Fiches de Révision MP

TOME II - Mathématiques

Jean-Baptiste Théou

Licence

Avant-propos

Il y a un plus d'un an, au milieu de ma SUP MP, j'ai décidé de faire mes fiches de révision à l'aide de Latex, un "traitement de texte" très puissant. Il en résulte les fiches qui suivent. Je pense que travailler sur des fiches de révision, totalement séparé de notre cours, est un énorme plus, et réduit grandement la quantité de travail pour apprendre son cours, ce qui laisse plus de temps pour les exercices. Mon experience en tout cas va dans ce sens, j'ai notablement progressé à l'aide de ces fiches.
J'ai décidé de les rassembler sous forme d'un "livre", ou plutôt sous forme d'un recueil. Ce livre à pour principal interet pour moi d'être transportable en cours. C'est cet interet qui m'a poussé à faire ce livre.
Dans la philosophie de mes fiches de révision, ce livre est disponible gratuitement et librement sur mon blog. Il est édité sous License Créative Commons. Vous pouvez librement adapter ce libre à vos besoins, les sources Latex sont disponibles sur mon blog. Je pense que pour être en accord avec la philosophie de ces fiches, il serai bien que si vous effectuez des modifications de mon ouvrage, vous rendiez ces modifications disponible à tous. Je laisserai volontiers une place pour vos modifications sur mon blog. Je pense sincèrement que ce serai vraiment profitable au plus grand nombre, et dans la logique de mon travail.
J'ai hiérarchisé mon ouvrage de façon chronologique. Les parties sont rangées dans l'ordre "d'apparition" en MP, tout en conservant une certaine logique dans les parties. J'ai mis en Annexe des petites fiches de méthodologie, qui peuvent s'avérer utiles.
Je vous souhaite une bonne lecture, et surtout une bonne réussite.
Jean-Baptiste Théou
PS : Pour toutes corrections, propositions, ou autre, merci de me contacter à : jbtheou@gmail.com ou par l'intermédiaire de mon site web.

Remerciements

Je tient à remercier Georges Marin, Professeur de Physique-Chimie en MP au Lycée Lesage et François Brunou, Professeur de Mathématiques en MP au Lycée Lesage.
Sans eux, ce livre ne pourrai exister.

Table des matières

Première partie

Révisions

Chapitre 1

Rappels et Compléments

1.1 Relations de comparaison

1.1.1 Relations d'équivalence

Soit $\mathcal{R}$ une relation.

Énoncé 1 *$\mathcal{R}$ est une relation d'equivalence sur E si et seulement si :*

I) $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$

II) $\mathcal{R}$ est symétrique : $\forall (x,y) \in E^2$ tq $x\mathcal{R}y,$ on as : $y\mathcal{R}x$

III) $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall (x,y,z) \in E^3$ tq $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z,$ on as : $x\mathcal{R}z$

1.1.2 Fonction module

Énoncé 2 *La fonction module, fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, est une fonction continue*

1.1.3 Voisinage fondamental

Définition 1 *On défini un voisinage fondamental de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ par :*

$\rightarrow$ *Si $x_0 \in \mathbb{R}$: V = $]x_0 - r, x_0 + r[$*

$\rightarrow$ *Si $x_0 = +\infty$: V= $]a,\infty[$*

$\rightarrow$ *Si $x_0 = -\infty$: V= $]-\infty,a[$*

1.1.4 Négligabilité

Énoncé 3 *Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans K, définies sur un même voisinage de 0.*
Par exemple, définies sur]-r,r[, avec r > 0.
On dit que u est négligable devant v en 0 si et seulement si, $\exists r' \in]0, r[$ et h, une fonction définie par :

$$h :]-r', r'[\rightarrow K$$

avec $\lim\limits_{0} h = 0$ telque :

$$\forall x \in]-r', r'[\ u(x) = v(x)h(x)$$

On le note

$$u \underset{0}{=} o(v)$$

Propriété 1 *Soit u fonction de V dans K, avec V voisinage fondamental de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*
Si λ est une constante de K^*, indépendante de la variable x, alors :

$$o(\lambda u) \underset{x_0}{=} o(u)$$

Propriété 2 *Soient $o_1(u), o_2(u), ..., o_p(u)$ fonctions négligable devant u.*
Si p ne dépend pas de la variable x :

$$o_1(u) + o_2(u) + ... + o_p(u) = o(u)$$

Notation d'Hardy et de Landau

Énoncé 4 *Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans K, définies sur un voisinage $]-r, r[$, avec r>0, en 0.*

$$u \underset{0}{\ll} v \Leftrightarrow u \underset{0}{=} o(v)$$

La première notation est la notation d'Hardy. La seconde est celle de Landau.

1.1.5 Équivalence

Énoncé 5 *Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans K, définies sur un voisinage $]-r, r[$, avec r>0, de 0. On dit que u est équivalent à v en 0 si et seulement si, $\exists r' \in]0, r[$ et h, une fonction définie par :*

$$h :]-r', r'[\to K$$

avec $\lim\limits_{0} h = 1$ telque :

$$\forall x \in]-r', r'[\ u(x) = v(x)h(x)$$

On le note :

$$u \underset{0}{\sim} v$$

Propriété 3 *Soient u et v deux fonctions équivalente en x_0.*
Nous avons, si α est indépendant de la variable :

$$u \underset{x_0}{\sim} v \Rightarrow u^\alpha \underset{x_0}{\sim} v^\alpha$$

Propriété 4 *Avec les conditions précédentes, nous avons :*

$$\begin{aligned} u \underset{x_0}{\sim} v &\Leftrightarrow u \underset{x_0}{=} v + o(v) \\ &\Leftrightarrow u - v \underset{x_0}{\ll} v \end{aligned}$$

Par symétrie, on peut inverser ces relations.

Propriété 5 *Soient u et v deux applications de V dans K, définies sur un voisinage fondamental V de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*
Si $u \underset{x_0}{\sim} v$, et $u(x) \underset{x_0}{\to} l \in \mathbb{C}$ ou $l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors :

$$v(x) \underset{x_0}{\to} l$$

Propriété 6 *Avec les conditions précédentes : Si $u(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x)$ et $v(x) \underset{x_0}{\sim} v_1(x)$, alors :*

$$u(x)v(x) \underset{x_0}{\sim} u_1(x)v_1(x)$$

$$\frac{u}{v} \underset{x_0}{\sim} \frac{u_1}{v_1}$$

Propriété 7 *Si $u(x) \underset{x_0}{\sim} v(x)$ et si u et v restent > 0 au voisinage de x_0 et si $u(x)$ et $v(x)$ tendent vers l$\in \overline{\mathbb{R}}_+ - \{1\}$ en x_0, alors :*

$$\ln(u) \underset{x_0}{\sim} \ln(v)$$

1.1.6 Négligabilité et équivalence

Propriété 8 *Soient u et v deux fonctions de V dans K, avec V un voisinage fondamental de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$u \underset{x_0}{\sim} v \Rightarrow o(u) \underset{x_0}{=} o(v)$$

Propriété 9 *Si $u_1, u_2, ..., u_p$ sont des fonctions de $\mathbb{R}$ dans K, définies sur un voisinage $]-r, r[$, avec r>0, de 0. Si $u_1 \underset{0}{\gg} u_2 \underset{0}{\gg} ... \underset{0}{\gg} u_p$, alors :*

$$u_1 + ... + u_p \underset{0}{\sim} u_1$$

1.1.7 Lien entre limite et somme

Propriété 10 *Soient $h_2, h_3, ..., h_p$ fonctions telque :*

$$\forall k \in \{2, .., p\} \ \lim_0 h_k = 0$$

La conséquence suivante est vraie uniquement si p est indépendant de x :

$$\lim_0 h_2 + ... + h_p = 0$$

1.1.8 Signe et équivalent

Propriété 11 *Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un voisinage de 0, telque :*

$$u \underset{0}{\sim} v$$

alors, $\exists \alpha > 0$ telque $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $u(x)$ et $v(x)$ ont même signe et même points d'annulation.
"Un équivalent contrôle localement le signe"

1.1.9 Domination - Grand O

Définition 2 *Soient u et v deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans K, définies sur un voisinage $]-r, r[$, avec r>0, de 0. On dit que u est dominé par v si et seulement si, $\exists r' \in]0, r[$ et h, une fonction définie par :*

$$h :]-r', r'[\rightarrow K$$

avec h bornée sur]-r',r'[telque :

$$\forall x \in]-r', r'[\ u(x) = v(x).h(x)$$

On le note :

$$u \underset{0}{=} O(v)$$

1.1.10 Dans le cas des suites

Domination - Grand O

Définition 3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans K.*

$$u_n = O(v_n) \Leftrightarrow (\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists (h_n)_{n \geq n_0} \ tq \ \forall n \geq n_0 \ u_n = v_n h_n)$$

avec $(h_n)_{n \geq n_0}$ suite bornée.

1.2 Fonctions

1.2.1 Fonctions continue sur un segments

Soit f fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Propriété 12 *f est bornée sur $[a, b]$:*

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \; tq \; \forall x \in [a, b] \; |f(x)| \leq M$$

Propriété 13 *f est majorée et minorée, et atteint son* sup *et son* inf *en des points de $[a, b]$:*

$$\exists \alpha \in [a, b] \;\; tq \; \sup_{[a,b]} f = f(\alpha)$$

$$\exists \beta \in [a, b] \;\; tq \; \inf_{[a,b]} f = f(\beta)$$

Propriété 14 *f est uniformement continue sur [a,b]*

1.2.2 Fonctions continue par morceaux sur un intervalle

Propriété 15 *Si f est continue par morceau sur un intervalle I, il en est de même pour |f|.*

Propriété 16 *L'ensemble des application d'un intervalle I, à valeur dans K, continue par morceaux sur I, est une algèbre.*
C'est à dire que cet espace est stable par addition, produit par un scalaire, et par produit. Mais cet ensemble n'est pas stable par composition.

1.2.3 Théorème des accroissements finis

La notation $f \in C^n([a, b], \mathbb{R})$ signifie que f est de classe de C^n de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$

Définition 4 *Soit $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, alors :*

$$\exists c \in \,]a, b[\;\; tq \; f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Ce théorème n'est valable que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans le cas plus général des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ on utilise l'inégalité des accroissement finis

1.2.4 Inégalité des accroissement finis

Définition 5 *Soit $f \in C^1([a, b], K)$.*
Si f' est bornée sur $[a, b]$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{[a,b]} |f'|.(b - a)$$

On démontre le lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction à l'aide de cette inégalité.

1.2.5 Théorème de Rolles

Énoncé 6 *Soit f application continue sur [a,b] et dérivable sur]a,b[.*
Si f(a) = f(b), alors :

$$\exists c \in \,]a, b[\;\; tq \; f'(c) = 0$$

1.2.6 Théorème des valeurs intermédiaire

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

Propriété 17 *Soit f application continue de I dans $\mathbb{R}$, avec I intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.*
Alors f(I) est aussi un intervalle

Propriété 18 *Soit f application de A dans $\mathbb{R}$, définie et continue sur [a,b].*
Si :

$$f(a)f(b) \leq 0$$

Alors :

$$\exists c \in [a, b] \ \ tq \ f(c) = 0$$

Propriété 19 *Soit f application continue de I dans $\mathbb{R}$.*
$\forall (x, x') \in I^2$*, tous y compris entre f(x) et f(x') est une valeur de f sur [x, x']*

Cas particuliers

Propriété 20 *Soit f, fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur [a,b].*
Alors f([a,b]) = [m,M], avec :

$$m = \inf_{[a,b]} f$$

$$M = \sup_{[a,b]} f$$

Propriété 21 *Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante sur un intervalle I.*
Alors f induit une bijection de I sur f(I), qui est lui même un intervalle, et sa bijection réciproque, f^{-1}, de f(I) dans I, est également continue et strictement croissante.
On peut préciser f(I). Quand I possède une borne ouverte, on fait appelle à la limite de f en la valeur de cette borne, et quand I possède une borne fermée, on prend la valeur de f en cette borne. Par exemple :

$$I =]a, b] \rightarrow f(I) = \left] \lim_a f, f(b) \right]$$

Propriété 22 *Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante sur I.*
Alors :

$\rightarrow$ *Soit f n'est pas majorée sur I, alors dans ce cas :*

$$f(x) \underset{x \to \infty}{\rightarrow} \infty$$

$\rightarrow$ *Soit f est majorée sur I, alors dans ce cas :*

$$f(x) \underset{x \to \infty}{\rightarrow} \sup_I f$$

1.2.7 Lien entre limite et bornée

Propriété 23 *Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans K, définie sur un voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*
Si f a une limite finie quand x tend vers x_0, alors il existe un voisinage de x_0 V telque f soit bornée sur V.

1.2.8 Étude de Arctan

Dans le cas d'une étude asymptotique de arctan au voisinage de ∞, la propriété suivant peut etre utile :

Propriété 24

$$\forall u \in \mathbb{R}^+ \ arctan(u) + arctan(\frac{1}{u}) = \varepsilon.\frac{\pi}{2}$$

avec ε = +1 si u est positif, -1 si u est négatif

1.2.9 Limite d'une fonction

Propriété 25 *Soit f une fonction complexe.*

$$(\textit{ f est continue par morceaux }) \Leftrightarrow (\textit{ Re(f) et Im(f) sont continue par morceaux })$$

Propriété 26 *Soit f fonction complexe, décomposable en* $f = f_1 + if_2$*. Soit* $(l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$

$$(\lim_{\infty} f = l = l_1 + il_2) \Leftrightarrow (\lim_{\infty} f_1 = l_1 \ et \ \lim_{\infty} f_2 = l_2)$$

1.2.10 Injectivité

Définition 6 *Soit f application de I dans I'.*
f est injective si et seulement si :

$$\forall (x, x') \in I \ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

C'est à dire que si il y a égalité entre les images, alors il y a égalité entre les vecteurs.

