in A$, la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge absolument, sa somme s'appelle exponentielle de a et se note e^a, on en particulier $e^{a+b} = e^a.e^b$



Suites et séries de fonctions

Chapitre 11

Blague du jour

Un prof de math explique à ces élèves de faire attention avant de répondre lors d'un oral de concours, et s'assurer que ce qu'ils allaient dire est juste:
- Les intelligents sont toujours dans le doute. Seuls les imbéciles sont constamment affirmatifs.
- Vous en êtes certain? demande un élève.
- Absolument certain!

Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956)

Mathématicien du jour

Mathématicien français, spécialiste de la théorie des fonctions et des probabilités, membre de l'Académie des sciences, a été aussi un homme politique, député, ministre, résistant et prisonnier de guerre, il fût décoré par le Grand-croix de la Légion d'honneur, par la Croix de guerre et par la Médaille de la Résistance.
Il fût premier de sa promotion premier à l'École polytechnique, à l'École Normale, et à l'agrégation de mathématiques. Il était parmi les pionniers de la théorie de la mesure et de son application à la théorie des probabilités et de jeux.

Remerciements à Mr My Hassan Ratbi (Rabat) pour la source Latex de ce résumé de cours.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur une partie $\mathbf{A}$ d'un espace vectoriel $\mathbf{E}$ de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie $\mathbf{F}$.

1 Modes de convergence

1.1 Suites de fonctions

a Convergence simple

Étant donnée une suite (f_n) de fonctions définies sur une partie A de E à valeurs dans un evn de dimension finie F.

Définition 1

La suite (f_n) converge simplement sur A vers f, si pour tout élément x de A, la suite $(f_n(x)$ converge vers $f(x)$.
On dit alors que f est limite simple sur A de la suite de fonctions (f_n).

Remarque 1

1. Il est clair que f est unique puisque pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ a une limite unique.
2. On dit que (f_n) converge simplement sur A si elle existe f telle que (f_n) converge simplement sur f.
3. Si $X \subset A$ on dit que la suite converge simplement sur X si la suite des restrictions de (f_n) sur X converge simplement.

b Convergence uniforme

Définition 2

La suite (f_n) converge uniformément sur A vers f, si pour tout élément x de A, la suite $\|f_n - f\|_\infty$ converge vers 0.
On dit alors que f est limite uniforme sur A de la suite de fonctions (f_n).

Remarque 2

1. En notant $R_n = \sup \|f_n(x) - f(x)\| \in \overline{\mathbb{R}}$, la convergence uniforme de la suite (f_n) vers f est équivalente la convergence de la suite (R_n) vers 0. Donc pour montrer qu'une suite (f_n) converge uniformément vers f il suffit qu'il existe une suite de réels (ε_n) qui tend vers 0 telle que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon_n$

2. Pour montrer qu'une suite de fonction (f_n) ne converge pas uniformément il suffit d'exhiber une suite (x_n) d'éléments de A tel que $f_n(x_n) - f(x_n)$ ne tend pas vers 0.
   En effet $R_n = \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| \geqslant f_n(x_n) - f(x_n)$.
3. On dit que (f_n) converge uniformément sur A si elle existe f telle que (f_n) converge uniformément sur f. La limite f est souvent calculer par la convergence simple.
4. Si $X \subset A$ on dit que la suite converge uniformément sur X si la suite des restrictions de (f_n) sur X converge uniformément.
5. Si (f_n) converge uniformément sur A alors converge uniformément sur toute partie $X \subset A$.
6. L'écriture formelle de la convergence simple et uniforme de la suite (f_n) vers f est respectivement :
   - **CS :** $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$.
   - **CU :** $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$

Proposition 1

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f alors (f_n) converge simplement vers f.

c Critère de Cauchy uniforme.

Définition 3

Soient (f_n) une suite de fonctions définie de A vers un espace vectoriel normé F, on dit que la suite (f_n) est uniformément de Cauchy sur A si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, (n \geqslant N, m \geqslant N) \Rightarrow \forall x \in A, \|f_n(x) - f_m(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 1

Si F est un Banach, (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si f vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Remarque 3

$\mathcal{B}(A,F)$, l'espace de fonctions bornées sur A, muni de la norme $\|.\|_\infty$ est complet.

1.2 Séries de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F, comme pour les séries dans un espace vectoriel normé , on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ la somme partielle.

a Convergence simple

Définition 4

On dit que $\sum f_n$ converge simplement sur A si $\forall x \in A, \sum f_n(x)$ converge. Dans ce cas :

- la fonction somme est note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et on a $\forall x \in A, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$
- le reste et la suite de fonction définie par : $\forall x \in A, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.
- On a $\forall x \in A, S(x) = S_n(x) + R_n(x)$.

L'ensemble des éléments tel que $\sum f_n(x)$ converge s'appelle domaine de convergence simple.
Convergence uniforme
On dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur A si (S_n) converge uniformément sur A.
La convergence uniforme implique la convergence simple.

Proposition 2

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la suite (f_n) converge vers 0 sur A.

Remarque 4

(f_n) peut converger vers 0 sans que $\sum f_n$ converge uniformément.

Proposition 3

Une séries convergeant simplement vers f converge uniformément si et seulement si R_n converge uniformément vers 0

Définition 5

On dit que la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact de A si quelle que soit la partie K compact de A la suite $\sum f_n$ converge uniformément sur K.

b Convergence absolue

Définition 6

On dit que la suite $\sum f_n$ converge absolument sur A si quelle que soit x de A , la suite $\sum \|f_n(x)\|$ converge .

Proposition 4

Si la série $\sum f_n$ converge absolument sur A, alors $\sum f_n$ converge simplement sur A.

c Convergence normale

Définition 7

On dit que la suite $\sum f_n$ converge normalement sur A si

- $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{B}(A, F)$,
- la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

Proposition 5

Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors $\sum f_n$ converge absolument et uniformément sur A, et l'on a :

$$\left\| \sum_{k=0}^{+\infty} f_n \right\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$$

2 Théorèmes d'approximations

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

2.1 Fonctions en escalier

2.2 Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Théorème 2

Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, valeurs dans F, est limite uniforme d'une suite de fonctions

en escaliers sur $[a, b]$.
Ce qui peut se traduire par :

- $\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],F), \forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{E}([a,b],F), \|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
- $\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],F), \exists (f_n) \in (\mathcal{E}([a,b],F))^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Théorème 3

Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans F, est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux sur $[a, b]$

Théorème 4

Premier théorème de Stone-Weirstrass

Toute fonction complexe continue sur un segment $[a, b]$, valeurs dans $\mathbb{C}$, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes de la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Théorème 5

Deuxième Théorème de Weirstrass

Toute fonction complexe 2π-périodique valeurs dans $\mathbb{C}$, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes trigonométriques de la forme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$

Continuité de la limite uniforme

Théorème 6

Théorème de la double limite ou interversion des limites.

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A, F)$ et $a \in \overline{A}$.

- Si pour tout n, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe.
- Si la suite f_n converge uniformément vers f sur A,

alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right)$ existent et sont égales, plus précisément:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Théorème 7

Théorème de la continuité de la limite uniforme.

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A,F)$ et $a \in A$.

- Si pour tout n, f_n est continue en a
- Si la suite f_n converge uniformément vers f sur A,

alors f est continue en a.

Théorème 8

Théorème d'interversion des limites et sommes.

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A,F)$ et $a \in \overline{A}$.

- Si pour tout n, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ existe.
- Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A,

alors $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ converge et sont égales, plus précisément:

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Théorème 9

Théorème de la continuité de la somme.

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{F}(A,F)$ et $a \in A$.

- Si pour tout n, f_n est continue en a
- Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A,

alors $\sum n0 + \infty$ est continue en a.

Remarque 5

Les résultats précédents sont encore valables si l'on remplace convergence uniforme par convergence uniforme sur tout compact.

4 Dérivée de la limite uniforme

I tant un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit un point, $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions de I dans F de classe $\mathcal{C}^1$.

Théorème 10

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I,F)$ telle que :

- (f_n) converge simplement sur I vers $f \in \mathcal{F}(I,F)$.
- La suite (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I,F)$.

Alors

- f est de classe C^1 sur I avec $f' = g$.
- la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Théorème 11

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathcal{C}^k(I,F), k \in \mathbb{N}$ telle que :

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I;
- La suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers $g \in \mathcal{F}(I,F)$.

Alors la fonction $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ est de classe $\mathbb{C}^k$ sur I avec $f^{(k)} = g$ et chaque suite $(f_n^{(j)})_n, j \in [\![0, k-1]\!]$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

Théorème 12

Soit (f_n) une suite de fonctions de $C^\infty(I,F)$ telle que :

- pour tout $j \in \mathbb{N}$ la suite $(f_n^{(j)})_n$ converge simplement sur I;
- il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, La suite $(f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $f = \lim f_n$ est de classe C^∞ sur I et chaque suite $(f_n^{(j)})_n, j \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I vers $f^{(j)}$.

Théorème 13

Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $C^1(I,F)$ telle que :

- la série $\sum f_n$ converge simplement sur I;
- la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment J de I.

Alors la fonction somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Théorème 14

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^k(I,F), k \in \mathbb{N}$ telle que :

- pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$ la série $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I;
- La série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et chaque série $\sum f_n^{(j)}$ où $j \in [\![0, k-1]\!]$converge uniformément sur tout segment de I vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}$. Plus précisément:

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \forall x \in I, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)\right).$$

Théorème 15

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I,F), k \in \mathbb{N}$ telle que :

- pour tout $j \in \mathbb{N}$ la série $\sum f_n^{(j)}$ converge simplement sur I;

- il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $k \geqslant p$, La série $\sum f_n^{(k)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et chaque série $\sum f_n^{(j)}, j \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur tout segment de I avec

$$\forall j \in [\![0, k]\!], \forall x \in I, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)}(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)\right).$$

Remarque 6

Les résultats précédents sont encore valables si l'on remplace convergence uniforme par convergence uniforme sur tout compact.

5

Intégrale de la limite uniforme

5.1 Fonction réglée

Définition 8

On appelle fonction réglée sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé , F de dimension finie, toute application $f : [a, b] \longrightarrow F$ telle que

- $\lim_{t \to x^+} f(t)$ existe $\forall x \in]a, b]$.
- $\lim_{t \to x^-} f(t)$ existe $\forall x \in [a, b[$.

L'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{R}([a, b], F)$.

Remarque 7

- Toute fonction continue par morceaux est réglée, en particulier toute fonction continue ou en escalier sur $[a, b]$ est réglée.
- Toute fonction réglée est bornée
- La limite uniforme de fonctions réglées est réglée.
- $\mathcal{R}([a, b], F)$ est un fermé pour la norme $\|.\|_\infty$.

Théorème 16

- Pour toute fonction réglée $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$, $\exists \varphi, \psi$ en escalier sur $[a, b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi \quad , \quad \psi - \varphi \leq \varepsilon$
- Pour toute fonction réglée $f : [a, b] \longrightarrow F$ et $\varepsilon > 0$, $\exists \varphi$ en escalier sur $[a, b]$ telles que $\|\varphi - f\|_\infty \leq \varepsilon$
- Toute fonction réglée est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.
- La limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers est une fonction réglée.

5.2 Intégration sur un segment

Théorème 17

Soit $f : [a, b] \longrightarrow F$ fonction réglée et $\varphi_n : [a, b] \longrightarrow F$ une suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers f. Alors la suite $\left(\int_a^b \varphi_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite ne dépend pas du choix de la suite (φ_n). On pose alors: $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(t)dt$

Remarque 8

L'intégrale d'une fonction réglée hérite de toutes les propriétés de l'intégrale d'une fonction en escaliers, plus précisément si $f, g : [a, b] \longrightarrow F$ réglées et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes:

- $\int_a^b (f + \lambda g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \lambda \int_a^b g(t)dt.$
- $f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0.$
- $f \geq g \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt.$
- $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|dt.$
- $\int_a^a f(t)dt = 0$
- $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt, \ \forall c \in [a, b].$
- $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$

- l'application $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable à gauche et à droite en tout point $x \in [a, b]$, avec $F'(x^+) = f(x^+)$ et $F'(x^-) = f(x^-)$.

Théorème 18

Si f_n est une suite de fonctions réglées qui converge uniformément vers f, alors f est réglée avec

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt$$

Théorème 19

Intégration terme à terme. Si $\sum f_n$ est une série de fonctions réglées qui converge uniformément, alors:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)dt \right) = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$$

5.3 Intégration sur un intervalle quelconque.

Dans tout la suite I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Définition 9

- Soit $f : I \longrightarrow F$, on dit que f est réglée sur I si et seulement si elle est réglée sur tout segment $[a, b] \subset I$.
- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si $\left\{ \int_{[a,b]} f \text{ tel que } [a, b] \subset I \right\}$ est majoré, on pose alors $\int_I f = \sup_{[a,b]\subset I} \int_{[a,b]} f$
- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- est intégrable, on pose alors $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$
- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}f$ et $\mathrm{Im}f$ sont intégrables, on pose alors $\int_I f = \int_I \mathrm{Re}f + i \int_I \mathrm{Im}f$
- Soit $\begin{array}{rccc} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n \\ & t & \longmapsto & (f_1(t), \cdots, f_n(t) \end{array}$, on dit que f est intégrable sur I si et seulement si f_i et sont intégrables, on pose alors $\int_I f = (\int_I f_1, \cdots, \int_I f_n)$

Proposition 6

Soit $\mathbf{f : I \longrightarrow F}$ réglée, on a les résultats suivants:

- $\mathbf{f}$ intégrable sur $\mathbf{I}$ si et seulement si $\|\mathbf{f}\|$ intégrable sur $\mathbf{I}$, dans ce cas $\left\|\int_{\mathbf{I}} \mathbf{f}\right\| \leq \int_{\mathbf{I}} \|\mathbf{f}\|$.
- Si $\mathbf{f}$ est intégrable sur $\mathbf{I}$ et $(\mathbf{J_n})$ une suite exhaustive de segments $\mathbf{I}$, alors $\int_{\mathbf{I}} \mathbf{f} = \lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \int_{\mathbf{J_n}} \mathbf{f}$.

Théorème 20

Théorème de convergence monotone: Soit $(\mathbf{f_n})$ une suite croissante $(\mathbf{f_n} \leq \mathbf{f_{n+1}})$ de fonctions réglées positives intégrables sur $\mathbf{I}$ qui converge simplement vers une fonction réglée $\mathbf{f}$. Alors $\mathbf{f}$ est intégrable si et seulement si $\left(\int_{\mathbf{I}} \mathbf{f_n}\right)$ est majorée, dans ce cas, on a: $\lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \int_{\mathbf{I}} \mathbf{f_n} = \int_{\mathbf{I}} \lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{f_n}$

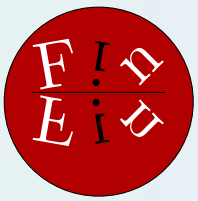
Théorème 21

Théorème d'intégration terme à terme: Soit $\sum \mathbf{f_n}$ une série de fonctions réglées intégrables sur $\mathbf{I}$ qui converge simplement. Alors $\mathbf{f}$ est intégrable si et seulement si $\sum \int_{\mathbf{I}} \|\mathbf{f_n}\|$ converge, dans ce cas, on a:

$$\left\|\sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \int_{\mathbf{I}} \mathbf{f_n}\right\| \leq \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \int_{\mathbf{I}} \|\mathbf{f_n}\| \quad , \quad \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \int_{\mathbf{I}} \mathbf{f_n} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \int_{\mathbf{I}} \mathbf{f_n}$$

Théorème 22

Théorème de convergence dominée: Soit $(\mathbf{f_n})$ une suite de fonctions réglées intégrables sur $\mathbf{I}$ qui converge simplement vers une fonction réglée $\mathbf{f}$. Si $\exists \boldsymbol{\varphi}$ réglée positive et intégrable sur $\mathbf{I}$ telle que $\|\mathbf{f_n}\| \leq \boldsymbol{\varphi}$, $\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, alors $\mathbf{f}$ est intégrable avec: $\lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \int_{\mathbf{I}} \mathbf{f_n} = \int_{\mathbf{I}} \lim\limits_{\mathbf{n}\to+\infty} \mathbf{f_n}$



Séries entières
Fonctions holomorphes

Chapitre 12

Blague du jour

• Qu'est-ce qui est jaune et vert, qui court dans l'herbe ?
- L'équipe de football du Brésil!
• Pourquoi les joueurs d'une équipe de foot ont ils les mains toutes lisses ?
- Car cela fait deux ans qu'ils se les frottent en disant "le prochain match, on le gagne !"

Al-Kachi (1380-1429)

Mathématicien et astronome perse (iranien ouzbek). Al-Kachi calcula le nombre π avec une précision de seize décimales, la plus grande précision pendant près de deux siècles. Al-Kachi joua un rôle important dans la conception de l'observatoire de Samarcande et dans la publication des tables sultaniennes.

Mathématicien du jour

Remerciements: à Mr My Hassan Ratbi (Rabat) pour la source latex de ce résumé de cours.

---

1 Séries entières complexes

1.1 Convergence

Définition 1

• On appelle série entière de variable complexe z, toute série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$.

• On appelle domaine de convergence $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C},\ \left(\sum_n a_n z^n\right)$ converge $\}$. Pour tout $z \in \mathcal{D}$, $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)$ s'appelle la somme de la série $\left(\sum_n a_n z^n\right)$ au point z.

Théorème 1

Lemme d'Abel: Soit $\left(\sum_n a_n z^n\right)$ une série entière et $r > 0$ tel que $(a_n r^n)$ soit bornée, alors $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, on a $\left(\sum_n a_n z^n\right)$ converge absolument.

Théorème 2

Soit $\left(\sum_n a_n z^n\right)$ une série entière de domaine de convergence $\mathcal{D}$, alors il existe un unique réel positif, R, vérifiant $\mathcal{D}(O, R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}}(0, R)$.
R s'appelle le rayon de convergence, en particulier pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a:

- $\left(\sum_n a_n z^n\right)$ converge absolument si $|z| < R$.
- $\left(\sum_n a_n z^n\right)$ diverge si $|z| > R$.
- on ne peut rien dire si si $|z| < R$.

Remarque 1

Soit $\left(\sum_n a_n z^n\right)$ une série entière de rayon de convergence R, $\mathcal{D}(0, R)$ s'appelle le disque de convergence de la série, à l'intérieur duquel la convergence de la série est normale sur tout compact. On a en plus les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} R &= \sup\{|z| \text{ tel que } \left(\sum_n a_n z^n\right) \text{ converge }\} \\ &= \sup\{|z| \text{ tel que } \left(\sum_n a_n z^n\right) \text{ converge absolument }\} \\ &= \sup\{|z| \text{ tel que } (a_n z^n) \text{ bornée }\} \\ &= \sup\{|z| \text{ tel que } (a_n z^n) \text{ converge vers } 0\} \end{aligned}$$

1.2 Opérations sur les rayons de convergence

Soient $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_0 b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectivement R_a et R_b.

Théorème 3

Règles de D'Alembert et de Cauchy • D'Alembert: Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $R_a=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$

• Cauchy: Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors $R_a=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

Proposition 1

1. Si $\forall n\in\mathbb{N},|a_n|\leqslant|b_n|$, alors $R_a\geqslant R_b$.
2. Si $a_n=O(b_n)$ ou $a_n=o(b_n)$, alors $R_a\geqslant R_b$.
3. Si $a_n\sim b_n$, alors $R_a=R_b$.
4. Le rayon de convergence R de la somme des deux séries $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ vérifie :
   - Si $R_a\neq R_b, R=\min(R_a,R_b)$,
   - Si $R_a=R_b, R\geqslant R_a=R_b$.