Propriété 27 *Soit f application linéaire entre deux espaces vectoriels.*

$$(\textit{ f est injective }) \Leftrightarrow \textit{Ker}(f) = \{0\}$$

1.2.11 Surjectivité

Définition 7 *Soit f application de I dans I'.*
f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in I' \ \exists x \in I \ tq \ f(x) = y$$

Ceci veut dire que chaque images possède un antécédent. On peut aussi écrire cette condition nécéssaire et suffisante sous la forme :

$$f(I) = I'$$

1.2.12 Bijectivité

Définition 8 *Soit f une application de I dans I'.*
f est une bijection de I sur I' si et seulement si :

$$\forall y \in I' \ \exists ! x \in I \ tq \ f(x) = y$$

Chaque image possède un et un seul antécédent. Dans ce cas, on peut définir l'application réciproque f^{-1} *:*

$$\begin{aligned} f^{-1} : I' &\rightarrow I \\ y &\rightarrow f^{-1}(y) \end{aligned}$$

avec $f^{-1}(y)$ *l'unique antécédent de y par f.*

Propriété 28 *f est une bijection si et seulement si f est injective et surjective.*

Propriété 29 *Soit f une fonction bijective.*
Si $x \in I, \ y \in I'$.

$$(f(x) = y) \Leftrightarrow (x = f^{-1}(y))$$

Et :

$$f^{-1} o f = Id_I$$

$$f o f^{-1} = Id_{I'}$$

1.2.13 Difféomorphisme

Définition 9 *Soit f une application C^k d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ (le cas k=0 est écarté, car ce cas possède un nom différent).*
On dit que f réalise un C^k-difféomorphisme de I sur f(I) si et seulement si :
$\rightarrow$ *f réalise une bijection de I sur f(I)*
$\rightarrow$ *f est C^k sur I*
$\rightarrow$ *La fonction réciproque, f^{-1} de f(I) dans I, est également C^k sur f(I).*
On dit que f est un C^∞ difféomorphisme de I sur f(I) si f est un C^k difféomorphisme de I sur f(I) pour tous $k \in N^*$

Théorème 1 *Soit f une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.*
Alors f est un C^1 difféomorphisme de I sur f(I) si et seulement si f' ne s'annule pas sur I.
Dans le cas, d'apres le théorème des valeurs intermédiaire, f' garde donc un signe constant sur I.
Si $\forall x \in I$:
$\rightarrow$ *f'(x) > 0, alors f est un C^1 difféomorphisme strictement croissant*
$\rightarrow$ *f'(x) < 0, alors f est un C^1 difféomorphisme strictement décroissant*

1.3 Développements limités

1.3.1 Lien entre développement limité et dérivabilité

Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans K définies sur un voisinage V_0 de 0. Supposons que f admet un développement limité d'ordre 1 de la forme : $f(x) = a + bx + o(x)$

Propriété 30

$$(\textit{f admet un développement limité d'ordre 1 en 0}) \Leftrightarrow (\textit{f est dérivable en 0})$$

Propriété 31 *On obtient les égalités suivantes :*

$$f(0) = a$$

$$f'(0) = b$$

De plus, l'équation de la tangente en 0 au graphe de f est :

$$y = a + bx$$

1.3.2 Position relative de la courbe par rapport à la tangente

Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans K définies sur un voisinage V_0 de 0. Supposons que f admet un développement limité d'ordre 2 de la forme : $f(x) = a + bx + cx^p + o(x^p)$, avec $c \neq 0$.

Propriété 32 *La position de la courbe par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse O=(0,a),est donnée à l'aide du signe de $c.x^p$ (Voir Signe et équivalent)*

1.3.3 Développement limités usuels

$\rightarrow$ $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$
$\rightarrow$ $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + o(x^6)$
$\rightarrow$ $\sin(x) = 1 - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^7)$
$\rightarrow$ $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$
$\rightarrow$ $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$

$\rightarrow$ $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1})$

$\rightarrow$ $\operatorname{sh}(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$\rightarrow$ $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\rightarrow$ $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\rightarrow$ $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

1.3.4 Développement asymptotique d'une "échelle de comparaison E"

Définition 10 *Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et E un ensemble de fonction de $\mathbb{R}$ dans K, dont chacune est définie sur un voisinage fondamental de x_0.*
On dit que f admet un développement asymptotique dans l'échelle E à la précision o(u_p), $u_p \in E$, s'il existe des applications $u_1, ..., u_p$ appartenant à E et des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p \in K^p$, non tous nuls, et un voisinage fondamental V de x_0 telque :

$$u_1 \gg ... \gg u_p$$

$$\forall x \in V \; f(x) = \lambda_1 u_1(x) + ... + \lambda_p u_p(x) + o(u_p(x))$$

Exemples d'échelle de comparaison E

$\rightarrow$ Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, l'échelle des dévellopements limités en x_0 :

$$E = \{x \mapsto (x - x_0)^n, n \in \mathbb{N}\}$$

$\rightarrow$ Pour $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$E = \{x \mapsto (x - x_0)^n, n \in \mathbb{Z}\}$$

$\rightarrow$ Pour $x_0 = \infty$:

$$E = \left\{ x \mapsto x^\alpha (ln(x))^\beta e^{P(x)},\ P(x) = \sum_{i=1}^{q} q_i x^{\gamma_1},\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ q \in \mathbb{N}^*,\ q_i \in \mathbb{R}^*,\ \gamma_i \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$$

1.4 Intégrale

1.4.1 Somme de Riemmann

Soit f, fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans K. Soit (u_n) la somme de Riemmann associé à f

Propriété 33 *Quand n tend vers l'infini, le nombre de termes tend vers l'infini, et chacun des termes tend vers 0. La limite de la somme n'est pourtant pas nul*

Propriété 34

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) = \int_a^b f$$

1.4.2 Inégalité de majoration

Propriété 35 *Soit f fonction continue par morceaux de [a,b], a<b, dans K.*

$$|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$$

Croissance de l'intégrale

Propriété 36 *Soient f,g deux fonctions continue par morceaux de [a,b], a<b, dans $\mathbb{R}$.*
Si :

$$f \leq g$$

alors :

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

1.4.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Énoncé 7 *Soit u et v deux vecteurs d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. :*

$$< u|v > \leq ||u||.||v||$$

Propriété 37 *Si f et g sont deux applications continue par morceaux de [a,b] dans K, alors :*

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \leq \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.\sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}$$

Le produit scalaire sous jacents dans le cas réel est :

$$< f|g > = \int_a^b f(t).g(t)dt$$

A l'aide de ceci, on peut démontrer l'inégalité des accroissements finis.

1.4.4 Intégrale et négligabilité

Propriété 38 *Si u et v sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans K, continue sur un voisinage de 0 (pour que l'on puisse définir les intégrales). Alors :*

$$u \underset{0}{\ll} v \Rightarrow \int_0^x u \underset{0}{\ll} \int_0^x v$$

1.5 Vrac

1.5.1 Suite géométrique

Propriété 39 *La somme d'une suite géométrique de raison z est donnée par, pour $z \neq 1$:*

$$1 + z + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

Pour z = 1 :

$$1 + z + ... + z^n = n + 1$$

Application aux matrices

Soit A une matrice carrée.
De même, on obtient, si (I-A) est inversible :

$$\begin{aligned} I + A + A^2 + ... + A^n &= (I - A)^{-1}(I - A^{n+1}) \\ &= (I - A^{n+1})(I - A)^{-1} \end{aligned}$$

On observe que les matrices commutent (Ce qui n'est pas le cas général)

1.5.2 Suite complexe

Soit (u_n) une suite de complexe.

Propriété 40

$$\lim_{n\to\infty} |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

1.5.3 Utilisations des inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers l et l′

Propriété 41 *Si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leq v_n$, alors $l \leq l'$.*
Mais si $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n < v_n$, alors $l \leq l'$.
On observe donc qu'il est plus "facile" de travailler sur des inégalités large, car avec les inégalités, seules les inégalités larges sont conservées lors du passage à la limite.

1.5.4 Densité

Soient A et A′ deux sous ensembles non vide de $\mathbb{C}$, avec A inclue dans A′.

Énoncé 8 *On dit que A est dense dans A′ si :*

$$\forall a' \in A',\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A\ tq\ |a' - a| \leq \varepsilon$$

Propriété 42 *On dit que A est dense dans A′ si tous points de A′ est la limite d'une suite de points de A*

1.5.5 Formule du binôme et dérivée

Définition 11 *Soit a et b deux complexes :*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k.b^{n-k}$$

Propriété 43 *On peut étendre la formule du binome au dérivation d'un produit de fonction :*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)}$$

Propriété 44 *De même, on peut étendre cette formule aux matrices si les deux matrices commutent. Soient A et B deux matrice carrée telque AB=BA :*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k.B^{n-k}$$

1.5.6 Dérivée successives de cosinus et sinus

Énoncé 9 *Soit $n \in \mathbb{N}$:*

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n.\frac{\pi}{2})$$

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n.\frac{\pi}{2})$$

Propriété 45 $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$\cos^{(2k)} = (-1)^k \cos(x)$$

$$\sin^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \cos(x)$$

1.5.7 Régle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels positifs.
Supposons que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$$

$\rightarrow$ Si a $\in [0,1[$, (u_n) converge vers 0
$\rightarrow$ Si a>1, (u_n) diverge vers $+\infty$

1.5.8 Nombre complexe

Propriété 46 *Si z = x + iy, avec x,y deux réels, alors :*

$$|x| \leq |z|$$

$$|y| \leq |z|$$

1.6 Les polynomes

1.6.1 Polynomes irréductibles

Propriété 47 *Si K est un corps commutatif, tous polynomes de K[X] s'écrit comme le produit d'un nombres de polynomes irréductible de K[X] et cette écriture est unique à l'ordre près des facteurs.*

Énoncé 10 *Les polynomes irréductibles de $\mathbb{C}$[X] sont les polynomes du 1^{er} degrés.*
Les polynomes irréductibles de $\mathbb{C}$[X] unitaire sont les polynome aX+λ, avec λ un complexe et a=1.

Énoncé 11 *Les polynomes irréductibles de $\mathbb{R}$[X] sont les polynomes du 1^{er} degrés et les polynomes du 2^{nd} degrés avec discriminant négatif.*

1.6.2 Racine et ordre de multiplicité

Définition 12 *Soit λ un complexe.*
λ est une racine d'ordre n de $P \in K[X]$ si et seulement si $(X-\lambda)^n$ divise P et que $(X-\lambda)^{n+1}$ ne le divise pas.

Propriété 48 *Soit λ un complexe.*
λ est une racine d'ordre n de $P \in K[X]$ si et seulement si :

$$\forall k \in \{0, n-1\} \;\; P^{(k)}(\lambda) = 0$$

et que

$$P^{(n)}(\lambda) \neq 0$$

Propriété 49 *Soit z un complexe.*
On peut factoriser $z^n - 1$ sous la forme :

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - e^{i\frac{k2\pi}{n}})$$

Propriété 50 *D'après la propriété précédente, et en utilisant le faite que :*

$$1 + z + ... + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

On obtient que :

$$1 + z + ... + z^{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(z - e^{i\frac{k2\pi}{n}})$$

Propriété 51 *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, et λ une racine complexe de P, avec λ imaginaire.*
Alors :
$$mult_P(\overline{\lambda}) = mult_P(\lambda)$$

Deuxième partie

Intégrales, Fonctions

Chapitre 2

Intégrales généralisées, Fonctions intégrables

2.1 Applications continues par morceaux

En ce qui concerne les intégrales, le programme se limite aux applications continues par morceaux.

2.1.1 Définitions

Définition 13 *Soit f, une application (fonction définies sur tous l'espace de départ) de $[a, b]$ dans K, avec a et b deux réels, a<b.*
On dit que f est continue par morceaux sur [a,b] s'il existe une subdivision finie de [a,b] :

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_p = b$$

telque :
→ $\forall i \in \{0, ..., p-1\}$*, f est* C^0 *sur* $]x_i, x_{i+1}[$
→ $\forall i \in \{1, ..., p-1\}$*, f admet une limite finie à droite et une limite finie à gauche de* x_i
→ *f admet une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en b*

Définition 14 *On peut définir pour tous* $i \in \{0, ..., p-1\}$ *des applications continues* $\widetilde{f}_i$ *de* $[x_i, x_{i+1}]$ *dans K, définies par :*
→ *Si* $x \in]x_i, x_{i+1}[$ $\widetilde{f}_i(x) = f(x)$
→ $\widetilde{f}_i(x_i) = \lim\limits_{x \to x_i^+} f(x)$
→ $\widetilde{f}_i(x_{i+1}) = \lim\limits_{x \to x_{i+1}^-} f(x)$

$\widetilde{f}_i$ *est donc le prolongement par continuité de f sur* $[x_i, x_{i+1}]$

Il existe aussi la variante suivante de cette définition :

Définition 15 *Soit f application de* $[a, b]$ *dans K.*
f est continue par morceaux si il existe une subdivision finie de $[a, b]$ *:*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_p = b$$

et des applications continues, avec $i \in \{0, ..., p-1\}$ *:*

$$\widetilde{f} : [x_i, x_{i+1}] \to K$$

telque, $\forall i \in \{0, ..., p-1\}$ *:*

$$f_{]x_i, x_{i+1}[} = \widetilde{f}_i$$

Définition 16 *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et f, application de I dans K.*
On dit que f est continue par morceaux sur I si f est continue par morceaux sur tous segments (intervalle borné fermé) $[a, b] \subset I$

Propriété 52 *Si f est une application continue par morceaux de $[a, b]$ dans K, alors :*

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{f}_i$$

Propriété 53 *Soient f,g fonctions de $[a, b]$ dans K. Si f est une application intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et si g ne diffère qu'en un nombre finie de point de f, alors g est également intégrable au sens de Riemann et :*

$$\int_a^b g = \int_a^b f$$

2.2 Convergence d'une intégrale

2.2.1 Convergence vers ∞

Définition 17 *Soit f application continue par morceaux de $[a, \infty[$ dans K.*
Alors, $\forall x \in [a, \infty[$, f est continue par morceaux sur $[a, x]$ et on peut calculer :

$$\int_a^x f$$

C'est à dire que l'on peut définir une nouvelle application F :

$$\begin{aligned} F : [a, \infty[&\to K \\ x &\mapsto \int_a^x f \end{aligned}$$

Lorsque F a une limite finie, quand $x \to \infty$, on dit que $\int_a^\infty f$ converge, et on note :

$$\int_a^\infty f = \lim_{x \to \infty} F(x)$$

En réalité, on devrai dire que $\int_a^\infty f$ existe, ou que $\int_a^x f$ converge quand $x \to \infty$

Propriété 54 *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_*^+$:*
$\int_a^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
De plus, on peux calculer la limite par primitivation.

Propriété 55 *Soit f une application continue par morceaux de $[a, \infty[$ dans K, et si $b \in [a, \infty[$*

$$\int_a^\infty f \text{ converge si et seulement si } \int_b^\infty f \text{ converge}$$

Dans ce cas, on obtient la relation de Chasles :

$$\int_a^\infty f = \int_a^b f + \int_b^\infty f$$

2.2.2 Convergence vers 0

Définition 18 *Soit f application continue par morceaux de* $]0,a]$ *dans K.*
Alors on peut définir F, fonction de $]0,a]$ *dans K, défini par :*

$$\forall x \in]0,a] \;\; F(x) = \int_x^a f$$

Car f est continue par morceaux sur $[x,a]$ *On dit que* $\int_0^a f$ *converge lorsque F(x) a une limite finie quand x tend vers* 0^+*. En réalité, on devrai dire que* $\int_0^a f$ *existe, ou que* $\int_0^a f$ *converge quand* $x \to 0^+$

Propriété 56 *Si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}_*^+$ *:*
$\int_0^a \dfrac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$*.*
De plus, on peux calculer la limite par primitivation.

Propriété 57 *Soit f une application continue par morceaux de* $]0,a]$ *dans K.*

$$\forall b \in]0,a] \int_0^a f \text{ converge si et seulement si } \int_0^b f \text{ converge}$$

Dans ce cas, on obtient la relation de Chasles :

$$\int_0^a f = \int_0^b f + \int_b^a f$$

2.3 Résultats spécifiques sur les applications de $[a;\infty[$ à valeurs dans K

2.3.1 Limite de l'application et convergence de l'intégrale

Soit f, application continue par morceaux sur $[a;\infty[$ à valeurs dans K, avec $a \in \mathbb{R}$.

Propriété 58 *Si f a une limite finie l,* $l \in K$*, quand* $x \to \infty$*, et si* $\int_a^\infty f$ *converge, alors l=0*

Propriété 59 *Si f est à valeur réelle et si f a une limite l,* $l \in \mathbb{R} + \{+\infty; -\infty\}$*, quand* $x \to \infty$*, et si* $\int_a^\infty f$ *converge, alors l=0.*

Propriété 60 *Soit f application continue par morceaux de* $[a,\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
$\int_a^\infty$ *peut être convergente sans que f ait une limite en* ∞*, ou que f soit bornée.*

2.3.2 Caractérisation séquentielle d'une limite

Propriété 61 *Soit f application continue par morceaux de* $[a,\infty[$ *dans K. Soit* $l \in K$

$$(\lim_{x\to\infty} f(x) = l) \Leftrightarrow (\forall (x_n) \text{ à valeur dans } [a,\infty[\text{ tendant vers } \infty,\; f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} l)$$

Propriété 62 *Soit f application de* $\mathbb{R}$ *dans K définies sur un voisinage V de* $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$*, et* $l \in K$ *(ou* $l \in \bar{\mathbb{R}}$ *si K=*$\mathbb{R}$*)*

$$(\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x\in V}} f(x) = l) \Leftrightarrow (\forall (x_n) \text{ à valeur dans V, tendant vers } x_0,\; f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} l)$$

2.4 Définitions et propriétés générales

Dans les chapitres suivants, on adopte la notation suivante :

$$\int_a^\alpha f = \lim_{x\to\alpha} \int_a^x f$$

Définition 19 *Soit $a \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R} + \{+\infty\}$, avec $a \leq \alpha$.*
Soit f application continue par morceaux de $[a, \alpha[$.
On peut alors définir F :

$$\begin{aligned} F : [a, \alpha[&\to K \\ x &\mapsto \int_a^x f \end{aligned}$$

On dit que $\int_a^\alpha f$ converge si et seulement si F(x) a une limite finie dans K quand x tend vers α par valeur inferieur.
On note alors $\int_a^\alpha$ cette limite.

Propriété 63 *Soit f application continue par morceaux de $[a, \alpha[$ dans K.*
Si b$\in [a, \alpha[$:

$$\left(\int_a^\alpha f \textit{ converge}\right) \Leftrightarrow \left(\int_b^\alpha f \textit{ converge}\right)$$

Dans ce cas, nous avons la relation de Chasles suivante :

$$\int_a^\alpha f = \int_a^b f + \int_b^\alpha f$$

Propriété 64 *Soit f application continue par morceaux de $[a, \alpha[$ dans K.*
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} \lambda f : [a, \alpha[&\to K \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

est une fonction continue par morceaux et :

$$\left(\int_a^\alpha f \textit{ converge}\right) \Rightarrow \left(\int_a^\alpha \lambda f \textit{ converge}\right)$$

Et dans ce cas :

$$\int_a^\alpha \lambda f = \lambda \int_a^\alpha f$$

Propriété 65 *Soient f et g deux applications continues par morceaux de $[a, \alpha[$ dans K.*
Alors f+g est continue par morceaux.
Si $\int_a^\alpha f$ et $\int_a^\alpha g$ converge, alors $\int_a^\alpha f + g$ converge et :

$$\int_a^\alpha f + g = \int_a^\alpha f + \int_a^\alpha g$$

Propriété 66 *Soit f application de $[a, \alpha[$ dans C. Soient f_1= Re(f) et $f_2 = Im(f)$.*
f est continue par morceaux sur $[a, \alpha[\Leftrightarrow f_1$ et f_2 sont continue par morceaux sur $[a, \alpha[$.
Dans ce cas :

$$\left(\int_a^\alpha f \textit{ converge}\right) \Leftrightarrow \left(\int_a^\alpha f_1 \textit{ et } \int_a^\alpha f_2 \textit{ convergent}\right)$$

. On obtient alors :

$$\int_a^\alpha f = \int_a^\alpha f_1 + i \int_a^\alpha f$$

Propriété 67 *Soit f application continue par morceaux de $[a, \alpha[$ dans K, avec :*

$$\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$
$$\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$\alpha \leq \beta$$

Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$ Si f est continue par morceaux sur $]\alpha, \gamma[$ et sur $]\gamma, \beta[$ On dit que $\int_\alpha^\beta f$ converge si les intégrales $\int_\alpha^\gamma f$ et $\int_\gamma^\beta f$ convergent.
On obtient alors que :

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f$$

2.5 Convergence Absolue, Fonctions intégrables sur un intervalle

Dans ce chapitre, nous allons nous limiter aux applications continue par morceaux de $[a,\alpha[$ dans K, avec :

$$\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$a \in \mathbb{R},\ a \leq \alpha$$

Mais les définitions et résultats se généralise sur des applications continues par morceaux sur $]\alpha,\beta[$ ou sur $]\alpha,\gamma[\,,]\gamma,\beta[$.

2.5.1 Convergence Absolue

Définition 20 *Soit f application continue par morceaux sur $[a,\alpha[$ dans K.*
L'application g :

$$g : [a,\alpha[\to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto |f(x)|$$

est aussi continue par morceaux sur $[a,\alpha[$.
On dit que f est intégrable sur $[a,\alpha[$ ou que $\int_a^\alpha f$ converge absolument lorsque $\int_a^\alpha |f|$ converge

Propriété 68

$$(\int_a^\alpha f \textit{ converge absolument}) \Rightarrow (\int_a^\alpha f \textit{converge})$$

2.5.2 Critère de Cauchy

Critère de Cauchy pour les suites

Énoncé 12 *On dit qu'une suite (u_n) a valeur dans K vérifie le critère de Cauchy si et seulement si :*
$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ *tq* $\forall(p,q) \in \mathbb{N}^2$ *tq p et* $q \geq N_0$ *:*

$$|u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

En faite, on obtient une définition équivalente en se limitant aux couples (p,q)∈ $\mathbb{N}^2$ telque q>p. Ce qui donne :
(u_n) est une suite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} \textit{ tq } \forall q > p \geq N_0\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

Propriété 69 *Toutes suites (u_n) à valeur dans $\mathbb{R}$ vérifiant le critère de Cauchy converge.*

Propriété 70 *Toutes suite de Cauchy à valeur dans $\mathbb{C}$ converge dans $\mathbb{C}$*

Critère de Cauchy pour les fonctions

Définition 21 *Soit f fonction de $\mathbb{R}$ dans K, définie sur un voisinage V de $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$.*
On dit que f vérifie le critère de Cauchy en x_0 si et seulement si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists U \textit{ voisinage de } x_0 \textit{ dans V tq } \forall(x,x') \in U^2, |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$$

Propriété 71 *Avec les notations précédantes, si f, fonction de $\mathbb{R}$ dans K, définie au voisinage de $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, admet un limite finie en x_0, alors f vérifie le critère de Cauchy en x_0*

Propriété 72 *Si f, fonction de $\mathbb{R}$ dans K, définie au voisinage de $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, vérifie le critère de Cauchy en x_0, alors f admet une limite finie en x_0*

2.6 Convergence des intégrales de fonctions positives - Intégrabilité

2.6.1 Propriétés fondamentale

Propriété 73 *Soit f, application continue par morceaux de [a,b[dans $\mathbb{R}$.*
Si f est à valeurs positives sur [a,b[, alors :

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est croissante}$$

Convergence d'une intégrale de fonction positive par majoration

Propriété 74 *Soient f et g deux fonction continue par morceaux de [a,b[dans $\mathbb{R}$.*
Si $\forall t \in$[a,b[$0 \leq f(t) \leq g(t)$, alors :

$$(\int_a^b g \text{ converge }) \Rightarrow (\int_a^b f \text{ converge et } 0 \leq \int_a^b f(t) \leq \int_a^b g(t))$$
$$(\int_a^b g \text{ diverge }) \Rightarrow (\int_a^b f \text{ diverge })$$

Intégration par domination

Propriété 75 *Soient f et g deux fonctions continue par morceaux de [a,b[dans K.*
Si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ (Grand O), alors :

$$(\text{ g intégrable sur [a,b[}) \Rightarrow (\text{ f intégrable sur [a,b[})$$

Convergence des intégrales de fonction positive

Propriété 76 *Soient f et g deux fonction continue par morceaux de [a,b[dans $\mathbb{R}$, telque :*
$\rightarrow$ *f et g soit de signe constant au voisinage de b^-*
$\rightarrow$ $f \underset{b^-}{\sim} g$
alors :

$$(\int_a^b g \text{ converge }) \Leftrightarrow (\int_a^b f \text{ converge })$$
$$(\int_a^b g \text{ diverge }) \Leftrightarrow (\int_a^b f \text{ diverge })$$

On dit que ces deux intégrales sont de même nature.

Propriété 77 *Soit b réel fini > a.*
Si f est une fonction continue par morceaux de [a,b[dans K, et si f a une limite finie en b^-, alors :

$$\int_a^b f \text{ converge}$$

2.6.2 Règles de Riemann

En ∞

Soit $a \in \mathbb{R}$

Énoncé 13 *Soit f fonction continue par morceaux de $[a, \infty[$ dans K.*
Si il existe $\alpha > 1$ telque $t^\alpha f(t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$, alors f est intégrable sur $[a, \infty[$.

Propriété 78 *Soit f fonction de* $[a, \infty[$ *dans* $\mathbb{R}$*, continue par morceaux.*
Si tf(t) $\underset{t\to\infty}{\to} 0$*, alors :*

$$\int_a^{\infty} f \text{ diverge}$$

En 0

Soit $a \in \mathbb{R}$

Énoncé 14 *Soit f fonction continue par morceaux de* $]0, a]$ *dans K.*
Si il existe $\alpha < 1$ *telque* $t^{\alpha} f(t) \underset{t\to O^+}{\to} 0$*, alors f est intégrable sur* $]0, a]$.

Propriété 79 *Soit f fonction de* $]0, a]$ *dans* $\mathbb{R}$*, continue par morceaux.*
Si tf(t) $\underset{t\to 0^+}{\to} 0$*, alors :*

$$\int_0^{a} f \text{ diverge}$$

2.6.3 Intégrale de Bertrand

Propriété 80 *Soit a>1 et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left(\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} ln(x)^{\beta}} \text{ converge}\right) \Leftrightarrow (\alpha > 1,\ ou\ \alpha = 1, \beta > 1)$$

Propriété 81 *Soit* $a \in]0, 1[$ *et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left(\int_0^{a} \frac{dx}{x^{\alpha} ln(x)^{\beta}} \text{ converge}\right) \Leftrightarrow (\alpha < 1,\ ou\ \alpha = 1, \beta > 1)$$

2.7 Intégration par parties - Changement de variable

2.7.1 Intégration par parties

Définition 22 *Soient u et v deux applications de [a,b[dans K* C^1 *par morceaux et continue sur [a,b[.*

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Avec :

$$[uv]_a^b = \lim_{x\to b^-} [uv]_a^x$$

2.7.2 Changement de variable

Soit f fonction continue sur [a,b[, à valeur dans K.
Soit g fonction C^1 sur [a',b'[à valeur dans [a,b[, avec a=g(a'), b= $\lim_{x\to b^-} g(x)$.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a'}^{b'} f(g(u))g'(u).du$$

2.8 Quelques espaces remarquables

Dans tous ce chapitre, on considère que I est un intervalle fondamental.

Définition 23 *On dit que I est un intervalle fondamental si :*

$$I = [a,b] \,;\, I = [a,b[\,;\, I =]a,b] \,;\, I =]a,b[$$

Avec, selon les cas :

$$a \in \mathbb{R} \text{ ou } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$b \in \mathbb{R} \text{ ou } b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

Cette notation est une notation personnelle.