   De plus, pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<\min(R_a,R_b)$, on a :
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n+\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$$
5. Le rayon de convergence R de la série $\sum c_nz^n$, produit de Cauchy des deux séries $\sum a_nz^n$ et $\sum b_nz^n$ vérifie : $R\geqslant\min(R_a,R_b)$ et on a :
   $$\forall z\in\mathbb{C},\text{ tel que }|z|<\min(R_a,R_b),\ \sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n\sum_{n=0}^{+\infty}b_nz^n$$
6. Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

2 Séries entières réelles

2.1 Comportement de la somme

Soit $\sum a_nx^n$ une série à coefficients a_n tous réels et à variable x réelle. Soit R son rayon de convergence R, l'intervalle $]-R,R[$ s'appelle l'intervalle de convergence dans lequel la série converge absolument, plus encore elle converge normalement sur tout compact de $]-R,R[$. Soit $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$, on a les résultats suivants:

Théorème 4

- f est continue sur $]-R,R[$.
- f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]-R,R[$, avec $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b x^n dx$.

2.2 Fonctions développables en série entière

Définition 2

Soit f une fonction d'une partie X de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On dit que f est développables en série entière (DSE) en $x_0 \in X$, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ et $r \in]0,R]$ avec $]-r,r[\subset X$ tel que :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, f(x) = \sum_{n=0}^{++\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Théorème 5

Si f est développable en série entière en x_0, alors il existe un voisinage de x_0 sur le quel f est de classe C^∞ et le développement en série entière de f en x_0 est $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{++\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$. Cette série est appelée série de Taylor de f en x_0.

Remarque 2

La réciproque du théorème précèdent est en général fausse, toutefois on a le résultat suivant:

Théorème 6

Si f est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ au voisinage de x_0, et si le reste intégral $R_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$ converge uniformément vers 0 alors f est développable en série entière en x_0 avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{++\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ au voisinage de x_0

Proposition 2

1. La somme de deux fonctions DSE est DSE et son DSE est la somme des deux développements.
2. La produit de deux fonctions DSE est DSE et son DSE est la produit de Cauchy des deux développements.

3. Si f est DSE alors f' est DSE.

3 Fonctions holomorphes

Définition 3

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, on dit que f est dérivable en un point $z_0 \in U$ si et seulement si $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe dans $\mathbb{C}$, on pose alors $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, appelée dérivée de f au point z_0.

On dit que f est holomorphe sur U si elle est dérivable en tout point de U.

Remarque 3

- La somme, produit, composée, rapport (quand ils sont définis) de fonctions holomorphes est une fonction holomorphe.

- Les opérations sur les dérivées des fonctions à variable réelle sont encore valables pour celles à variable complexe.

Théorème 7

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, et f dérivable en un point $z_0 \in U$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \quad \text{Conditions de Cauchy-Riemann}$$

Définition 4

- Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est développables en série entière (DSE) en $z_0 \in U$, s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et $r \in]0, R]$ avec $\mathcal{D}(0, r) \subset X$ tel que : $\forall x \in \mathcal{D}(0, r)$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{++\infty} a_n (z - z_0)^n$

- On dit que f est analytique sur U si et seulement si elle DSE en tout point de U.

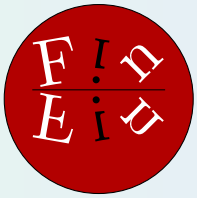
- on dit que f est une fonction entière si elle DSE sur U.

Théorème 8

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$, alors f est holomorphe sur U si et seulement si f est analytique sur U

Théorème 9

Soit U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe sur U, alors $\{z \in U \text{ tel que } f(z) = 0\}$ est au plus dénombrable et si $z_0 \in U$ tel que $f(z_0) = 0$, alors $\exists! n \in \mathbb{N}$ et $g : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$.

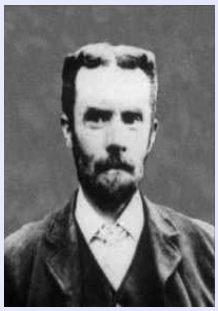


Intégrale à un paramètre

Chapitre 13

Blague du jour

• Dans une équipe de football, l'entraîneur dit à un joueur: Aujourd'hui, tu vas jouer avant.
- Ah non ! Moi, je veux jouer avec les autres !
• Un jeune garçon de 6 ans quitte le domicile de ses parents pour vivre avec son équipe national de foot, quand on lui demande pourquoi, il répond: mes parents me battent toujours alors que j'ai entendu dire que l'équipe nationale ne bat plus personne.



Oliver Heaviside (1850-1925)

Mathématicien du jour

Physicien britannique autodidacte. Il a formulé à nouveau et simplifié les équations de Maxwell sous leur forme actuelle utilisée en calcul vectoriel. Il développa le calcul opérationnel, une méthode pour résoudre des équations différentielles en les transformant en des équations algébriques ordinaires.

Remerciements: à Mr Sadik Boujaida (Rabat) pour la source latex de ce résumé de cours.

Dans tous le document $\mathbf{I}$ désignera un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorèmes généraux.

1.1 Continuité

Théorème 1

Soient $\mathbf{m} \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{A}$ une partie non vide de $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

On considère une fonction $\mathbf{f} : \mathbf{A} \times \mathbf{I} \to \mathbb{K}$, et une fonction continue par morceaux positive intégrable

$\varphi : I \to \mathbb{R}$.

Si

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } A \times I \\ \forall (x,t) \in A \times I,\ \|f(x,t)\| \leqslant \varphi(t) \quad \text{(hypothèse de domination)} \end{cases}$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur I.

Remarque 1

Avec les notations du théorème précédent, si I est un segment, la continuité de f sur $A \times I$ suffit pour justifier celle de g sur A. (Pas besoin de domination).

Noter la similitude des données du théorème avec la convergence normale d'une série de fonctions :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |u_n(x)| \leq a_n \text{ et la série } \sum a_n \text{ converge.}$$

vs.

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t) \text{ et } \varphi \text{ est une fonction intégrable sur } I.$$

Comme pour les séries de fonctions, on peut le cas échéant effectuer des dominations sur les parties $K \times I$, K étant un compact quelconque de A.

1.2 Dérivation

Théorème 2

Soit K et I deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$. On considère une fonction $f : K \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ et des fonctions continue par morceaux positives intégrables $\varphi, \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \text{ et admet une dérivée partielle } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ continue sur } I \\ \forall (x,t) \in K \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t) \\ \forall (x,t) \in K \times I,\ |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi(t) \end{cases}$$

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_I f(x,t)dt$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur K et :

$$\forall x \in K,\ g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Remarque 2

Dans la démonstration, on n'a pas utilisé l'hypothèse de domination de f, néanmoins elle sert à justifier que g est bien définie sur K. On peut se dispenser de sa vérification si on démontre séparément que g est bien définie sur K.

Dans le cas où I est un segment, il suffit que f soit continue sur $K \times I$ et admette une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $K \times I$ pour que g soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur K. (Là aussi pas besoin de domination).

Avec les données du théorème précédent on se donne un entier $k \in \mathbb{N}^*$, et on suppose qu'il existe des fonctions

$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_k$ continue par morceaux positives intégrables sur I telles que :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ admet des dérivées partielles } \frac{\partial^i f}{\partial x^i} \text{ continues sur } I,\ i \in [\![1,k]\!] \\ \forall i \in [\![0,k]\!], \forall (x,t) \in K \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi_i(t) \end{cases}$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur K et :

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \forall (x,t) \in K \times I,\ g^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$

2 Transformée de Laplace

Définition 1

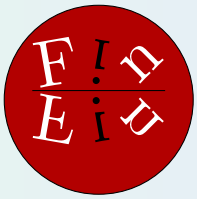
- Fonction de Heaviside ou Échelon unité : $U(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$
- Fonction causale : nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
- Transformée de Laplace de f, causale : $\mathcal{L}f(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$.
- f s'appelle l'original de $\mathcal{L}f$.
- le produit de convolution de f et de g noté $f * g$ est la fonction définie par

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

Proposition 1

- $\mathcal{L}(f + \lambda g) = \mathcal{L}f + \lambda \mathcal{L}g$.
- $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f.\mathcal{L}g$.
- $\mathcal{L}(U(x-a)f(x-a)) = \mathcal{L}f(x)e^{-xa}$.
- $\mathcal{L}(U(x)f'(x)) = x\mathcal{L}f(x) - f(0^+)$.
- $\mathcal{L}(U(x)\int_0^x f(t)dt) = \mathcal{L}f(x)e^{-xa}$.
- $\mathcal{L}(U(x)) = \frac{1}{x}$.

- $\mathcal{L}(u(x)e^{-ax}) = \dfrac{1}{x+a}$.
- $\mathcal{L}(u(x)x^n) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.
- $\mathcal{L}(u(x)\cos \omega x) = \dfrac{x}{x^2+\omega^2}$.
- $\mathcal{L}(u(x)\sin \omega x) = \dfrac{\omega}{x^2+\omega^2}$.



Séries de Fourier

Chapitre 14

Blague du jour

Dans une voiture, quatre ingénieurs. Tout coup la voiture s'arrête..
- Le Mécanicien: Je le savais, c'est un problème de transmission.
- Le chimiste: c'est la faute des acides de la batterie !
- L'électronicien: c'est le circuit électronique qui ne marche plus !.
- L'Informaticien en dernier : ... et si on essayait de fermer toutes les fenêtres ouvertes, de quitter, et redémarrer à nouveau ?

David Hilbert (1862-1943)

Mathématicien du jour

Mathématicien allemand. Il est considéré comme un des plus grands mathématiciens du XX ème siècle, au même titre que Henri Poincaré. Il a développé la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie, les fondements de l'analyse fonctionnelle, la mécanique quantique et la relativité générale. Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.

Remerciements: à Mr Karim Chaira (Mohammedia) pour la source latex de ce résumé de cours.

Dans tous le document $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Espaces de Hilbert.

1.1 Généralités.

Définition 1

On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien complet.