Propriété 82 *L'ensemble des applications continue par morceaux de I dans K telque $\int_I f$ converge est un K espace vectoriel*

Propriété 83 *L'ensemble L^1_{cpm}, qui est l'ensemble des applications continue par morceaux sur I, à valeur dans K, et intégrable sur I, est un K espace vectoriel. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace précédent.*

Propriété 84 *L'ensemble L^2_{cpm}, qui est l'ensemble des applications continue par morceaux sur I, à valeur dans K, de carrée intégrable sur I, est un K espace vectoriel.*

Lemme 1 *Soit a et b deux complexes :*

$$|a+b|^2 \leq 2.(|a|^2 + |b|^2)$$

Si a et b sont réel, ce lemme devient :

$$(a+b)^2 \leq 2.(a^2 + b^2)$$

2.9 Remarque concernant le reste

Définition 24 *Soit f fonction de $[a,b[$ dans K, avec a réel et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, continue par morceaux et telque $\int_a^b$ converge.*
On a donc aussi :

$$\forall x \in [a,b[\int_x^b f \text{ converge}$$

On peut donc définir le reste intégrale au voisinage de b, notée R(x) :

$$\begin{aligned} R : [a,b[&\to K \\ x &\mapsto \int_x^b f \end{aligned}$$

Propriété 85 *Avec les notations et définition précédantes, on obtient que :*

$$\lim_{x \to b^-} R(x) = 0$$

Chapitre 3

Intégrales à paramètres

3.1 Théorème de continuité

Soit :

$$\begin{aligned} f : X \times I &\to K \\ (x,t) &\mapsto f(x,t) \end{aligned}$$

avec X et I intervalles de $\mathbb{R}$.
On peut définir :

$$F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

à condition suffisante que $t \mapsto f(x,t)$ soit C^0 par morceaux sur I et que $\int_I f(x,t)dt$ converge.
Si cette condition est satisfaite, pour tout $x \in X$, on peut définir une nouvelle application :

$$\begin{aligned} F : X &\to K \\ x &\mapsto F(x) \end{aligned}$$

Avec :

$$F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

Théorème 2 *Avec les notations précédentes, si :*
→ $\forall x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur I*
→ $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est continue sur X*
→ *Condition de domination :* $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}_+$, *condition par morceaux, intégrable sur I, telque :*

$$\forall (x,t) \in X \times I \; |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors F est définie et continue sur X.

Propriété 86 *En considérant que la continuité est une propriété locale, on peut remplacer la condition de domination par :*
$\forall [a,b] \subset X,\ \exists \varphi_{[a,b]} : I \to \mathbb{R}_+$ *continue par morceaux et intégrale sur I telle que :*

$$\forall x \in [a,b] \; \forall t \in I, |f(x,t)| \leq \varphi_{[a,b]}(t)$$

3.2 Théorème de classe C^1

Théorème 3 *Soit f :*

$$f : \mathbb{R}^2 \to K$$
$$(x,t) \mapsto f(x,t)$$

Avec K un corps, X et I deux intervalles de $\mathbb{R}$.
Si :

→ $\forall x \in X$, $t \mapsto f(x,t)$ *est continue par morceaux sur I*

→ $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est C^1 sur X et* $t \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ *est continue par morceaux sur I*

→ *Condition de domination :* $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}_+$*, condition par morceaux, intégrable sur I, telque :*

$$\forall (x,t) \in X \times I \quad |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors F :

$$F : X \to K$$
$$x \mapsto F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

est définie et de classe C^1 sur X et :

$$\forall x \in X \ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

On appelle ceci formule de dérivation sous le signe intégrale de Lipnitz

Propriété 87 *En considérant que la continuité est une propriété locale, on peut remplacer la condition de domination par :*
$\forall [a,b] \subset X,\ \exists \varphi_{[a,b]} : I \to \mathbb{R}_+$ *continue par morceaux et intégrale sur I telle que :*

$$\forall x \in [a,b]\ \forall t \in I, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_{[a,b]}(t)$$

3.3 Théorème de classe C^p (Hors programme)

Théorème 4 *Soit F :*

$$F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$$

avec f une fonction de X×I dans K, avec X et I des intervalles inclus dans $\mathbb{R}$. Si :

→ $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ *est C^p sur X,* $p \in \mathbb{N}$.

→ *Condition de domination :* $\forall x \in X, \forall k \in [|0,p|]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ *est continue par morceaux sur I, et* $\forall k \in [|0,p|]$, $\exists \varphi_k$ *fonction de I dans $\mathbb{R}_+$, continue par morceaux sur I et intégrable sur I telque :*

$$\forall (x,t) \in X \times I,\ |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi_k(t)$$

Alors F est C^p sur X et les dérivées succesives s'obtienne en dérivant sous le signe intégrale

Propriété 88 *Comme dans les théorèmes précédent, en considérant le caractère locale de la classe C^p, on peut se ramener pour la condition de domination à tout segment inclu dans X. On peut aussi considéré une famille d'intervalle exaustives.*

Chapitre 4

Approximation uniforme

4.1 Approximation uniforme par des fonctions en escaliers

Théorème 5 *Soit [a,b] un segment inclu dans $\mathbb{R}$.*
Pour toute fonctions f de [a,b] dans K ,ou plus généralement dans E, un K espace vectoriel normée, et $\forall\varepsilon > 0$:

$$\exists\varphi : [a,b] \to K \text{ ou } E$$

fonction en escalier, telle que :

$$\| f - \varphi \|_{\underset{[a,b]}{\infty}} < \varepsilon$$

Il existe plusieurs variantes de théorème :

Théorème 6 *Caractérisation séquentielle :*
Avec les notations précédentes, quelque soit f, fonction de [a,b] dans K ou E, il existe une suite de fonctions en escalier (φ_n) de [a,b] dans K ou E, convergeant uniformement vers f sur [a,b]

Théorème 7 *L'ensemble $\mathcal{E}$ des fonctions en escalier de [a,b] dans K ou E est dense dans l'ensemble C_{pm} des fonctions continue par morceaux de [a,b] dans K ou E.*

4.2 Généralisation aux fonctions continues par morceaux

Avec les notations précédentes :
Soit f une fonction de [a,b] dans K ou E, continue par morceaux. C'est à dire qu'il existe une subdivision, noté σ :

$$a = a_0 < \cdots < a_p = b$$

telque f soit continue sur $]a_k, a_{k+1}[$, $k \in [|0, p-1|]$, et f admet une limite à droite et à gauche en a_k, à droite en a_0, a gauche en a_p.
On peut donc définir f_k, le prolongement par continuité de f sur $[a_k, a_{k+1}]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe φ_k en escalier sur $[a_k, a_{k+1}]$ telque :

$$\| f_k - \varphi_k \|_{\underset{[a,b]}{\infty}} < \varepsilon$$

On peut donc définir φ, commme coincident avec les φ_k et égale à f aux bornes des intervalles.
On obtient donc que :

$$\| f - \varphi \|_{\underset{[a,b]}{\infty}} < \varepsilon$$

4.3 Théorème

Définition 25 *Soit $\varphi : [a, b] \to E$. On dit que φ est affine si il existe une subdivision :*

$$a < x_0 < ... < x_p = b$$

telque :

$$\forall k \in [|0, p-1|],\ \exists(\overrightarrow{\alpha_k}, \overrightarrow{\beta_k}) \in E^2\ tq\ \forall t \in]x_k, x_{k+1}[\ \varphi(t) = t.\overrightarrow{\alpha_k} + \overrightarrow{\beta_k}$$

Théorème 8 *Soit f, application continue de [a,b] dans E, un K espace vectoriel normé (En particulier, on peut avoir E = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*
Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi :\ [a, b] \to E$, continue et affine par morceaux, telque :

$$\| f - \varphi \|_{\underset{[a,b]}{\infty}} \leq \varepsilon$$

Ce théorème est inutile en pratique.

4.4 Théorème d'approximation uniforme de Weierstrass

Théorème 9 *Soit $f \in C([a, b], K)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Alors, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in K[X]$ telque :

$$\| f - P \|_{\underset{[a,b]}{\infty}} \leq \varepsilon$$

Il existe, comme précédement, des variantes de ce théorème :

Théorème 10 *Caractérisation séquentielle.*
Pour tout f $\in C([a, b], K)$, $\exists (P_n)$ suite de polynomes $\in K[X]$ convergeant uniformement vers f sur [a,b].

Théorème 11 *L'ensemble des fonctions polynomiales de [a,b] dans K est dense dans l'ensemble des fonctions continue de [a,b] dans K.*

Chapitre 5

Description des surfaces

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{R}$ espace affine de dimension 3 et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère de E. Le plus souvent E est supposé euclidien, dans ce cas $\mathcal{R}$ sera supposé orthonormée

5.1 Surface définies par une équation implicite

Définition 26 *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. On appelle surface d'équation implicite $f(x, y, z) \underset{\mathcal{R}}{=} 0$ l'ensemble (S) des points $M \underset{\mathcal{R}}{=} (x, y, z)$ tq :*

$$\begin{cases} (x, y, z) \in D_f \\ f(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

5.2 Surface défini par une équation cartésienne ("explicite")

Définition 27 *On dit que (S) admet une équation cartesienne explicite s'il existe un repère ($\mathcal{R}$) et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telque :*

$$(S) = \left\{ M \underset{\mathcal{R}}{=} (x, y, z) \ / \ \begin{cases} (x, y) \in D_f \\ z = f(x, y) \end{cases} \right\}$$

Une surface de ce type est un cas particulier de surface définie par une équation implicite :

$$F(x, y, z) = 0$$

5.3 Surfaces définies par une représentation paramétrique

On appelle arc paramétré de E une application :

$$\begin{aligned} \gamma : I &\to E \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

où I est un intervalle inclu dans $\mathbb{R}$.
On appelle courbe paramétré par γ :

$$Supp(\gamma) = \{\gamma(t), \ t \in I\}$$

Définition 28 *On appelle nappe paramétré de E une application :*

$$\Delta \to E$$
$$(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$$

ou Δ est un sous ensemble inclus dans $\mathbb{R}^2$. On appelle surface paramétré par σ :

$$Supp(\sigma) = \{\sigma(u,v),\ (u,v) \in \Delta\}$$

5.4 Plan tangent à une nappe paramétré de classe C^1

5.4.1 Rappel

Une nappe paramétré du $\mathbb{R}$ espace affine E de dimension 3 est une fonction :

$$\Delta \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sigma} E$$
$$(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$$

Souvent, $\sigma(u,v)$ est noté M(u,v). On défini le support de σ par :

$$\text{Supp } \sigma = \{\sigma(u,v),\ (u,v) \in D_f \cap \Delta\}$$

Dans la suite on supposera σ de classe C^1 sur Δ, avec Δ un ouvert. Si $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère de E ($(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base de $\overrightarrow{E}$), on peut définir ses trois fonctions coordonnées par rapport au repère $\mathcal{R}$:

$$\Delta \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sigma} E$$
$$(u,v) \mapsto \sigma(u,v) = \left| \begin{array}{l} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on rappelle que σ est de classe C^1 sur Δ si et seulement si les trois fonctions coordonnées x,y,z sont C^1 sur Δ. Ceci implique que σ et x,y,z sont définies sur Δ en entièr evidement. On a alors :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u} \underset{B}{\equiv} \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} \end{array} \right.$$

Nous avons de même pour la dérivée partielle par rapport à v.

5.4.2 Arc tracé sur une nappe

Soit γ un arc paramétré défini par :

$$I \subset \mathbb{R} \to E$$
$$t \mapsto \gamma(t)$$

Avec I un intervalle. $\gamma(t)$ est souvent noté P(t).
Nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Supp } \gamma \subset \text{ Supp } \sigma &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \gamma(t) \in \text{ Supp } \sigma \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ \exists (u,v) \in \Delta \ / \ \gamma(t) = \sigma(u,v) \end{aligned}$$

Définition 29 *On dit que γ est un arc tracé sur σ s'il existe des application :*

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} I &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto v(t) \end{aligned}$$

telle que :

$$\forall t \in I \begin{cases} (u(t), v(t)) \in \Delta \\ \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \end{cases}$$

On dit que γ est un "arc C^1 tracé sur σ" s'il existe (u,v)$\in C^1(I, \mathbb{R})$, avec I intervalle inclus dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall t \in I$:

$$\begin{cases} (u(t), v(t)) \\ \gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \end{cases}$$

5.4.3 Propriété fondamementale et définition du plan tangent

Supposons que $\gamma : I \to E$ soit "un arc C^1 tracé sur la nappe σ", avec $\sigma : \Delta$ ouvert $\subset \mathbb{R}^2 \to E$, de classe C^1. Avec les notations introduites précédement :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \ \overrightarrow{\gamma}'(t) &= \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial u}{\partial t}(t) + \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u(t), v(t))\frac{\partial v}{\partial t}(t) \\ &\in \text{Vect}(\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)) \end{aligned}$$

Définition 30 *On dit que σ est régulier en (u_0, v_0) ou, par abus, que le point $\sigma(u_0, v_0)$ est un point régulier de la nappe σ si $\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) \nparallel \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$ c'est à dire encore si :*

$$rg\left[\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)\right]$$

Ou encore, si E est euclidien orienté :

$$\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$$

Dans ce cas, Vect($\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$) est alors un plan vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

Définition 31 *On appelle plan tangent à σ, noté $T_{(u_0,v_0)}$, le plan de direction vectorielle Vect($\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0)$) et contenant le point $M_0 = \sigma(u_0, v_0)$. On peut résumer ceci sous la forme :*

$$T_{(u_0,v_0)} = M_0 + \mathit{Vect}(\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0))$$

Propriété 89 *En particulier, si σ est régulier en (u(t),v(t)) et γ régulier en t, c'est à dire $\overrightarrow{\gamma}'(t) \neq 0$, alors :*

$$\gamma(t) + \mathit{Vect}(\overrightarrow{\gamma}'(t)) \subset \gamma(t) + \mathit{Vect}(\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0))$$

Autrement dit, la tangente à l'arc γ est incluse dans le plan tangent à σ en $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$.

Remarque 1 *En pratique, E est souvent euclidien orienté et dans ce cas, le plan tangent à une nappe σ en un point régulier $M_0 = \sigma(u_0, v_0)$ est caractérisé par M_0 et un vecteur normale, par exemple :*

$$\frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{\sigma}}{\partial v}(u_0, v_0) = \overrightarrow{H}(u_0, v_0)$$

Ce vecteur est non cul car σ est supposé régulier en ce point. On obtient dans ce cas que :

$$T_{M_0} = M_0 + \left[Vect(\overrightarrow{H}_{(u_0,v_0)})\right]^{\perp}$$

5.4.4 Cas des nappes coniques

Définition 32 *On appelle cone, ou surface conique, de sommet O ($O \notin$ Supp γ) et de directrice Supp γ la réunion de droites $\ni 0$ et ayant un point $\ni$ Supp γ.*

Définition 33 *Cette définition est à la limite du programme. Une surface engendrée par une famille de droite s'appelle une surface réglée. Si en outre, cette surface admet un plan tangent en tout point et que ce plan est le même le long des droites génératrices, la surface est dites "développable".*

5.5 Changement de paramétrisation et plan tangent

Soit σ une nappe paramétré C^1 définie par :

$$\begin{aligned} \Delta \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^2 &\to E \\ (u, v) &\mapsto \sigma(u, v) \end{aligned}$$

et S = Supp(σ). On dit que aussi que σ est la paramétrisation de S. S peut admettre plusieurs paramétrisation, c'est à dire être le support de différentes nappes. Si S = Supp(σ_1) avec :

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \Delta_1 \text{ ouvert } \subset \mathbb{R}^2 &\to E \\ (u_1, v_1) &\mapsto \sigma_1(u_1, v_1) \end{aligned}$$

Définition 34 *On dit que σ_1 est une paramétrisation de S C^1 équivalente à σ s'il existe un C^1 difféomorphisme :*

$$\begin{aligned} \Phi : \Delta_1 &\to \Delta \\ (u_1, v_1) &\mapsto (u(u_1, v_1), v(u_1, v_1)) \end{aligned}$$

telque :

$$\sigma_1 = \Phi o \sigma$$

C'est à dire : $\forall (u_1, v_1) \in \Delta_1 / \sigma_1(u_1, v_1) = \sigma(u(u_1, v_1), v(u_1, v_1))$

Propriété 90 *Les propriétés de régularité en un point sont conservé par un changement de paramétrisation de classe C^1. Il en est de même pour le plan tangent en un point régulier.*

5.6 Plan tangent à une surface définie par une équation implicite F(x,y,z)=0

On suppose que F est une application C^1 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On défini la surface (S) par :

$$(S) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / F(x, y, z) = 0\right\}$$

On peut définir $\overrightarrow{\text{grad}} F_{(x,y,z)} = \left| \begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) \\ \\ \dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) \end{array} \right.$

Définition 35 *On dit que F est régulier en (x,y,z) ou que* (x_0, y_0, z_0) *est un point régulier de F (de (S)) si* $\overrightarrow{gradF}_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$. *Supposons, par exemple, que :* $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. *Dans ce cas, d'après le Théorème des fonctions implicite, (S) est localement, au voisinage de* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *le support d'une nappe paramétré cartesienne de classe* C^1 *:*

$$\Delta_0 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^3$$

$$(x,y) \mapsto \sigma(x,y) = \left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

Avec $\Delta_0 =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - \alpha, y_0 + \alpha[$
Tout ceci revient à dire qu'au voisinage d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *régulier de la surface (S) : Si F(x,y,z) = 0 (c'est à dire si* $\overrightarrow{gradF}_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$*) alors (S) est localement le support d'une nappe paramétré cartesienne* C^1 *régulière, donc le plan tangent en (x,y,z) est orthogonale à* $\overrightarrow{gradF}_{(x_0,y_0,z_0)}$ *(On dit aussi normal à (S))*

Chapitre 6

Intégrales multiples

Considérons une intégrale de la forme :

$$\iint_{(x,y)\in D} f(x,y)dxdy$$

Avec D un sous ensemble borné de $\mathbb{R}^2$

6.1 Théorème de Fubini

Considérons une fonction f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Si les applications partielles sont continues par morceaux, on obtient :

$$\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)dx \right) dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)dy \right) dx$$

La valeurs commune des deux membres de cette égalité est notée :

$$\iint_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy \text{ ou meme } \int_{(x,y)\in[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy$$

On peut se ramener au cas générale en considérant un rectangle $[a,b]\times[c,d] \supset D$, en posant une fonction $\tilde{f}$ égale à f sur D, nulle autrement.

6.2 Théorème de changement de variable

6.2.1 En dimension 1

On peut effectuer le changement de variable suivant :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a'}^{b'} f(u(t))u'(t)dt$$

Avec u un C^1 difféomorphisme de $[a',b'] \xrightarrow{u} [a,b]$

6.2.2 En dimension 2

$$\iint_{(x,y)\in D} f(x,y)dxdy = \iint_{(x,y)\in D'} g(u,v)|\text{det}J\varphi_{(u,v)}|dudv$$

Avec :

$$\varphi : D' \to D$$
$$(u,v) \mapsto (x,y)$$

est un C^1 difféomorphisme (entre ouvert). On défini $J\varphi_{(u,v)}$ (Matrice jacobienne de φ) :

$$\text{mat}_{\text{can}} d(J\varphi_{(u,v)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$|\text{det}(J\varphi_{(u,v)}) = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right) \right|$$

Remarque :
Si Δ est un sous espace de $\mathbb{R}^2$ de surface nulle :

$$\iint_{D\cup\Delta} f(x,y)dxdy = \iint_{D} f(x,y)dxdy$$

Troisième partie

Suites, Séries

Chapitre 7

Série numérique

7.1 Définitions

7.1.1 Définitions générales

Définition 36 *Soit (u_n) une suite à valeur dans K.*
On appelle série de terme général u_n, et on note $\sum_n u_n$ cette nouvelle suite, de terme générale :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$$

S_n est appelé somme partiel de rang n de la série $\sum_n u_n$

Remarque 2 *Si la suite (u_n) est défini uniquement à partir du rang n_0, on peut se ramener au cas général à l'aide d'un changement de variable.*

Définition 37 *On dit que la série $\sum_n u_n$ converge si la suite (S_n) des sommes partiel converge dans K.*
On note alors cette limite :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Par définition, on as donc :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

En général, on note également S cette limite, et on appelle S somme de la série.

Exemple : On montre que la série harmonique diverge en utilisant un encadrement par intégrale.

Propriété 91 *Si la série $\sum_n u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$. Cela est donc une condition nécessaire de convergence de la série.*

Remarque 3 *Si on doit calculer :*

$$q^3 + q^4 + \dots$$

On se ramène au cas de la série géométrique de raison q de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q^3 + q^4 + \dots &= q^3(1 + q + q^2 + \dots) \\ &= \frac{q^3}{1-q} \end{aligned}$$

7.1.2 Reste d'ordre n

Définition 38 *Si* $\sum\limits_{n} u_n$ *converge, on peut définir* R_n*, le reste d'ordre n de la série* $\sum\limits_{n} u_n$*, par :*

$$R_n = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=n+1}^{p} u_k$$

Propriété 92 *On obtient les relations suivantes :*

$$S_n + R_n = S$$

$$\lim_{n \to \infty} R_n \to 0$$

7.2 Quelques propriétés générales

Dans tout ce chapitre, (u_n),(v_n),... sont des suites à valeurs dans K=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Propriété 93 *Supposons que* $\sum\limits_{n} u_n$ *et* $\sum\limits_{n} v_n$ *converge, alors la série de terme général* $w_n = u_n + v_n$ *converge , et on as :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k\right)$$

Propriété 94 *Soit* $\lambda \in K$.
Si $\sum\limits_{n} u_n$ *converge, il en est de même de la série de terme général* $w_n = \lambda u_n$*, et alors :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k = \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)$$

Remarque 4 *Les résultats précédent peuvent aussi s'écrire :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

Cependant, pour pouvoir écrire ceci, il faut s'assurer que les membres de droites converge. De même :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda u_k = \lambda \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right)$$

Propriété 95 *Soit* (z_n) *est une suite à valeur dans* $\mathbb{C}$.
Si $(x_n) = Re(z_n)$ *et* $(y_n) = Im(z)$*, donc* $z_n = x_n + iy_n$*, avec* $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ *alors :*

$$(\sum_{n} z_n \text{ converge }) \Leftrightarrow (\sum_{n} x_n \text{ et } \sum_{n} y_n \text{ converge })$$

Et dans ce cas, on obtient que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + i \sum_{k=0}^{\infty} y_k$$

Définition 39 *On dit que la série de terme général* u_n *converge absolument, ou que la suite* (u_n) *est sommable, si la série* $\sum\limits_{n} |u_n|$ *converge.*

Théorème 12 *L'absolu convergence de la série de terme général* u_n *implique la converge de la série de terme général* u_n.
Dans ce cas, on as :

$$|\sum_{k=0}^{\infty} u_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

Propriété 96 *Pour tous n_0 entier naturel, on peut modifier les n_0 premier termes de la suite (u_n) sans modifier la convergence de la série de terme général u_n.*
On peut écrire ceci sous la forme :
Si (v_n) vérifie à partir du rang n_0 $v_n = u_n$, alors :

$$(\sum_n v_n \text{ converge }) \Rightarrow (\sum_n u_n \text{ converge })$$

On obtient donc que la convergence de la série ne dépend que du comportement asymptotique de u_n.

Propriété 97 *Toute suite (a_n) est une somme partielle d'une série $\sum_n u_n$, à un terme constant près.*

$$\forall n \in N \ a_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) + a_0$$

7.3 Séries à termes réels positifs (ou de signe constant)

Propriété fondamentale 1 *Soit (u_n) une suite à valeur réel positive.*
Alors la suite des sommes partielle S_n est croissante. Donc :
- → *Soit (S_n) est majorée, et alors elle converge vers S = $\sup\ S_n$*
- → *Soit (S_n) n'est pas majorée, alors $S_n \underset{\infty}{\to} \infty$. Dans ce cas on écrit :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = +\infty$$

Propriété 98 *Si (u_n) et (v_n) sont à terme réels positifs telque*

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

Alors :
- → $\sum_n v_n$ *converge* ⇒ $\sum_n u_n$ *converge et :*

$$0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

- → $\sum_n u_n$ *diverge* ⇒ $\sum_n v_n$ *diverge*

Propriété 99 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réel positifs.*
Si $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$ (Grand O), alors :

$$(\sum_n v_n \text{ converge }) \Leftrightarrow (\sum_n u_n \text{ converge})$$

Propriété 100 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels positifs, ou simplement de signe constant.*
Si $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$, alors :

$$(\sum_n u_n \text{ converge }) \Leftrightarrow (\sum_n v_n \text{ converge })$$

On dit que $\sum_n u_n$ et $\sum_n u_n$ ont même nature.

7.3.1 Convergence des séries de Riemann

Définition 40 *On appelle série de Riemann les séries de terme général, avec $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

Propriété 101 *Soit (u_n) la suite de terme général :*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

Alors :

$$(\sum_n u_n \text{ converge}) \Leftrightarrow (\alpha > 1)$$

On démontre cette propriété en montrant que pour $\alpha \leq 0$, $u_n \nrightarrow 0$, donc la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifié. Pour $\alpha > 0$, on utilise un encadrement par intégrale.
Dans ce cas, on défini l'application suivante :

$$\xi :]1, \alpha[\to \infty$$
$$\alpha \mapsto \xi(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Propriété 102 *La comparaison série-intégrale (qui consiste à encadrer la somme partiel, ou le reste partiel, par des intégrales de la fonction) précédent permet d'obtenir un équivalent simple, quand le cas de série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$:*

→ *De S_n dans le cas divergent*
→ *De R_n, dans le cas convergent.*

7.3.2 Règle de Riemann

Propriété 103 *Soit (u_n) suite à valeur réelle ou complexe.*
Si $\exists \alpha > 1$ telque $n^\alpha u_n \underset{\infty}{\to} 0$, alors $\sum_n |u_n|$ converge. On dit aussi que la suite (u_n) est sommable

Propriété 104 *Soit (u_n) suite à valeur réelle.*
Si $nu_n \underset{\infty}{\to} \infty$, alors $\sum_n u_n$ diverge. On a meme :

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_n = \infty$$

7.3.3 Série de Bertrand

Définition 41 *Ce sont les séries de terme général :*

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha . ln(n)^\beta}$$

Propriété 105 *Une série de Bertrand converge si et seulement si :*

$$\alpha > 1 \text{ ou } \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1$$

On le démontre à l'aide de la règle de Riemann, et à l'aide de la comparaison série-intégrale.

7.3.4 Propriété de Cauchy

Cette propriété permet de démontrer directement la convergence des séries de Riemann et de Bertrand.
Soit u, la fonction définie $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, par :

$$u : [n_0, \infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \to u(t)$$

u est une application continue par morceaux et monotone. On obtient que :

$$(\sum_n u(n) \text{ converge }) \Leftrightarrow (\int_{n_0}^{\infty} u \text{ converge })$$

On dit que la série et l'intégrale ont même nature.

7.3.5 Règle de d'Alembert

Propriété 106 *Soit (u_n) une suite de réels telque $\forall n \Leftrightarrow \geq n_0$, $u_n > 0$, et telque :*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{\infty}{\to} l \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Alors :

→ *Si l > 1, alors la série de terme général u_n diverge grossièrement*

→ *Si l < 1, alors la série converge*

7.3.6 Règle de Cauchy

C'est une règle hors-programme.

Propriété 107 *Soit (u_n) une suite de réels telle que :*

$$\begin{cases} \forall n \geq n_0 \ u_n > 0 \\ \sqrt[n]{u_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}_+ \end{cases}$$

Si :

→ *l>1 $\sum\limits_n u_n$ diverge ($u_n \to \infty$)*

→ *l<1 $\sum\limits_n u_n$ converge*

7.4 Séries alternées

Définition 42 *Soit (u_n) une suite de réels.*
On dit que (u_n) est alternée si elle est du type :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n a_n$$

Ou du type :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^{n+1} a_n$$

Avec (a_n), suite de réels positive. Dans ces deux cas :

$$a_n = |u_n|$$

La série $\sum\limits_n u_n$ est dites alternée sur la suite (u_n) est alternée.