Remarque 1

mathbbTout espace préhilbertien de dimension finie (i.e: hermitien ou euclidien) est un espace de Hilbert. Dans ce cas, si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est un base orthonormale directe , $\forall x \in H$, on a les propriétés suivantes:

- : $x - \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e_i}) \in F^{\perp}$;
- $H = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$;
- $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e_i})$ est la projection orthogonale de x sur F;
- $d(x,F) = d(x,p_F(x)) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\ (\overrightarrow{x}|\overrightarrow{e_i})\ |^2}$;
- $P_F(x)$ est la meilleur approximation dans F du vecteur x de E;
- L'application $x \mapsto P_F(x)$ est un endomorphisme de E, continue, et de norme 1 si $F \neq \{0\}$;
- $\|P_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x|e_i)|^2 =\leqslant \|x\|^2$ (Inégalité de Bessel)

1.2 Bases hilbertienne.

Définition 2

Soient $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien et I un ensemble dénombrable. On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$, d'éléments de E est une base hilbertienne de E si elle vérifie les conditions suivantes :
(i) $(e_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale de E,
(ii) l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des vecteurs de $\{e_i\ ;\ i \in I\}$ forment un sous- espace dense dans E.
On dit aussi que $(e_i)_{i\in I}$ est une famille orthonormale totale de E.

Exemples:

- L'espace $\ell^2(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\ ;$ la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2$ est convergente $\}$, muni du produit scalaire : $(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$, pour tout $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$, est un espace de Hilbert. Soit e_n la suite dans dont tous les termes sont nuls sauf le $(n+1)^{\text{ième}}$ qui est égal à 1.
$\{e_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une famille orthonormale totale de $\ell^2(\mathbb{N})$.

- On considère l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g)\mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)dt$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=e^{inx}$. La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.
- On considère l'espace préhilbertien $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g)\mapsto \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et pour tout . La famille $(\cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}\cup(\sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1.3 Coefficients de Fourier

Définition 3

Soient $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E. Pour tout $x\in E$, la suite $((x|e_i))_{i\in I}$ est appelée famille des coefficients de Fourier de x relativement à la base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de E.

Remarque 2

- On rappelle que l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g)\mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(t)}g(t)dt$ est préhilbertien et que la famille $(e^{inx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Dans ce cas les coefficients de Fourier pour une application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ sont données par la formule:
$$\forall n\in\mathbb{Z},\ c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt.$$
- On rappelle que l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 2π-périodiques, continues sur $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire $(.|.) : (f,g)\mapsto \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt$ est préhilbertien et que la famille $(\cos nx)_{n\in\mathbb{N}}\cup(\sin nx)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Dans ce cas les coefficients de Fourier pour une application $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ sont données par les formules:
$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N},\ a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt\\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt\end{cases}$$

Théorème 1

Soient $(E,(.|.))$ un espace de Hilbert et $(e_i)_{i\in I}$ une base hilbertienne de E, où $I=\mathbb{N}\mathbb{T}extou\mathbb{Z}$. Alors, pour tout $x\in E$,
(i) la série $\sum_{n\in I}(e_n|x).e_n$ est convergente dans E, pour la norme $\|.\|_2$, avec :

$$x = \sum_{n\in I} (e_n|x).e_n,$$

(ii) la série $\sum_{n\in I} |(x|e_n)|^2$ est convergente, et on a :

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in I} |(e_n|x)|^2 \quad \text{Égalité de Parseval}$$

1.4 Séries trigonométriques.

Définition 4

On appelle polynôme trigonométrique toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telle qu'il existe des constantes $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ et $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n$ de $\mathbb{K}$ vérifiant: $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)).$$

Remarque 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une application, alors f est un polynôme trigonométrique si et seulement s'ils existent des constantes $\gamma_{-n}, ..., \gamma_0, ..., \gamma_n$ de $\mathbb{K}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikx}$$

Définition 5

On appelle série trigonométrique associée à une famille $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $\mathbb{C}$, la série de fonctions $\sum_{p\geq 0} u_p$, où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u_0(x) = c_0, \\ u_p(x) = c_p e^{ipx} + c_{-p} e^{-ipx}, \ p \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Remarque 4

Pour tout $(p, x) \in \mathbb{N}\mathbb{T}imes\mathbb{R}$, $c_p e^{ipx} + c_{-p} e^{-ipx} = a_p \cos(px) + b_p \sin(px)$,

$$\text{où} \begin{cases} a_p = c_p + c_{-p} \\ b_p = i\,(c_p - c_{-p}) \\ c_p = a_p - ib_p \\ c_{-p} = a_p + ib_p \end{cases}$$

Théorème 2

Soit $\sum_{p\geq 0} u_p$ une série trigonométrique de terme général $u_p : x \mapsto c_p e^{ipx} + c_{-p}e^{-ipx} = a_p \cos(px) + b_p \sin(px)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) La série $\sum_{p\geq 0} u_p$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

(ii) Les séries numériques $\sum_{p\geq 0} c_p$ et $\sum_{p\geq 1} c_{-p}$ sont absolument convergentes.

(iii) Les séries numériques $\sum_{p\geq 0} a_p$ et $\sum_{p\geq 0} b_p$ sont absolument convergentes.

2 Séries de Fourier

2.1 Coefficients de Fourier.

Définition 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$.

(i) On appelle coefficients de Fourier exponentielle de f les nombres complexes :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

(ii) On appelle coefficients de Fourier trigonométriques de f les nombres complexes:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt,\ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt$$

Proposition 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes:

- $\begin{cases} c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : c_n(f) = \frac{a_n(f) - i\, b_n(f)}{2} \\ \\ \forall n \in \mathbb{N}^* : c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + i\, b_n(f)}{2} \end{cases}$
- Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) \in \mathbb{R}$ et $b_n(f) \in \mathbb{R}$.
- Si f est paire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt$ et $b_n(f) = 0$.

- Si f est impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$.
- $c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}$, $a_n(\overline{f}) = \overline{a_n(f)}$ et $b_n(\overline{f}) = \overline{b_n(f)}$.
- On pose $\widehat{f}(t) = f(-t)$, on a: $c_n(\widehat{f}) = c_{-n}(f)$, $a_n(\widehat{f}) = a_n(f)$ et $b_n(\widehat{f}) = -b_n(f)$.
- On pose $f_a(t) = f(t+a)$, on a: $c_n(f_a) = e^{ina}c_n(f)$, $a_n(f_a) = \cos(na)a_n(f) + \sin(na)b_n(f)$ et $b_n(f_a) = \cos(na)b_n(f) - \sin(na)a_n(f)$.
- Les applications $f \mapsto c_n(f)$, $f \mapsto a_n(f)$ et $f \mapsto b_n(f)$ sont $\mathbb{C}$-linéaires.
- Si de plus f est normalisée, alors on a:
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n(f) = 0$.
  - $|c_n(f)| \leq \|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|dt$.

Définition 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalle $]a_{i-1}, a_i[$, est prolongeable en une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_{i-1}, a_i]$, $1 \leqslant i \leq n$.

Proposition 2

- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une application 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Soit $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique, alors: $c_n(f') = i\,n.c_n(f)$.
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ si l'application $f^{(k-1)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas:
$$c_n(f^{(k)}) = (i\,n)^k c_n(f).$$

2.2 Sommes de Fourier.

Définition 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$. On appelle sommes partielles de Fourier associées à f d'ordre n, $n \in \mathbb{N}$, l'application $S_n(f)$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}$.

Remarque 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)) \text{ et } S_0(f)(x) = \tfrac{a_0}{2}.$$

Définition 9

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et réglée sur $\mathbb{R}$. On appelle série de Fourier de f en un point x de $\mathbb{R}$, la suite $\left(\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e^{inx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ ou $\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$.

On dit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx}$ est une série à double entrée.

On dit que cette série est convergente au point x de $\mathbb{R}$ si $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e^{inx}\right)$ existe dans $\mathbb{C}$; dans ce cas, on la note : $\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_n(f)e^{inx}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$.

Notation.

- $(\mathcal{L}(\mathbb{T}), <.,.>)$ désigne l'espace préhilbertien des fonctions réglées normalisées 2π-périodiques.
- On note, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, l'application définie par : $\forall t \in \mathbb{R}$, $e_n(t) = e^{int}$.
- F_n le sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{T})$ engendré par $(e_k)_{|k|\leqslant n}$, c'est à dire $F_n = vect(\{e_k; |k| \leqslant n\})$.

On a les propriétés suivantes:

- $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est base hilbertienne de l'espace préhibertien complexe $\mathcal{L}(\mathbb{T})$. Avec, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = <e_n, f>$.
- Pour tout $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, on a $S_n(f)$ est la projection orthogonale de f sur F_n.

Théorème 3

Inégalité de Bessel Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2$.

2.3 Convergence quadratique.

Théorème 4

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, alors $\lim_{n\to+\infty} \|f - S_n(f)\|_2 = 0$

On dit que $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique.

Théorème 5

Formule de Parseval.Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, alors $\|f\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2 \right)$

Théorème 6

Si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{T})$, alors $(c_n(f))_{n\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, avec $f = 0 \Longleftrightarrow c_n(f) = 0,\ \forall n \in \mathbb{Z}$

2.4 Convergence ponctuelle.

Notation : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une application 2π-périodique et contionue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} f(x+h)$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} f(x+h)$ existent bien dans $\mathbb{C}$, on les notera respectivement $f(x^-)$ et $f(x^+)$.

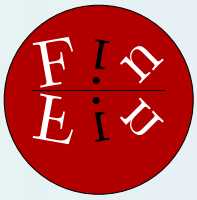
Théorème 7

Théorème de DirichletSoit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Alors, en tout point x de $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f, $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$
converge vers $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$.
En particulier, si f est continue en x, alors $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$

2.5 Convergence normale.

Théorème 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application 2π-périodique continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors,
(i) les séries $\sum_{n\geqslant 1} |c_n(f)|$ et $\sum_{n\geqslant 1} |c_{-n}(f)|$ sont convergentes.
(ii) La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k\geqslant 1} (a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx))$, convergent normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers f. En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$.



Équations différentielles

Chapitre 15

Blague du jour

Faites vous partie de la nouvelle économie ? La réponse serait oui, si:
• Pour demander a votre voisin s'il veut aller déjeuner avec vous, vous lui envoyez un mail et il vous répond - également par mail - OK, laisse-moi 5 minutes.
• Vous discutez âprement via un forum avec un type habitant en Amérique du Sud alors que vous n'avez jamais dit bonjour a votre voisin de quartier.