7.4.1 Critère de Leibniz ou Critère spécial des séries alternée

Énoncé 15 *Soit $\sum\limits_n u_n$ une série alternée.*
Si :

→ *La suite $(u_n) \underset{\infty}{\to} 0$*

→ *(| u_n |) est une suite décroissante*

Alors :

→ *La série $\sum\limits_n u_n$ converge*

→ *$\forall n \in N$, le signe de R_n est le signe de son premier terme, et :*

$$|R_n| \leq |u_{n+1}|$$

Ce résultat est valable aussi si on considère que S, la limite de la série, est le reste d'ordre -1.

Propriété 108 *Sous les hypothèses de la série alternée, la somme S est comprise entre deux sommes partielle consécutive, S_n et S_{n+1}, et ceci $\forall n \in N$*

Propriété 109 *Si la série n'est alternée, et ne vérifie le fait que la suite ($|u_n|$) n'est décroissante qu'a partir d'un rang n_0, alors la série converge toujours, et le regle sur le reste reste valable, à partir du rang n_0.*

Lors d'exercice, le point le plus souvent difficile est de démontrer que la suite des valeurs absolu décroit.
Exemple :
A l'aide de ce théorème, on montre que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge $\forall \alpha > 0$. On montre de plus que cette série converge vers $\ln(2)$. On le démontre en partant de :

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{1\} \quad 1 - t + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1 - ((-1)^n t^n)}{1+t}$$

D'ou :

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

On continue en intégrant entre 0 et x, en prenant la valeur pour x=1. Puis on montre que le reste intégrale tend vers 0.

7.5 Quelques espaces remarquables

Propriété 110 *L'ensembles des suites $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telque $\sum_n u_n$ converge est un sous espace vectoriel de $K^{\mathbb{N}}$. (Stable par addition et par multiplication par un scalaire).*

7.5.1 Ensemble $l^1(K)$

Définition 43 *L'ensemble $l^1(K)$ est l'ensemble des suites sommables à valeurs dans K. Cette ensemble est un sous espace vectoriel de l'espace vectoriel vu ci dessus.*

Propriété 111 *Soit (u_n) une suite à valeur dans K.*
Si la suite (u_n) est sommable, la serie $\sum_n u_n$ converge aussi (L'absolu convergence implique la convergence).
$l^1(K)$ est donc inclu dans l'espace vectoriel vu au début de ce chapitre.

Propriété 112 *Supposons que u=(u_n) et $v = (v_n)$ soient sommable. L'inégalité suivante :*

$$0 \leq |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$$

Montre que u+v=($u_n + v_n$) est également sommable (On le montre d'après la structure de l'ensemble des suites telque la série soit convergente et d'après le théorème de convergence par majoration)

Propriété 113 *Soit λ un scalaire.*

$$u \in l^1(K) \Rightarrow \lambda u \in l^1(K)$$

7.5.2 Ensemble $l^2(K)$

Définition 44 *L'ensemble $l^2(K)$ est l'ensemble des suites de carrées sommable, c'est à dire telque :*

$$\sum_n |u_n^2|$$

converge.
On montre que l'ensemble précédent est inclu dans cette ensemble, ce qui n'est pas le cas des intégrales.

7.6 Sommation par paquets ou associativité de la sommation

Définition 45 *Soit (u_n) une suite à valeur dans K telque $\sum\limits_n u_n$ converge.*
Soit :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Donnons nous une application ϕ défini par :

$$\phi : N \to N$$

telque ϕ soit une application strictement croissante.
Une telle application étant donnée, définisoons à partir de (u_n) et de ϕ une nouvelle suite (v_n) de terme général :

$$v_n = u_{\phi_{(n-1)+1}} + ... + u_{\phi_n}$$

On obtient une suite du type (exemple) :

$$\begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_1 = u_1 + u_2 + u_3 \\ v_2 = u_4 + u_5 \end{cases}$$

Propriété 114 *Avec les notations précédentes, le fait que la série de terme général u_n converge implique que la série de terme général v_n converge, et vers S aussi.*

Chapitre 8

Sommation des relations de comparaison

8.1 Cas sommable

Dans tous ce chapitre, les relations de sommation sont des relations concernant **les restes**

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

Hypothèses générales 1 *Dans l'ensemble de cette fiche,* (u_n) *et* (v_n) *sont deux suites définies à partir d'un certain rang* N_0*.*

→ (u_n) *est une suite à valeur* $\mathbb{C}$*.*

→ (v_n) *est une suite à valeur dans* $\mathbb{R}^+$*, ou à valeur réelles et de signe constant à partir d'un certain rang*

8.1.1 Négligabilité

Théorème 13 *Avec les hypothèses précédentes :*
Supposons que (v_n) *soit sommable et que :*

$$u_n \underset{\infty}{\ll} v_n$$

Alors (u_n) *est également sommable, et,* $\forall n \geq N_0$ *:*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \ll \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

On peut aussi enoncer ce théorème, mais avec les notations de Landau.

Théorème 14 *Sous les hypothèses de départ :*
Supposons que (v_n) *soit sommable et que :*

$$u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$$

Alors $(o(v_n))$ *est sommable et*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} o(v_k) \ll o(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k)$$

On démontre ces deux théorèmes à l'aide de la propriété suivante :

$$u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$$

Et du théorème de sommabilité par domination. Puis on utilise la définition de $u_n \underset{\infty}{\ll} v_n$:

$$u_n \underset{\infty}{\ll} v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \; |a_n| \leq \varepsilon |b_n|$$

Et on poursuit en utilisant une sommation finie et en passant à la limite sur cette somme en utilisant le faite que la série converge, donc que le reste existe.

8.1.2 Domination

Théorème 15 *Avec les hypothèses précédentes :*
Supposons que (v_n) *soit sommable et que :*

$$u_n \underset{\infty}{\preccurlyeq} v_n$$

Alors (u_n) *est également sommable, et,* $\forall n \geq N_0$ *:*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \preccurlyeq \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

On peut aussi enoncer ce théorème, mais avec les notations de Landau.

Théorème 16 *Sous les hypothèses de départ :*
Supposons que (v_n) *soit sommable et que :*

$$u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$$

Alors (u_n) *est sommable et*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} O(v_k) \ll O(\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k)$$

On s'appuie sur la propriété suivante pour démontrer ce théorème.

Propriété 115 *Soit* (a_n) *et* (b_n) *deux suites. Si :*

$$a_n \underset{\infty}{=} O(b_n) \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+, \; \exists N \in \mathbb{N}, \; tq \; \forall n \geq N, \; |a_n| \leq M|b_n|$$

La démonstration est totalement analogue au cas négligable.

8.1.3 Equivalence

Sous les hypothèses du préambule, en particulier sur le fait que (v_n) soit de signe constant à partir d'un certain rang n_0 :
Si :

$$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \text{ et } (v_n) \text{ est sommable}$$

Alors :

$$(u_n) \text{ est sommable et } \sum_{k=n+1}^{\infty} u_n \underset{\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_n$$

On démontre ce théorème en utilisant la propriété suivante :

$$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n - v_n \underset{\infty}{\ll} v_n$$

On se ramène ainsi à un des cas précédent.

8.2 Cas non sommable

Dans tout ce chapitre, les relations de sommation concerne les **sommes partielle** :

$$\sum_{n_0}^{n} u_k$$

8.2.1 Négligabilité

Théorème 17 *Avec les hypothèses précédentes, en particulier (v_n) de signe constant à partir d'un certain rang :*
Supposons que (v_n) ne soit pas sommable et que :

$$u_n \underset{\infty}{\ll} v_n$$

Alors :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \ll \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

Mais nous n'avons pas d'information sur la sommabilité ou la non sommabilité de (u_n).

On peut aussi enoncer ce théorème, mais avec les notations de Landau.

Théorème 18 *Sous les hypothèses de départ :*
Supposons que (v_n) ne soit pas sommable et que :

$$u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$$

Alors :

$$\sum_{k=n_0}^{n} o(v_k) \ll o(\sum_{k=n_0}^{n} v_k)$$

On démontre ceci avec le plan suivant :
→ On suppose $\exists n_1 \in \mathbb{N}\ tq\ \forall n \geq n_1\ V_n \geq 0$
→ On montre que $S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ car $V_n \geq 0$ et non sommable

Puis on obtient que :

$$\begin{aligned} S_n \ll S'_n &\Leftrightarrow \frac{S_n}{S'_n} \to 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \ \left|\frac{S_n}{S'_n}\right| \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

Une fois cette simplification faite, on démontre le deuxième membre de l'équivalence.

8.2.2 Domination

Théorème 19 *Avec les hypothèses précédentes :*
Supposons que (v_n) ne soit pas sommable et que :

$$u_n \underset{\infty}{\preccurlyeq} v_n$$

Alors $\forall n \geq N_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \preccurlyeq \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

On peut aussi enoncer ce théorème, mais avec les notations de Landau.

Théorème 20 *Sous les hypothèses de départ :*
Supposons que (v_n) ne soit pas sommable et que :

$$u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$$

Alors :

$$\sum_{k=n_0}^{n} O(v_k) \ll O(\sum_{k=n_0}^{n} v_k)$$

8.2.3 Equivalence

Sous les hypothèses du préambule, en particulier sur le fait que (v_n) soit de signe constant à partir d'un certain rang n_0 :
Si :

$$u_n \underset{\infty}{\sim} v_n \text{ et } (v_n) \text{ n'est pas sommable}$$

Alors, (u_n) n'est pas sommable et :

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_n \underset{\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} v_n$$

Propriété 116 *Le passage au valeur absolue ne modifie pas les relations de comparaison.*

8.3 Les démonstrations

8.3.1 Démonstration : Cas sommable, négligabilité

Nous avons les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (v_n) \text{ est une suite à valeur dans } \mathbb{R}^+ \\ (v_n) \text{ est sommable} \\ u_n \underset{\infty}{\ll} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \end{cases}$$

Démontrons le premier point, c'est à dire que (u_n) est sommable. La troisième hypothèse implique que $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$. On obtient donc que (u_n) est sommable d'après le théorème de sommabilité sous hypothèse de domination.
Démontrons maintenant le deuxième points de la propriété : Partons que l'explicitation de la négligabilité :

$$u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \; |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

On suppose $\forall n \; v_n \geq 0$. On peut donc retirer les valeurs absolues. On somme l'inégalité précédent :

$$\sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} v_k$$

De plus :

$$\sum_{k=n+1}^{p} |u_k| \geq \left| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right|$$

D'ou :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{p} u_k \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} v_k$$

Nous avons vu que (u_n) et (v_n) sont sommable, on peut donc passer à la limite sur p et écrire :

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$$

Nous avons donc montré que :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N \; |R_n| \leq \varepsilon R'_n$$

Avec R_n, respectivement R'_n, le restes de la série $\sum_n u_n$, respectivement $\sum_n v_n$. Nous avons donc montré que :

$$R_n \underset{\infty}{\ll} R'_n$$

8.3.2 Démonstration : Cas non sommable, négligabilité

$$\begin{cases} (v_n) \text{ est à valeur dans } \mathbb{R}\text{, de signe constant à partir d'un certain rang } n_1 \\ (v_n) \text{ n'est pas sommable} \\ u_n \underset{\infty}{\ll} v_n \Leftrightarrow u_n \underset{\infty}{=} o(v_n) \end{cases}$$

Ici, on se limite au cas ou :

$$\forall k \geq n_1 \; v_k \geq 0$$

Mais le cas négatif se traite exactement de la même façon. Notons, avec $n_0 \in \mathbb{N}$, le premier indice de définition de (v_n) :

$$S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k$$

On veut montrer qu'il existe un rang à partir du quel $S'_n > 0$ pour pouvoir simplifié la démonstration. On peut écrire cette somme sous la forme :

$$S'_n = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} v_k + \sum_{k=n_1}^{n} v_k$$

On suppose que $\forall k \geq n_1 \; v_k \geq 0$ donc $\forall k \geq n_1 \; v_k = |v_k|$. D'ou :

$$S'_n = \underbrace{\sum_{k=n_0}^{n_1-1} v_k}_{\text{Indépendent de n}} + \sum_{k=n_1}^{n} |v_k|$$

Par passage à la limite sur n, on obtient que :

$$\sum_{k=n_1}^{n} |v_k| \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

car (v_n) est supposée non sommable. On obtient donc que :

$$S'_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$$

Cela permet de dire $\exists n_2 > n_1$ tq $\forall n \geq n_2 \; S'_n > 0$ (car cette suite est croissant à partir du rang n_1). On peut donc écrire que :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \underset{\infty}{\ll} S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} v_k \Leftrightarrow \frac{S_n}{S'_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Démontrons la seconde partie de l'équivalence. On veut montrer qu'il existe $N > n_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N \left|\frac{S_n}{S'_n}\right| \leq 2\varepsilon$.
On utilise les hypothèses : On suppose que $u_n \underset{\infty}{=} o(v_n)$ or ceci équivaut à :

$$\exists n_3 > n_2 \; tq \; \forall n \geq n_3 \; |u_n| \leq \varepsilon v_n$$

D'ou :

$$\forall n \geq n_3 \; \sum_{k=n_3}^{n} |u_n| \leq \varepsilon \sum_{k=n_3}^{n} v_n$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{S_n}{S'_n}\right| &= \frac{|S_n|}{S'_n} \\
&= \frac{\left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right|}{S'_n} \\
&= \frac{\left|\sum_{k=n_0}^{n_3-1} u_k + \sum_{k=n_3}^{n} u_k\right|}{S'_n} \\
&\leq \frac{\left|\sum_{k=n_0}^{n_3-1} u_k\right| + \left|\sum_{k=n_3}^{n} u_k\right|}{S'_n} \\
&\leq \frac{|S_{n_3-1}|}{S'_n} + \varepsilon \frac{|\sum_{k=n_3}^{n} v_k|}{S'_n} \\
&\leq \frac{|S_{n_3-1}|}{S'_n} + \varepsilon \frac{\sum_{k=n_3}^{n} v_k}{S'_n} \\
&\leq \frac{|S_{n_3-1}|}{S'_n} + \varepsilon (1 - \frac{S'_{n_3-1}}{S'_n})
\end{aligned}$$

Nous avons vu que :

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \infty$$

Donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \frac{|S_{n_3-1}|}{S'_n} \leq \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \frac{S'_{n_3-1}}{S'_n} \leq \varepsilon$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\forall n \leq \max(N_1, N_2) \; \left|\frac{S_n}{S'_n}\right| &\leq \varepsilon + \varepsilon(1-\varepsilon) \\
&\leq 2\varepsilon
\end{aligned}$$

On as donc obtenu :

$$\exists N_3 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_3 \; \left|\frac{S_n}{S'_n}\right| \leq 2\varepsilon$$

Chapitre 9

Suite de fonctions ou d'application - Convergence uniforme

9.1 Convergence simple

Définition 46 *Soit A une ensemble (en général, A est un intervalle $\subset \mathbb{R}$), et $(E, \| \|)$ un K espace vectoriel normé.*
Soit (f_n) une suite d'application de $A \to E$.
On dit que cette suite converge simplement sur A si :

$$\forall x \in A \ (f_n(x)) \textit{ converge dans } (E, \| \|)$$

Lorsque que c'est le cas, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ dépend a priori de x.
On peut donc définir une nouvelle application :

$$\begin{aligned} f : A &\to E \\ x &\mapsto f(x) = \lim_{n\mapsto\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

On dit que f est la limite simple de f_n sur A. En pratique, E=$\mathbb{R}$.

Exemple fondamental : Etudier la convergence simple de la fonction :

$$\begin{aligned} f_n : A = [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x) = x^n \end{aligned}$$

9.2 Convergence uniforme d'une suite d'applications

Propriété 117 *L'ensemble B(A,E) des applications bornées d'un ensemble A dans un K espace vectoriel normes (E,$\| \|$) est un K sous espace vectoriel des applications de A dans E. De plus :*

$$\begin{aligned} B(A,E) &\to \mathbb{R}^+ \\ f &\mapsto \| f \|_{\infty,A} = \sup_A \| f \| \end{aligned}$$

définie une norme sur cette espace de fonction. On le démontre en montrant que cette application vérifie la définition d'une norme.

Définition 47 *Soit (f_n) une suite d'application de A, qui est un ensemble de E, un K espace vectoriel normé $(E, \| \|)$, et f une application de A dans E.*
On dit que (f_n) converge uniformement vers f sur A si :

$$\begin{cases} \exists n_0 \in N \ tq \ \forall n \geq n_0 \ f_n - f \in B(A,E) \textit{ (bornée)} \\ \| f_n - f \|_{\infty,A} \underset{n\mapsto\infty}{\to} 0 \end{cases}$$

Il se peut que la différence des normes dans le second cas ne soit défini qu'a partir du rang n_0, mais ceci ne change rien.
En général, la première condition est évidente. Il faut donc se concentrer sur la deuxième propriété. En pratique, E=$\mathbb{R}$ et A = I $\subset \mathbb{R}$. Si la suite (f_n) converge simplement vers une certaine fonction f_1, alors, si il y a convergence uniforme, c'est obligatoirement vers la fonction f_1.

Exemple : Réutiliser la fonction précédente.

Propriété 118 *Soit (f_n) une suite d'application de A, un ensemble, dans (E,$\|\ \|$), un K espace vectoriel normée.*
Si (f_n) converge uniformement vers f sur A :

$$f : A \to E$$

Alors (f_n) converge simplement vers f sur A. On le démontre par encadrement de $\| f_n(x) - f(x) \|$. On peut aussi le démontrer par un raisonnement en ε

Propriété 119 *Cette propriété est utile pour prouver la non convergence uniforme.*
Soit (f_n) une suite d'application de A, un ensemble, dans (E,$\|\ \|$) un K espace vectoriel normée.
Si (f_n) convergent uniformement vers f, application de A dans E, alors :

$$\forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}\ f_n(x_n) - f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \overrightarrow{0}$$

De plus, (x_n) n'est pas necessairement convergente et cette notion n'a meme pas de sens si il n'y a pas de distance de défini sur A. On le démontre par définition du sup.

Exemple : Appliquer cette propriété pour caractériser le fait que l'exemple fondamental ne converge pas uniformement sur [0,1]

9.3 Théorème classique sous les hypothèses de convergence uniforme

9.3.1 Théorème de continuité

Théorème 21 *Soit (f_n) une suite d'application de $I \mapsto K$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, convergent uniformement vers f : I $\to$ K, sur tout le segment $[a, b] \subset I$.*

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue en } x_0 \in I) \Rightarrow (f \text{ est continue en } x_0)$$
$$(\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \text{ est continue sur } I) \Rightarrow (f \text{ est continue sur } I)$$

On démontre ce résultat à l'aide de raisonement en ε

Exemple : Montrer que cette propriété permet de dire, en connaisant la convergence simple, que la suite de fonction ne converge pas uniformement.

Généralisation 1 *Soit (f_n) une suite d'application de A dans E, avec A une partie non vide d'un espace vectoriel normée, E un K espace vectoriel.*
Si :

$$\begin{cases} \forall n \in N\ f_n \text{ est continue sur A, respectivement en } a \in A \\ (f_n) \text{ converge uniformement vers } f : A \to E \text{ sur tout compact } \in A \end{cases}$$

Alors, f est continue sur A, respectivement en a.

Propriété 120 *Un sous ensemble C d'un espace vectoriel normée E, munie de la norme $\|\ \|$, est dit compact si de toute suite (γ_n) à valeur dans C, on peut extraire une sous-suite $(\gamma_{\phi(n)})$, avec ϕ une application strictement croissante strictement de N dans N, qui converge vers un éléments de C. Ceci est développé dans la fiche sur les compact.*

9.3.2 Théorème d'interversion des limites, ou théorème de la double limite

Théorème 22 *Soit (f_n) une suite d'application de I dans K, avec I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, convergent uniformement sur I, vers une application f : I → K.*
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point de I ou une extrémité de I.
Si :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\to} l_n \in K$$

alors :

→ (l_n) *converge vers une limite* $l \in K$.

→ $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I}}{\to} l$

Le dernier point peut aussi s'écrire :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f_n(x)$$

Cela justifie bien l'appelation du théoreme. On démontre ce théorème par un raisonnement en ε.

Exemple : Montrer que sur [0,1[, l'exemple fondamentale permet de montrer que cette propriété n'est pas vérifié si il n'y a pas convergence simple.

Définition 48 *On dit qu'un espace vectoriel normée qu'il est complet si toute suite de cette espace vérifiant le critère de cauchy converge.*
Les espaces vectoriel normée complet sont appellé espace de Banach

Généralisation 2 *Soit (f_n) une suite d'application de A dans E, avec A une partie non vide d'un espace vectoriel normée, et E un K espace vectoriel normée complet.*
Si (f_n) converge uniformement sur A vers une application f de A dans E, si $a \in \bar{A}$ c'est à dire si tout voisinage de a rencontre A, et si :

$$\forall n \in N \ f_n(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\to} l_n \in E$$

alors :

→ *(l_n) converge vers $l \in E$.*

→ *De plus $f(x) \underset{x \to a}{\to} l$, avec $x \in A$. On peut écrire ceci sous la forme suivante :*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x)$$

On peut inverser les limites dans ce cas.

9.3.3 Théorème d'integration sur un segment sous les hypothèses de convergence uniforme

Théorème 23 *Soit (f_n) une suite d'application continue sur un segment [a,b], à valeur dans K= $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, convergent uniformement sur [a,b] vers f, application de [a,b] dans K.*
Alors :

→ *f est continue sur [a,b]*

→ $\displaystyle\int_a^b f_n \underset{n \to \infty}{\to} \int_a^b f$

On peut écrire la deuxième conclusion sous la forme :

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Pout le démontrer, on montre que sous ces hypothèses : $\displaystyle\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \infty$

Généralisation 3 *Ce théorème reste valable lorsqu'on remplace l'ensemble d'arrivé par un K espace vectoriel normée complet E. Ceci suppose d'avoir, au préalable défini* $\int_a^b g$ *pour g fonction de [a,b] dans E, un espace de banach, au moins continue par morceaux.*

9.3.4 Thérorème de classe C^1

Théorème 24 *Soit* (f_n) *une suite d'application de I, un intervalle de* $\mathbb{R}$*, dans K. On suppose que :*

→ $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n *est* C^1 *sur I*

→ *La suite* (f_n) *converge simplement sur I vers une application f de I dans K*

→ *La suite* (f_n') *converge uniformement sur tout segment [a,b] inclu I vers une application g de I dans*

Alors :

→ *f est de classe* C^1 *sur I*

→ *f'=g*

→ f_n *converge uniformement vers f sur tout segment inclu dans I.*

La conclusion 2 peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dx}\lim_{n\mapsto\infty} f_n = \lim_{n\mapsto\infty}\frac{d}{dx}f_n$$

On démontre ce théorème à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégrale du premier ordre sur $f_n(x)$ *en a∈ I. La dernière partie du théorème consernant la converge uniforme de* (f_n) *on repasse par la définition de la norme* $\| \|_\infty$

Généralisation 4 *Le théorème précédent reste vrai quand on remplace l'ensemble d'arrivé par un espace vectoriel normée complet, un espace de Barach*

9.3.5 Théorème de classe C^p

Théorème 25 *Soit* (f_n) *une suite d'application de I, un intervalle de* $\mathbb{R}$*, dans K. Soit* $p \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que :

→ $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n *est* C^p *sur I*
→ *Les suites* $(f_n), (f_n'), ..., (f_n^{(p-1)})$ *converge simplement sur I vers une application f de I dans K*
→ *La suite* $(f_n^{(p)})$ *converge uniformement sur tout segment [a,b] inclu I vers une application g de I dans K*

Alors :

→ *La limite simple f de la suite* (f_n) *est* C^p *sur I.*
→ $\forall k \in [\,1, p]$ $f^{(k)}$ *est la limite simple de la suite* $(f_n^{(k)})$
→ $\forall k \in [0, p]$ $(f_n^{(k)})$ *converge uniformement vers* $f^{(k)}$ *sur tout segment de I.*

On le démontre par récurrence sur p, en utilisant successivement le théorème de classe C^1.

Généralisation 5 *Ce théorème reste valable quand on remplace l'ensemble d'arrivé par un espace vectoriel complet.*

9.3.6 Théorème de classe C^∞

Définition 49 *Une application de I, un intervalle inclu dans $\mathbb{R}$, dans K est dite de classe C^∞ sur I si $\forall p \in \mathbb{N}^*$ elle est C^p sur I.*

On en déduit facilement du théorème C^p précédent que si (f_n) est une suite d'application de I dans K, et si :

- $\rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n est de classe C^∞ sur I
- $\rightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $(f_n^{(k)})$ converge uniformement sur tout segment inclu dans I

Alors :

- $\rightarrow$ La limite simple f de la suite (f_n) est C^∞ sur I.
- $\rightarrow$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $(f_n^{(k)})$ converge uniformement vers $f^{(k)}$ sur tout segment inclu dans I.

9.4 Théorème de convergence monotone et convergence dominé

On se place dans le cadre d'une convergence simple ici

9.4.1 Théorème de convergence monotone

Définition 50 *La suite (f_n) d'application de I dans $\mathbb{R}$ est dite monotone si $\forall x \in I$, $(f_n(x))$ est monotone*

Théorème 26 *Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (pas forcément un segment), et (f_n) une suite d'application continue par morceaux sur I, à valeur dans $\mathbb{R}$, convergent simplement sur I vers f, application de I dans $\mathbb{R}$, également continue par morceaux. Si :*

- $\rightarrow$ *La suite (f_n) est monotone*
- $\rightarrow$ *Si f_0 et f sont intégrable sur I*

Alors :

- $\rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ f_n *est intégrable sur I*
- $\rightarrow$ $\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int_I f$

La deuxieme conclusion peut s'écrire sous la forme :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$$

9.4.2 Théorème de la convergence dominée

Théorème 27 *Soit I un intervalle quelconque inclu dans $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite d'application de I dans K, continue par morceaux, convergent simplement vers f, application de I dans K, également continue par morceaux.*
Si $\exists\, g$, application de I dans $\mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrale sur I, telque (condition de domination) :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leq g(x)$$

Alors :

$\rightarrow$ *Les* f_n *et f sont intégrable sur I*
$\rightarrow$ $\int_I f_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \int_I f$
On peut écrire cette dernière conséquence sous la forme suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$$

Chapitre 10

Séries d'applications

10.1 Définitions

Définition 51 *Soit (u_n) une suite d'application d'un ensemble A à valeurs dans un K espace vectoriel normée E, munie de la norme $\| \|$.*
En pratique, A est un intervalle inclu dans $\mathbb{R}$, et E sera presque toujours K=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et donc dans ce cas :

$$\| \| = | \, |$$

À partir de cette suite d'application de A dans E, on peut construire une nouvelle suite d'application (S_n) :

$$\begin{aligned} S_n : A &\to E \\ x &\mapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \end{aligned}$$

Cette nouvelle suite (S_n) s'appelle la série d'application de terme général u_n, et se note : $\sum\limits_n u_n$

10.1.1 Convergence simple

Définition 52 *On dit que $\sum\limits_n u_n$ converge simplement sur A si la suite d'application (S_n) converge simplement sur A. Lorsque que c'est le cas, on peut définir une nouvelle application :*

$$\begin{aligned} S_n : A &\to E \\ x &\mapsto S_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \end{aligned}$$

On dit que S, application de A dans E, est la limite simple de la serie. On peut également, lorsqu'il y a convergence simple de la série sur A, définir l'application R_n :

$$\begin{aligned} R_n : A &\to E \\ x &\mapsto R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \end{aligned}$$

Et nous avons les relations suivantes :

$$\begin{cases} S = S_n + R_n \\ \forall x \in A \quad R_n(x) \to \overrightarrow{0} \in E \end{cases}$$

On dit aussi, pour la dernière relation, que (R_n) converge simplement vers $\tilde{0}$ sur A

10.1.2 Convergence absolue

Définition 53 *On dit que la série d'application* $\sum_n u_n$ *converge absolument sur A si :*

$$\forall x \in A \ \sum_n \| u_n(x) \| \ \text{converge}$$

Propriété 121 *Si E = K, la convergence absolue de* $\sum_n u_n$ *sur A implique la convergence simple de cette série d'application sur A.*
Cette propriété reste vrai si E est un K espace vectoriel normée complet, dit de Banach

10.1.3 Convergence uniforme

Définition 54 *On dit que la série d'application* $\sum_n u_n$ *converge uniformement sur A si la suite d'application* (S_n) *converge uniformement sur A.*
Lorsque c'est le cas, la série d'application converge simplement sur A.
Notons S la limite simple de (S_n)*. Dire que la série d'application converge sur A signifie que :*

$$\| S_n - S \|_{\underset{A}{\infty}} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow \| R_n \|_{\underset{A}{\infty}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

Et qu'il existe un rang a partir du quel R_n *est bornée.*
On peut dire ceci de la façon suivante aussi. La serie d'application de terme général u_n *converge uniformement sur A :*

- $\rightarrow$ *La serie converge simplement sur A (Pour l'existance de S, donc de* (R_n)*)*
- $\rightarrow$ *La suite* (R_n) *converge uniforment sur A vers* $\tilde{0}$.