Rudolph Otto Sigismund Lipschitz (1832-1900)

Mathématicien du jour

Mathématicien allemand, étudiant de Dirichlet. Lipschitz a laissé son nom aux applications à dérivée bornée (Application lipschitzienne). Son travail s'étend sur d'autres domaines: la théorie des nombres, l'analyse, la géométrie différentielle et la mécanique classique. Lipschitz a en outre donné un critère de convergence des développements en série de Fourier.

Remerciements: à David Delaunay (Paris) pour la source de ce résumé de cours.

Dans tout le chapitre **I** est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Équations différentielles linéaires.

1.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1.

a Équation différentielle scalaire.

Définition 1

On appelle équation différentielle scalaire linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbf{I}$ toute équation de la forme $\mathbf{x'} = \mathbf{a(t)x} + \mathbf{b(t)}$ avec $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{a(t)}$ et $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{b(t)}$ fonctions continues de $\mathbf{I}$ vers $\mathbb{K}$ et d'inconnue $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{x(t)}$ fonction dérivable de $\mathbf{I}$ vers $\mathbb{K}$.

Théorème 1

Pour $\mathbf{t_0} \in \mathbf{I}$ et $\mathbf{x_0} \in \mathbb{K}$, l'équation $\mathbf{x'} = \mathbf{a(t)x} + \mathbf{b(t)}$ possède une unique solution sur $\mathbf{I}$ vérifiant la condition initiale $\mathbf{x(t_0)} = \mathbf{x_0}$, donnée par la formule de Duhamel:

$$\mathbf{x(t)} = \left(\mathbf{x_0} + \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{b(u)} e^{-\mathbf{A(u)}} \mathbf{du}\right) e^{\mathbf{A(t)}} \text{ où } \mathbf{A(t)} = \int_{\mathbf{t_0}}^{\mathbf{t}} \mathbf{a(u)} \mathbf{du}.$$

b Système différentiel.

Définition 2

On appelle système différentiel de taille $\mathbf{n}$ linéaire d'ordre 1 défini sur $\mathbf{I}$ tout système de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{x_1'} = \mathbf{a_{1,1}(t)x_1} + \cdots + \mathbf{a_{1,n}(t)x_n} + \mathbf{b_1(t)} \\ \vdots \\ \mathbf{x_n'} = \mathbf{a_{n,1}(t)x_1} + \cdots + \mathbf{a_{n,n}(t)x_n} + \mathbf{b_n(t)} \end{cases}$$

avec $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{a_{i,j}(t)}$ et $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{b_i(t)}$ fonctions continues de $\mathbf{I}$ vers $\mathbb{K}$ et d'inconnue $\mathbf{t} \mapsto (\mathbf{x_1(t)}, \cdots, \mathbf{x_n(t)})$ fonction dérivable de $\mathbf{I}$ vers $\mathbb{K}^{\mathbf{n}}$.

c Équation différentielle matricielle.

Définition 3

On appelle équation différentielle matricielle de taille $\mathbf{n}$ linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbf{I}$ toute équation de la forme : $\mathbf{X'} = \mathbf{A(t)X} + \mathbf{B(t)}$ avec $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{A(t)}$ fonction continue de $\mathbf{I}$ vers $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$, $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{B(t)}$ fonction continue de $\mathbf{I}$ vers $\mathcal{M}_{\mathbf{n},1}(\mathbb{K})$ et d'inconnue $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{X(t)}$ fonction dérivable de $\mathbf{I}$ vers $\mathcal{M}_{\mathbf{n},1}(\mathbb{K})$.

Remarque 1

Par l'identification usuelle entre $\mathbb{K}^{\mathbf{n}}$ et $\mathcal{M}_{\mathbf{n},1}(\mathbb{K})$, systèmes différentiels et équations matricielles se correspondent.

d Équation différentielle vectorielle.

Définition 4

Soit $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 à valeurs dans $\mathbf{E}$ définie sur $\mathbf{I}$ toute équation de la forme $x' = a(t)(x) + b(t)$ avec $t \mapsto a(t)$ fonction continue de $\mathbf{I}$ vers $\mathcal{L}(\mathbf{E})$, $t \mapsto b(t)$ fonction continue de $\mathbf{I}$ vers $\mathbf{E}$ et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ fonction dérivable de $\mathbf{I}$ vers $\mathbf{E}$.

Remarque 2

1. L'équation différentielle vectorielle généralise les autres types d'équations:
   - Pour $\mathbf{E} = \mathbb{K}$: les équations scalaires.
   - Pour $\mathbf{E} = \mathbb{K}^n$: les systèmes différentiels.
   - Pour $\mathbf{E} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: les équation matricielles.
2. Pour alléger les écritures, on adopte la notation fx au lieu de $f(x)$. L'équation étudiée s'écrit alors $x' = a(t)x + b(t)$.
3. En introduisant une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{E}$ et en posant $A(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(a(t)), B(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(b(t))$ et $X(t) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x(t))$, l'équation vectorielle $x' = a(t)x + b(t)$ équivaut à l'équation matricielle $X' = A(t)X + B(t)$. Ainsi toute équation vectorielle équivaut à une équation matricielle ou encore à un système différentiel.
4. D'un point de vue théorique, on préfère manipuler la notion d'équation vectorielle. D'un point de vue pratique, on transpose en terme de système différentiel ou d'équation matricielle en travaillant dans une base bien choisie.

e Problème de Cauchy

Définition 5

Soient $\mathbf{E}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $a : \mathbf{I} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{E})$ et $b : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{E}$ des fonctions continues. On étudie l'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ de fonction inconnue $x : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{E}$ dérivable. Soient $t_0 \in \mathbf{I}$ et $x_0 \in \mathbf{E}$. On appelle problème de Cauchy la détermination des solutions de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

f Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 2

L'équation différentielle $x' = a(t)x + b(t)$ possède une unique solution sur $\mathbf{I}$ vérifiant la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

Corollaire 1

L'ensemble S_0 des solutions sur $\mathbf{I}$ de l'équation homogène $x' = a(t)x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbf{I}, \mathbf{E})$ de dimension $n = \dim \mathbf{E}$.

On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)x$ toute base $(x_1, \dots, x_n)$ de l'espace S_0. la solution générale homogène est $x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_n x_n(t)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

Définition 6

On appelle wronskien dans une base $\mathcal{B}$ de E d'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de solutions de l'équation $x' = a(t)x$, la fonction $w_{\mathcal{B}} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par : $w_{\mathcal{B}}(t) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t))$.

Théorème 3

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. $(x_1, \cdots, x_n)$ est un système fondamental de solutions,
2. $\forall t_0 \in I, w_{\mathcal{B}}(t_0) \neq 0$,
3. $\exists t_0 \in I, w_{\mathcal{B}}(t_0) \neq 0$.

g Méthode de la variation des constantes

Théorème 4

Si $(x_1, \cdots, x_n)$ est un système fondamental de solutions de l'équation homogène $x' = a(t)x$, alors on peut trouver une solution particulière de l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ de la forme $x(t) = \lambda_1(t)x_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)x_n(t)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ fonctions dérivables.

Remarque 3

1. La solution générale de l'équation complète $x' = a(t)x + b(t)$ s'écrit sous la forme $x = x_H + x_0$, où x_H solution générale de l'équation homogène $x' = a(t)x$ et x_0 une solution générale de l'équation complète $x' = a(t)x + b(t)$.
2. L'ensemble S des solutions sur I de $x' = a(t)x + b(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, E)$ de direction S_0 (et donc de dimension n).

h Équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Définition 7

On appelle équation différentielle à valeurs dans E linéaire d'ordre 1 à coefficient constant définie sur I toute équation différentielle de la forme $x' = ax + b(t)$ avec $a \in \mathcal{L}(E), t \mapsto b(t)$ continue de I vers E et d'inconnue $t \mapsto x(t)$ dérivable de I vers E.

Remarque 4

Via l'introduction d'une base de E, une telle équation différentielle correspond :

1. à une équation matricielle $X' = AX + B(t)$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
2. à un système différentiel : $\begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n + b_n(t) \end{cases}$

   avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ et $t \mapsto b_i(t)$ fonctions continues de I vers $\mathbb{K}$ et d'inconnue $t \mapsto (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ fonction dérivable de I vers $\mathbb{K}^n$.

Remarque 5

1. Pour $a \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\exp(a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \in \mathcal{L}(E)$.
2. $\exp(0) = Id_E$.
3. Si $a, b \in \mathcal{L}(E)$ commutent alors $\exp(a) \circ \exp(b) = \exp(a+b) = \exp(b) \circ \exp(a)$.
4. l'application $t \mapsto \exp(ta)$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ et $\exp(ta)' = a \circ \exp(ta) = \exp(ta) \circ a$.

Théorème 5

Pour $a \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$, l'unique solution à l'équation $x' = ax$ vérifiant $x(0) = x_0$ est la fonction $x : t \mapsto \exp(ta)x_0$.

1.2 Équations linéaires scalaires d'ordre 2

Définition 8

On appelle équation différentielle linéaire (scalaire) d'ordre 2 définie sur I toute équation de la forme $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ avec $a, b, c : I \mapsto \mathbb{K}$ continues et d'inconnue $x : I \mapsto \mathbb{K}$ deux fois dérivable.

Lorsque les fonctions a et b sont constantes, on parle d'équation à coefficients constants.

Remarque 6

l'équation $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ est équivalente au système différentiel de taille 2: $\begin{cases} x' = y \\ y' = a(t)y + b(t)x + c(t) \end{cases}$.

a Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 6

Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, $t_0 \in I$ et $x_0, x_0' \in \mathbb{K}$. L'équation différentielle $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ possède une unique solution sur I vérifiant les conditions initiales : $x(t_0) = x_0 et x'(t_0) = x_1$.

Corollaire 2

• L'ensemble S_0 des solutions sur I de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.

• L'ensemble S des solutions sur I de l'équation complète $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ est un plan affine de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de direction S_0.

b Équation linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

Pour résoudre l'équation $y'' + ay' + by = 0$, on introduit son équation caractéristique $(*)$ $r^2 + ar + b = 0$ de discriminant Δ.

1. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
   - Si $\Delta \neq 0$, on a 2 solutions α, β de (*), alors $y(t) = \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
   - Si $\Delta \neq 0$, on 1 solution double α de (*), alors $y(t) = (\lambda + \mu t)e^{\alpha t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   - Si $\Delta \geq 0$: pareil que le cas réel avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   - Si $\Delta < 0$, on a 2 solutions de (*) conjuguées $\alpha \pm i\omega$, alors $y(t) = e^{\alpha t}(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t))$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Définition 9

• On appelle système fondamental de solutions de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x$ toute base (x_1, x_2) de l'espace S_0.

• On appelle wronskien d'une famille (x_1, x_2) de solutions de l'équation homogène la fonction $t \mapsto w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$.

Théorème 7

Si x_1, x_2 sont solutions de l'équation homogène alors on a équivalence entre :

1. (x_1, x_2) est un système fondamental de solution,

2. $\forall t_0 \in I,\ w(t_0) \neq 0$,

3. $\exists t_0 \in I,\ w(t_0) \neq 0$.

c Méthode de variation des constantes.

Théorème 8

On peut trouver une solution particulière sur I de l'équation $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ de la forme $x(t) = \lambda(t)x_1(t) + \mu(t)x_2(t)$ avec $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{K}$ fonctions dérivables vérifiant : $\begin{cases} \lambda'(t)x_1(t) + \mu'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda'(t)x_1'(t) + \mu'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$

d Méthode de Lagrange:

Supposons connue une solution x_1 de l'équation homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$, ne s'annulant pas sur I, avec $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues. On peut obtenir une solution x_2 indépendante de x_1 en la recherchant sous la forme $x_2(t) = \lambda(t)x_1(t)$ avec λ fonction deux fois dérivable.

e Résolution de l'équation complète:

Pour résoudre $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$:

• On cherche une solution particulière x_1 de l'équation homogène $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, polynomiales, développable en série entière, à l'aide d'un changement de variable ou de fonctions.

• On forme un système homogène (x_1, x_2) à l'aide de la méthode de Lagrange.

• On cherche un solution particulière de l'équation complète $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ sous la forme $x_0 = \lambda_1(t)x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$ à l'aide de la méthode des variations des constantes.

• La forme générale de la solution de l'équation complète $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$ est $x(t) = (\lambda_1(t) + \lambda)x_1(t) + (\lambda_2 + \mu)x_2(t)$

Équations différentielles non linéaires.

Dans toute la suite U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2.1 Équation différentielle scalaire non linéaire d'ordre 1.

Définition 10

• Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On appelle solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ sur I, toute fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant:

$$\begin{cases} \forall x \in I, (x, y(x)) \in U \\ \forall x \in I, y'(x) = f(x, y(x)) \end{cases}$$

• Une telle solution sur I est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$.

• Une solution est dite maximale si elle ne peut pas être prolongée en une solution définie sur un intervalle strictement plus grand.

• On appelle courbe intégrale toute courbe d'une solution maximale.

Proposition 1

• Une solution définie sur $\mathbb{R}$ est une solution maximale.

• Toute restriction d'une solution maximale est encore solution.

• Toute solution est restriction d'au moins une solution maximale.

a Problème de Cauchy

Soit $(x_0, y_0) \in U$, le problème de Cauchy consiste à déterminer les solutions de l'équation $y' = f(x, y)$ satisfaisant la condition initiale : $y(x_0) = y_0$.

Théorème 9

Théorème de Cauchy-Lipschitz Si $(x_0, y_0) \in U$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors le problème de Cauchy possède une unique solution maximale.

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Corollaire 3

Les courbes intégrales de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ constituent alors une partition de U. En particulier si une fonction constante égale à λ est solution $\mathbb{R}$ alors aucune autre solution maximale ne prend la valeur λ.

b Équations à variables séparables:

Ce sont les équations de la forme $p(y)y' = q(x)$. Pour P et Q primitives de p et q, on obtient : $P(y) = Q(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. Si de plus, on peut inverser P, on obtient $y(x) = P^{-1}(Q(x) + C)$.

2.2 Équations autonomes

a Équation autonome d'ordre 1

Définition 11

On appelle équation autonome d'ordre 1 toute équation différentielle de la forme $y' = f(y)$ avec $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction continue.

Théorème 10

Théorème de Cauchy-LipschitzSi $y_0 \in I$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$.

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy est restriction de cette solution maximale.

Corollaire 4

Les solutions de l'équation $y' = f(y)$ sont soit constantes ou injectives.

b Système autonome de taille 2.

Définition 12

• Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. On appelle système autonome de taille 2, tout système différentiel différentiel de la forme: $\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$.

• On appelle solution sur I tout couple (x, y) formé de fonctions dérivables sur I vérifiant :

1) $\forall t \in I,\ (x(t), y(t)) \in U$,

2) $\forall t \in I,\ x'(t) = f(x(t), y(t))$ et $y'(t) = g(x(t), y(t))$.

Théorème 11

Si $(x_0, y_0) \in U$ et si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$.

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy en est une restriction.

Corollaire 5

Les solutions maximales d'un système autonome de taille 2 sont bien injectives, ou bien périodiques définies sur $\mathbb{R}$.

c Équation autonome d'ordre 2

Définition 13

• On appelle équation autonome d'ordre 2, toute équation différentielle de la forme $x'' = f(x,x')$, où $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.

• On appelle solution sur I toute fonction $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable et vérifiant:

1) $\forall t \in I, (x(t), x'(t)) \in U$,

2) $\forall t \in I, x''(t) = f(x(t), x'(t))$.

• Une telle solution est nécessairement une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Remarque 7

Toute équation autonome d'ordre 2 $x'' = f(x,x')$ peut être ramenée à un système autonome de taille 2, de la forme $\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x,y) \end{cases}$.

d Théorème de Cauchy-Lipschitz

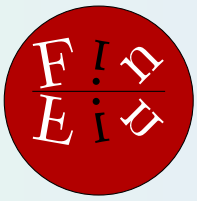
Théorème 12

Si $(x_0, x_0') \in U$ et si f est de classe $\mathcal{C}^1$ alors il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy formé par l'équation $x'' = f(x,x')$ et les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $x'(0) = x_0'$.

De plus, celle-ci est définie sur un intervalle ouvert contenant 0 et toute autre solution de ce problème de Cauchy en est une restriction.

Corollaire 6

Si $\mathbf{x}$ est une solution maximale, alors ou bien $\mathbf{t} \mapsto (\mathbf{x}(\mathbf{t}), \mathbf{x}'(\mathbf{t}))$ est injective ou bien $\mathbf{x}$ est périodique définie sur $\mathbb{R}$.

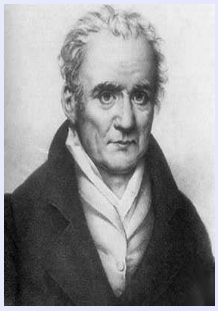


Courbes et surfaces

Chapitre 16

Blague du jour

Faites vous partie de la nouvelle économie ? La réponse serait oui, si:
• Quand vous perdez un copain de vue, c'est parce qu'il n'a pas d'adresse e-mail. Vous ignorez combien coûte un timbre poste.
• La plupart des blagues que vous connaissez, vous les avez reçues par mail.
• Vous venez de lire cette liste en vous répétant a chaque ligne "oui, c'est vrai ", mais vous vous demandez déjà à qui vous allez envoyer ce lien !



Gaspard Monge (1746-1818)

Mathématicien du jour

Mathématicien français dont l'œuvre considérable mêle géométrie descriptive, analyse infinitésimale et géométrie analytique. Il enseigne dès l'âge de seize ans les sciences physiques. Il joue un grand rôle dans la Révolution française, il participe à la création de l'École normale, de l'École polytechnique et de l'École d'arts et métiers. Sous l'égide de Bonaparte, il fût chargé de missions lors des campagnes d'Égypte et d'Italie.

Remerciements: à David Delaunay (Paris) pour la source de ce résumé de cours.

Courbes

1.1 Courbes planes

Définition 1

On appelle arc plan (ou courbe plane) paramétré(e) de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^2$ tout couple $(\gamma) = (I, M)$ formé d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une application $M : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$ de classe C^k.

a Vocabulaire et notations.

Soit $(\gamma) = (I, M)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et $t_0 \in I$.

• On pose alors $\gamma^{(p)}(t_0) = \dfrac{d^k\overrightarrow{OM}}{dt^k}(t_0) = \dfrac{d^kM}{dt^k}(t_0) = \overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0)$
$= x^{(p)}(t_0)\vec{i} + y^{(p)}(t_0)\vec{j},\ \forall 0 \leq p \leq k$.

• Un point $M(t_0)$ de (γ) est dit régulier si la vitesse en ce point $\vec{V}(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j}$ est non nulle.

• (γ) est dit régulier, si tous ses points son réguliers.

• Un point $M(t_0)$ de (γ) est dit birégulier si l'accélération en ce point $\vec{\Gamma}(t_0) = x''(t_0)\vec{i} + y''(t_0)\vec{j}$ est non nulle.

• (γ) est dit birégulier, si tous ses points son biréguliers.

• L'ensemble des points $\{M(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I\}$ s'appelle support de l'arc paramétré.

• L'application $M : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t)) \end{array}$ s'appelle paramétrage admissible de (γ), il est dit normal quand $\left\|\vec{V}\right\|(t) = 1,\ \forall t \in I$.

• On appelle changement de paramétrage de (γ), tout de classe $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme $\varphi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \longmapsto & u = \varphi(t) \end{array}$

Dans ce cas l'application $M \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u & \longmapsto & M(u) = (x(\varphi^{-1}(u)), y(\varphi^{-1}(u))) \end{array}$ est aussi un paramétrage admissible de (γ).

• Une notion relative à un arc invariante par changement de paramétrage est qualifiée de géométrique. Le support d'un arc, la régularité et la birégularité d'un point sont des notions géométriques. La vitesse en un point n'est pas une notion géométrique, alors que la droite tangente est une notion géométrique.