Propriété 122 *Si* (S_n) *converge uniformement sur A vers S, alors :*

$$\forall (x_n) \text{ à valeur dans } A \text{ }, S_n(x_n) - S(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} \overrightarrow{0} \in E$$

On écrit de même :

$$\forall (x_n) \quad R_n(x_n) \to \overrightarrow{0} \in E$$

Cette propriété est utile pour montrer la non convergence uniforme.

10.1.4 Convergence normale, ou convergence au sens de Weirstrass

Définition 55 *On dit qu'une série d'application* $\sum_n u_n$ *converge normalement sur A si* u_n *est bornée sur A, au moins à partir d'un certain indice* n_0*, au quel cas on peut définir sa norme infini, et si*

$$\sum_n \| u_n \|_{\underset{A}{\infty}} \ \text{converge}$$

Propriété 123 *Si la série d'application de terme général* u_n *converge normalement sur A, alors :*

La série converge absolument sur A

et si E est complet (en particulier E=K), alors

La série converge uniformement sur A

On démontre la première partie par encadrement de $\| u_n(x) \|$*. La seconde partie se montre en montrant que la suite* (R_n) *converge uniformement.*

10.2 Théorème classique sous hypothèses de convergence uniforme

10.2.1 Théorème de continuité

Théorème 28 *Soit* (u_n) *une suite d'application de I, un intervalle inclu dans* $\mathbb{R}$*, dans K.*
Si $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n *est continue en* $x_0 \in I$*, respectivement continue sur I, et si* $\sum_n u_n$ *converge uniformement sur I, alors :*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \text{ est continue en } x_0\text{, respectivement sur } I$$

Généralisation 6 *Soit* (u_n) *une suite d'application de A dans E, avec A un sous ensemble non vide d'un K espace vectoriel normée E', et E un K espace vectoriel normée.*
Si :

→ $\forall n \in \mathbb{N}$ u_n *est continue sur A*

→ $\sum_n u_n$ *converge uniformement sur tout compact inclu dans A*

Alors S est continue sur A

10.2.2 Théorème d'inversion de la limite et de la somme

Théorème 29 *Soit* (u_n) *une suite d'application de I, un intervalle inclue dans* $\mathbb{R}$*, dans K, et* $a \in I$*, ou a une extrémité, ou a =* $\pm\infty$*.*
Si :

→ $\forall n \in \mathbb{N}$ *:*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} u_n(x) = l_n \in K$$

→ $\sum_n u_n(x)$ *converge uniforment sur I*

Alors :

→ *La série* $\sum_n l_n$ *converge*

→ $S(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} l_k$

On peut aussi ecrire ceci sous la forme :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} u_k(x)$$

Généralisation 7 *Soit* (u_n) *une suite d'application de A dans E, avec A un sous ensemble non vide d'un K espace vectoriel normée E', et E un K espace vectoriel normée.*
Si :

→ $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\to} l_n \in E$

→ $\sum_n u_n(x)$ *converge uniformement sur tout compact inclu dans A*

Alors $\sum_n l_n$ *converge dans E et* $S(x) \underset{\substack{x \in A \\ x \to a}}{\to}$

10.2.3 Théorème d'intégration sur un segment [a,b] sous hypothèse de convergence uniforme

Soit (u_n) une suite d'application continue sur [a,b], à valeur dans K. Si $\sum\limits_n u_n$ converge uniformément sur [a,b], alors :

→ S est continue sur [a,b]

→ $\displaystyle\int_a^b S(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(t)dt$

Cette dernière égalité peut s'écrire sous la forme :

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(t)dt$$

Généralisation 8 *Ce théorème reste valable pour des applications $u_n : [a,b] \to E$, avec E un K espace vectoriel normé complet, à condition d'avoir défini l'intégrale de u_n sur un segment*

10.2.4 Théorème de classe C^1

Théorème 30 *Soit (u_n) une suite d'application de I dans K, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.*
Si :

→ *$\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^1 sur I.*

→ *$\sum\limits_n u_n$ converge simplement sur I*

→ *$\sum\limits_n u'_n$ converge uniformement sur I, ou sur tout segment de I*

Posons :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Alors :

→ *S est C^1 sur I*

→ *On peut exprimer S', la dérivé de S de la façon suivante (dérivation terme à terme) :*

$$S' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k$$

→ *La suite (u_n) converge uniforment sur tout segment inclue dans I.*

On le démontre en appliquant le théorème de classe C^1 pour les suites d'applications à la suite des $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$

Généralisation 9 *Ce théorème reste valable pour des applications u_n de [a,b] dans E, un K espace vectoriel complet.*

10.2.5 Théorème de classe C^p

Théorème 31 *Soit (u_n) une suite d'application de I dans K, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{N}^*$*
Si :

→ *$\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe C^p sur I.*

→ $\forall k \in [0, p-1]$ $\sum\limits_n u_n^{(k)}$ *converge simplement sur I*

→ $\sum\limits_n u_n^{(p)}$ *converge uniformement sur I, ou sur tout segment de I*

Posons :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Alors :

→ *S est* C^1 *sur I*

→ $\forall k \in [0, p-1]$*, on peut exprimer* $S^{(k)}$*, la dérivé k-ème de S de la façon suivante (dérivation terme à terme) :*

$$S^{(k)} = \sum_{t=0}^{\infty} u_t^{(k)}$$

→ $\forall k \in [0, p]$*, la suite* $(u_n^{(k)})$ *converge uniforment sur tout segment inclue dans I.*

Généralisation 10 *Ce théorème reste valable pour des applications* u_n *de [a,b] dans E, un K espace vectoriel complet.*

10.2.6 Théorème de classe C^∞

Théorème 32 *Soit* (u_n) *une suite d'application de I dans K, avec I un intervalle de* $\mathbb{R}$*, et* $p \in \mathbb{N}^*$
Si :

→ $\forall n \in \mathbb{N}$*,* u_n *est de classe* C^∞ *sur I.*

→ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\sum\limits_n u_n^{(p)}$ *converge uniformement sur I ou sur tout segment de I*

Posons :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k$$

Alors :

→ *S est* C^∞ *sur I*

→ $\forall p \in \mathbb{N}$*, on peut exprimer* $S^{(p)}$*, la dérivé p-ème de S de la façon suivante (dérivation terme à terme) :*

$$S^{(p)} = \sum_{t=0}^{\infty} u_t^{(p)}$$

Généralisation 11 *Ce théorème reste valable pour des applications* u_n *de [a,b] dans E, un K espace vectoriel complet.*

Chapitre 11

Séries d'endomorphismes et de matrices

11.1 Définitions et propriétés générales

Définition 56 *Soit E un K espace vectoriel normé de dimension finie n et $(f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphisme de E.*
On appelle série de terme général f_k la nouvelle suite $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ défini par :

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} f_i$$

On note $\sum_k f_k = (S_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On dit que la série converge lorsque S_k à une limite dans $\mathcal{L}(E)$, et on note cette limite :

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$$

cDans ce cas, nous pouvons définir aussi :

$$R_k = \lim_{p\to\infty} \sum_{i=k+1}^{p} f_i = \sum_{i=k+1}^{\infty} f_i$$

qui est le reste de la série. On as trivialement, lorsque la série converge (Pour pouvoir définir le reste) :

$$S = S_k + R_k$$

et

$$R_k \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \tilde{0}$$

De plus, comme on a supposé E de dimension finie ici, $\mathcal{L}(E)$ est aussi de dimension finie, donc la convergence ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathcal{L}(E)$.
Nous avons aussi une définition analogue dans le cas d'une suite de matrice.

Propriété 124 *Si B est une base de E et si $A_k = mat_B(f_k)$ alors :*

$$\sum_{i=0}^{k} A_i = mat_B(\sum_{i=0}^{k} f_k)$$

Ceci est du à la linéarité de l'application suivante :

$$\mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(K)$$
$$f \mapsto mat_B(f)$$

De plus $\sum_k f_k$ *converge si et seulement si* $\sum_k A_k$ *converge, et dans ce cas :*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k = mat_B(\sum_{k=0}^{\infty} f_k)$$
$$\sum_{i=k+1}^{\infty} A_i = mat_B(\sum_{i=k+1}^{\infty} f_i)$$

Définition 57 *Si* $\| \|'$ *est une norme quelconque sur* $\mathcal{L}(E)$ *et si* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'endomorphisme de E, on dit que* $\sum_k f_k$ *converge absolument au sens de* $\| \|'$ *si :*

$$\sum_k \| f_k \|' \text{ converge}$$

Nous avons une définition analogue pour les matrices.

Propriété 125 *Si* $\sum_k f_k$ *converge absolument, alors* $\sum_k f_k$ *converge dans* $\mathcal{L}(E)$*. Nous avons la même propriété pour les matrices.*

11.1.1 Exemple : La série géométrique

Propriété 126 *S'il existe une norme sous-multiplicative (Voir le chapitre sur les normes subordonnées)* $\| \|$ *sur* $\mathcal{L}(E)$ *telque* $\| f \| < 1$ *alors* $\sum_k f^k$ *converge*

11.2 Exponentielle d'endomorphisme ou de matrice

11.2.1 Propriétés et définitions

Définition 58 *Si* $f \in \mathcal{L}(E)$*, avec E un K espace vectoriel normé de dimension finie N, avec* $K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, alors* $\sum_n \frac{f^n}{n!}$ *converge dans* $\mathcal{L}(E)$ *et on note :*

$$e^f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^n}{n!}$$

De même, si $A \in \mathcal{M}_N(K)$*, alors* $\sum_n \frac{A^n}{n!}$ *converge et on note :*

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

Propriété 127 *Si* $u \in C^1(I, K)$*, avec I intervalle* $\subset \mathbb{R}$*, alors, avec* $A \in \mathcal{M}_N(K)$ *:*

$$I \xrightarrow{f} \mathcal{M}_N(K)$$
$$t \mapsto e^{u(t)A}$$

est C^1 *sur I et :*

$$\forall t \in I \; f'(t) = u'(t)Ae^{u(t)A}$$
$$= u'(t)e^{u(t)A}A$$

On le démontre en revenant à la définition de l'exponentielle de matrice, et en utilisant le théorème de classe C^1 *sur les séries de fonctions.*

11.3 Applications de l'exponentielle de matrices à la résolution d'un système différentiel linéaire à coefficient constant

Définition 59 *Un système différentielle linéaire est un système du type :*

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

avec les a_{ij} et les b_i des applications données de I dans K=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$.
Les x_j sont des applications inconnu que l'on cherche dans l'ensemble $C^1(I, K)$. On remarque que le nombre d'inconnu est égale au nombre d'équations.
Ce système est dit à coefficients constant lorsque les a_{ij} sont des applications constantes. Le système est dit homogène lorsque les b_i sont toutes des applications nulles.
Dans la suite, on va supposer que le système est à coefficients constants. Notons :

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$$

$$\begin{aligned} B : I &\to K^n \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X : I &\to K^n \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Avec ces notations, on obtient que $x_1, \ldots, x_n$ sont solution sur I du système différentielle précédent si et seulement si :

$$X \in C^1(I, K),\ \forall t \in I\ \frac{dX}{dt} = AX + B(t)$$

Théorème 33 *Nous avons un théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes :*
Soit $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X + B(t)$, avec A et B défini comme précédement, continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, c'est à dire que toutes leurs composantes sont continues sur I. Alors $\forall X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} \in K^n$ et $\forall t_0 \in I$, il existe une unique solution de (S) vérifiant la condition initiale $X(t_0) = X_0$, c'est à dire :

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{01} \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{0n} \end{cases}$$

Corollaire 1 *Sous les hypothèses précédente concernant I (intervalle $\subset \mathbb{R}$) et $A \in C(I, \mathcal{M}_n(K))$, l'ensemble des solutions de (S_0) sur I est a valeur dans K^n est un K espace vectoriel de dimension n.*

Corollaire 2 *Sous les hypothèses ci-dessus concernant I,A et b, l'ensemble des solutions de (S) sur I à valeurs dans K^n est un espace affinie de direction vectorielle (S_0). C'est à dire si u est une solution particuliere de (S) :*

$$Sol_{(S)}(I, K^n) = \left\{U + X,\ X \in Sol_{(S_0)}(I, K^n)\right\}$$

Propriété 128 *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est une matrice indépendante de la variable, alors l'ensemble des solutions du système différentielle homogène à coefficient constante $(S_0) = \dfrac{dX}{dt} = AX$ (l'inconnue $X \in C^1(\mathbb{R}, K^n)$) est l'ensemble des applications (cet ensemble est un K espace vectoriel) :*

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \to K^n \\ &t \mapsto e^{tA}\overrightarrow{C},\ \overrightarrow{C} \in K^n \text{ indépendant de } t \end{aligned}$$

Ce qui, en abrégé, se note :

$$Sol_{(S_0)}(\mathbb{R}, K^n) \left\{t \mapsto e^{tA}\overrightarrow{C},\ \overrightarrow{C} \in K^n\right\}$$

11.4 Propriétés classique de l'exponentielle de Matrice

Propriété 129 *Nous avons les propriétés suivantes :*

→ $e^{0_n} = I_n$

→ $e^{tI_n} = e^t I_n$

→ *Si A et B$\in \mathcal{M}_n(K)$ commutent, alors A,B,e^