• Une notion relative à un arc invariante par changement de paramétrage croissant est qualifiée de géométrique orientée. Le sens de parcours d'un arc est une notion géométrique orientée. Les demi-tangente sont des notions géométriques orientées.

Définition 2

Soit $(\gamma) = (I, M)$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ et $t_0 \in I$.

• On appelle abscisse curviligne d'origine $M_0 = M(t_0)$ le long de l'arc (γ) l'application $s : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left\|\vec{V}(u)\right\| du$

• Soit $A = M(a)$ et $B = M(b)$ deux points de (γ), on appelle longueur de l'arc orienté $\overset{\frown}{AB}$, le réel noté $\ell(\overset{\frown}{AB})$, défini par: $\ell(\overset{\frown}{AB}) = s(b) - s(a) = \int_a^b \left\|\overrightarrow{V}(u)\right\| du$

Remarque 1

• L'abscisse curviligne et la longueur sont des notions géométriques orientées.

• Si de plus (γ) est régulier, alors l'application $s : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \longmapsto & s = s(t) \end{array}$ est un de classe $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme et l'application $M : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ s & \longmapsto & M(s) = (x(s), y(s)) \end{array}$ est un paramétrage normal.

• Le vecteur $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$ est un vecteur unitaire tangent à (γ) au point $M(s)$ c'est une notion géométrique orientée.

Définition 3

• On pose $\overrightarrow{T} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha\,\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{T} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\alpha\,\overrightarrow{j}$, le repère $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est un repère orthonormé direct, appelé repère de Frenet.

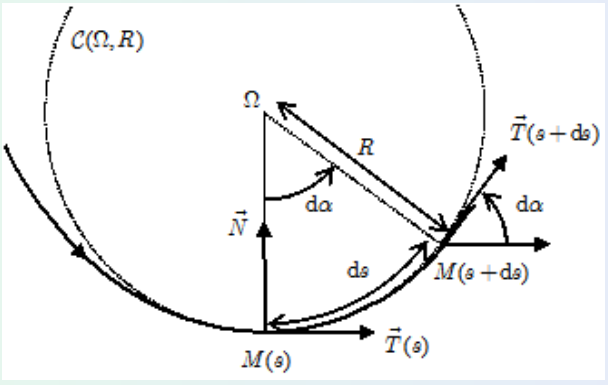
• $c = \dfrac{d\alpha}{ds}$ s'appelle la courbure de (γ) au point $M = M(s)$.

• Si M est birégulier on pose:

$R = \dfrac{1}{c}$: rayon de courbure en M.

$\Omega = M + R\overrightarrow{N}$: centre de courbure en M,, situé toujours dans la partie convexe de la courbe.

$\mathcal{C}(\Omega, |R|)$: cercle osculateur en M.



b Formules à apprendre:

- $\dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha,\ \dfrac{dy}{ds} = \sin\alpha.$
- $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = \dfrac{1}{R}\vec{N},\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -\dfrac{1}{R}\vec{T}.$
- $R = \dfrac{\left\|\vec{V}\right\|}{\det(\vec{V},\vec{\Gamma})}.$

1.2 Courbes gauches

Définition 4

On appelle courbe gauche, tout arc paramétré à support dans $\mathbb{R}^3$, tous les notions définies pour une courbe plane sont encore valable pour celle gauche, notamment les notions de vitesse, accélération, paramétrage admissible, normal, abscisse curviligne, longueur d'un arc et orientation.

a Formules à apprendre:

L'arc est supposé régulier, et birégulier à partir de la 3ème propriété.

- $\vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$, le vecteur unitaire tangent à la courbe.
- $c = \left\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\|$, la courbure de la courbe.
- $R_c = \dfrac{1}{c}$, le rayon de courbure de la courbe.
- $\vec{T} = \dfrac{d\vec{T}}{ds} \Big/ \left\|\dfrac{d\vec{T}}{ds}\right\|$, le vecteur unitaire normal à la courbe.
- $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$, le vecteur unitaire binormal à la courbe.
- Le repère $(M, \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est un repère orthonormé direct, appelé repère de Frenet.

- $\tau = \left\| \frac{d\vec{B}}{ds} \right\|$, la torsion de la courbe.
- $R_\tau = \frac{1}{\tau}$, le rayon de torsion de la courbe.
- Formules de Serret-Frenet: $\begin{pmatrix} \frac{d\vec{T}}{ds} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R_c} & 0 \\ -\frac{1}{R_c} & 0 & \frac{1}{R_\tau} \\ 0 & -\frac{1}{R_\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$
- $R_c = \frac{\|\gamma'\|^3}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}$ et $R_\tau = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}{\det(\gamma', \gamma'', \gamma'''')}$

2 Surfaces

2.1 Généralités

Définition 5

On appelle nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ de $\mathbb{R}^3$ tout couple $(\Sigma) = (U, M)$ formé d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et d'une application $M : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array}$ de classe $\mathcal{C}^k$.

a Vocabulaire:

- $M(u,v)$ est appelé point courant de (Σ) de paramètre (u,v).
- L'ensemble des points courants $\{M(u,v)$ tel que $(u,v) \in U\}$ est appelé support de la nappe (Σ).
- L'application $M : (u,v) \mapsto (x,y,z)$ s'appelle un paramétrage de (Σ).
- Le point $M_0 = M(u_0, v_0)$ est dit régulier si les vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$ ne sont pas colinéaires. Sinon on dit que le point est stationnaire.

• La nappe (Σ) est dite régulière si et seulement si tous ses points le sont.

Théorème 1

Si M_0 est régulier et si (γ) est un arc régulier tracé sur (Σ) passant par M_0 alors la tangente à (γ) en M_0 est incluse dans le plan π passant par M_0 et dirigé par $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial v}(u_0, v_0)$.

Ce plan π est appelé plan tangent à (Σ) en M_0. La droite perpendiculaire à π en M_0 est appelée droite normale à (Σ) en M_0.

Théorème 2

Si (Σ) est définie par une équation implicite de type $z = f(x, y)$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors au point $M_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, la surface (Σ) admet un plan tangent d'équation: $z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y0)$.

Remarque 2

Pour étudier la position de ce plan tangent par rapport à la surface (Σ), on pose:

$r = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0, y_0), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $t = r = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0, y_0)$ (Notations de Monge).

• si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors (Σ) est localement au dessus de π (point elliptique),

• si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors (Σ) est localement en dessous de π (point elliptique),

• si $rt - s^2 < 0$ alors (Σ) traverse le plan π (point hyperbolique ou point col),

• si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

Théorème 3

Soient $f : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ **classe 1** et (Σ) d'équation: $f(x, y, z) = 0$. Un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de (Σ) est dit régulier si $\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Dans ce cas, l'équation du plan tangent au point M_0 est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Théorème 4

$f_1, f_2 : U \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, (Σ_1) et (Σ_2) d'équations respectives: $f_1(x, y, z) = 0$ et $f_2(x, y, z) = 0$. Considérons $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point régulier commun à (Σ_1) et (Σ_2) et que (Σ_1) et (Σ_2) admettent en ce point des plans tangents π_1 et π_2 non confondus.

Dans ce cas, $(\Sigma_1) \cap (\Sigma_2)$ est un arc régulierde classe $\mathcal{C}^k$ dont la tangente en M_0 est $\pi_1 \cap \pi_2$.

2.2 Surfaces usuelles

a Cylindres

b Vocabulaire.

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et (γ) une courbe de l'espace.

- On appelle cylindre (Σ) de direction $\vec{u}$ engendré par (γ) la réunion des droites $(M;\vec{u})$ avec $M \in (\gamma)$.
- Ces droites sont appelées génératrices du cylindre.
- L'intersection du cylindre avec un plan de vecteur normal $\vec{u}$ est appelée section droite du cylindre.

c Remarque pratique:

On peut former une équation cartésienne de (Σ) par élimination de t, à l'aide de la formule suivante: $M \in (\Sigma) \iff \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $M + t\vec{u} \in (\gamma)$.

d Cônes

e Vocabulaire.

Soient Ω un point et (γ) une courbe de l'espace ne contenant pas Ω.

- On appelle cône (Σ) de sommetΩ engendré par (γ) la réunion des droites (ΩM) avec $M \in (\gamma)$. Ces droites sont appelées génératrices du cône.

f Remarque pratique:

On peut former une équation cartésienne de (Σ) par élimination de t, à l'aide de la formule suivante: $M \in (\Sigma) \iff M = \Omega$ ou $\exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\Omega + t\overrightarrow{\Omega M} \in (\gamma)$.

g Surfaces de révolution

h Vocabulaire:

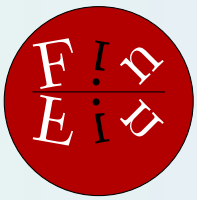
Soient $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{A}; \overrightarrow{\boldsymbol{u}})$ une droite et $(\boldsymbol{\gamma})$ une courbe.

• On appelle surface de révolution $(\boldsymbol{\Sigma})$ d'axe $\boldsymbol{\Delta}$ engendré par $(\boldsymbol{\gamma})$ la réunion des courbes obtenues par rotation de $(\boldsymbol{\gamma})$ autour de $\boldsymbol{\Delta}$. C'est aussi la réunion des cercles centrés sur $\boldsymbol{\Delta}$, inclus dans des plans perpendiculaires à $\boldsymbol{\Delta}$ passant par les points de $(\boldsymbol{\gamma})$.

• Ces cercles sont appelés parallèles de $(\boldsymbol{\Sigma})$ tandis que les intersections de $(\boldsymbol{\gamma})$ avec les plans contenant $\boldsymbol{\Delta}$ sont appelées méridienne de $(\boldsymbol{\Sigma})$.

i Remarque pratique:

On peut former une équation cartésienne de $(\boldsymbol{\Sigma})$ par élimination de $\mathbf{t}$, à l'aide de la formule suivante: $\boldsymbol{M} \in (\boldsymbol{\Sigma}) \Longleftrightarrow \exists \boldsymbol{P} \in (\boldsymbol{\gamma})$ tel que $\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{AP}$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{AM}}.\overrightarrow{\boldsymbol{u}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AP}}.\overrightarrow{\boldsymbol{u}}$.



Intégrales multiples

Chapitre 17

Blague du jour

Un homme demande à un commercial: "quel est le montant de vos honoraires?"
Le commercial lui répond qu'il est de 100 000 Dhs pour trois questions.
l'homme lui demande alors: "n'est-ce pas un peu excessif ?"
le commercial lui répond: "Si. Quelle est votre troisième question?"

George Green (1793-1841)

Mathématicien du jour

Physicien britannique. L'histoire de sa vie a ceci d'exceptionnel qu'il était presque totalement autodidacte: il n'a passé qu'un an environ à l'école, entre 8 et 9 ans. Au cours de sa vie adulte, George Green a travaillé dans le moulin de son père, il intégra l'université comme étudiant à l'âge de 40 ans. Le travail de Green fut peu reconnu par la communauté mathématique au cours de sa vie. Il fut redécouvert en 1846 par Lord Kelvin, qui le fit connaître.

Remerciements: à David Delaunay (Paris) pour la source de ce résumé de cours.

Intégrales doubles

Théorème 1

Théorème de Fubini (sur un rectangle):

- Soient $a < b$ et $c < d$ et $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue alors les fonctions $x \mapsto \int_c^d f(x,y)dy$ et $y \mapsto \int_a^b f(x,y)dx$ sont continues avec

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

• La valeur commune de ces deux intégrales est appelée intégrale (double) de f sur $[a,b]\times[c,d]$, on la note $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$ ou $\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$

Définition 1

• Une partie Δ du plan $\mathbb{R}^2$ est dite x-élémentaire si on peut écrire

$$\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } a\leq x\leq b,\ \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\}$$

avec $a<b$ et $\varphi_1,\varphi_2 : [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant $\forall x\in]a,b[, \varphi_1(x)<\varphi_2(x)$.

• Pour toute fonction $f:\Delta\longrightarrow\mathbb{C}$ continue, on pose

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$

Définition 2

• Une partie Δ du plan $\mathbb{R}^2$ est dite y-élémentaire si on peut écrire

$$\Delta = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tel que } c\leq y\leq d,\ \psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y)\}$$

avec $c<d$ et $\psi_1,\psi_2 : [c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant $\forall y\in]c,d[, \psi_1(y)<\psi_2(y)$.

• Pour toute fonction $f:\Delta\longrightarrow\mathbb{C}$ continue, on pose

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy.$$

Théorème 2

Théorème de Fubini (cas d'une partie élémentaire) Une partie Δ du plan $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire si elle à la fois x et y-élémentaire. Dans ce cas pour toute fonction $f:\Delta\longrightarrow\mathbb{C}$ continue, on a:

$$\iint_\Delta f(x,y)\,dy\,dx = \iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy.$$

Cette valeur commune est appelée intégrale double de f sur Δ et est notée $\iint_\Delta f$.

Définition 3

Une partieΔ de $\mathbb{R}^2$ est dite simple si elle est réunion d'une famille finie non vide de parties élémentaires d'intérieurs deux à deux disjoints:

$\Delta = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ avec $\Delta_1,\ldots,\Delta_n$ élémentaires et $i\neq j \Longrightarrow \mathring{\Delta}_i\cap\mathring{\Delta}_j=\emptyset$.

Dans ce cas, pour toute fonction $f:\Delta\longrightarrow\mathbb{C}$ continue, on appelle intégrale double de f sur Δ le scalaire :

$\iint_{\Delta} f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Delta_i} f$ (ne dépond pas du choix des Δ_i).

Proposition 1

- $\iint_{\Delta} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\Delta} f + \mu \iint_{\Delta} f \iint_{\Delta} g$,
- $f \geq 0 \Longrightarrow \iint_{\Delta} f \geq 0$,
- $f \geq 0$ et $\iint_{\Delta} f = 0 \Longrightarrow f = 0$,
- $\left| \iint_{\Delta} f \right| \leq \iint_{\Delta} |f|$,
- $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset \Longrightarrow \iint_{A \cup B} f = \iint_{A} f + \iint_{B} f$.

Rappel: Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longrightarrow V$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. $\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$. Le jacobien de φ en (x, y) est noté

$$J_{\varphi}(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Théorème 3

Théorème: Formule de changement de variables Soit Δ est une partie incluse dans U. Si Δ et $\varphi(\Delta)$ sont des parties simples de $\mathbb{R}^2$ alors pour toute fonction $f : \varphi(\Delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ continue on a la relation:

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(u, v)\, du\, dv = \iint_{\Delta} f(u(x, y), v(x, y)) |J_{\varphi}(x, y)|\, dx\, dy.$$

Remarque 1

- En coordonnées polaires $dxdy$ devient $rdrd\theta$,
- L'aire d'une partie simple Δ se calcule avec la formule suivante:

$$\mathcal{A}ire(\Delta) = \iint_{\Delta} dxdy.$$

- En coordonnées polaires, la formule du calcul d'aire devient:

$$\mathcal{A}ire(\Delta) = \iint_{\varphi^{-1}(\Delta)} r dr d\theta.$$

2 Intégrales triples

Remarque 2

- Les mêmes règles utilisées pour définir une intégrale double à partir d'une intégrale simple sont encore applicable pour définir une intégrale triple à partir d'une intégrale double,

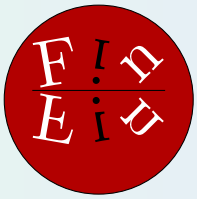
- Les propriétés vérifiées par une intégrale double (linéaire, positive, croissante, additive) sont encore vérifiées par les intégrales triples,

- Le volume d'une partie simple Δ se calcule avec la formule suivante:

$$\mathcal{V}ol(\Delta) = \iiint_{\Delta} dxdydz,$$

- En coordonnées cylindriques $dxdydz$ devient $rdrd\theta d\varphi$,

- En coordonnées sphériques $dxdydz$ devient $r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$,



Formes différentielles

Chapitre 18

Blague du jour

On raconte qu'une secrétaire d'une société dont je tairais le nom avait insérer le cd dans son pc avec la pochette en plastique transparent.
Elle pensait que ça protégeait des virus ...

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Mathématicien du jour

Mathématicien allemand. Influent sur le plan théorique, il a apporté une contribution importante à l'analyse et à la géométrie différentielle.il commence à étudier la philosophie et la théologie pour devenir prêtre avant que son père l'autorise à étudier les mathématiques. Il a entre autres comme professeurs Jacobi, Dirichlet et Gauss. Il meurt de tuberculose à l'âge de 39 ans.

Formes différentielles, généralités Dans toute la suite $\mathbf{U}$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1

On appelle forme différentielle définie sur $\mathbf{U}$ toute application continue

$$\omega : \mathbf{U} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*.$$

Remarque 1

• Si $f : \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ estde classe $\mathcal{C}^1$ alors df est une forme différentielle sur $\mathbf{U}$. Si de plus f est linéaire alors $df = f$,

• Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ sa base duale: $e_i^* : M = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, on a $de_i^*(M) = e_i^*$. Toute forme différentielle ω définie sur $\mathbf{U}$ s'écrit sous la forme $\omega(M) = \sum_{i=1}^{n} P_i(M) e_i^*$, pour alléger la notation on note $e_i^* = x_i$, on a $dx_i = x_i = e_i^*$, l'écriture devient alors:

$$\omega(M) = \sum_{i=1}^{n} P_i(M)dx_i \text{ où } M \in U,\ P_i : U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continues,}$$

- Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ estde classe $\mathcal{C}^1$, la formule suivante devient:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Définition 2

- Une forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ définie sur U est dite exacte s'il existe $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\omega = df$ i.e. $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, on a: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i$. On dit alors que f est une primitive de ω,

- Une forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ définie sur U est dite fermée si elle vérifie $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$, $\forall i, j$.

Théorème 1

- Toute forme différentielle exacte est fermée,

- Toute forme différentielle fermée sur un ouvert étoilé est exacte, (de Poincaré)

On rappelle que U est dit étoilé, s'il existe $A \in U$ tel que $\forall M \in U$, on a $[A, M] \subset U$.

1 Intégrales curvilignes

Définition 3

Soit $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ une forme différentielle définie sur U et $(\gamma) = ([a, b], M)$ un arcde classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux inscrit dans U i.e. telle que $\forall t \in I$ on a: $M(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in U \subset \mathbb{R}^n$.

On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc orienté (γ) le réel :

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b P_i(M(t))x_i'(t)dt,$$

Lorsque l'arc (γ) est fermé (i.e. $M(a) = M(b)$), on note $\oint_\gamma \omega$.

Théorème 2

Si ω est une forme différentielle exacte sur U de primitive f, i.e: $\omega = df$ et (γ) un arc paramétréde classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'extrémités A et B alors $\int_\gamma = f(B) - f(A)$.

En particulier si (γ) est fermé, alors $\oint_\gamma \omega = 0$.

Théorème 3

Théorème: Formule de Green-Riemann Soit D une partie simple compacte non vide de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂D^+ est parcouru dans le sens direct. Soit $\omega(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ forme différentiellede classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U contenant D on a alors:

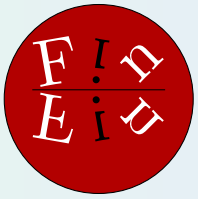
$$\oint_{\partial D^+} \omega = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

En particulier si ω est fermée, alors $\oint_{\partial D^+} \omega = 0$.

Remarque 2

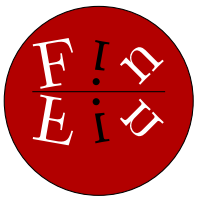
La formule de Green-Riemann permet de calculer l'aire d'une partie simple compacte D, a l'aide des formule suivante:

$$\begin{array}{rclcl} \mathcal{A}ire(D) & = & \oint_{\partial D^+} xdy & = & -\oint_{\partial D^+} ydx \\ & = & \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} (xdy - ydx) & = & \frac{1}{2}\oint_{\partial D^+} r^2 d\theta \end{array}$$



بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ

رَبِّي إِغفِر لِي و لِوَالِدَى و

لِلمُؤمِنِينَ يَومَ يَقُومُ الحِسَاب

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم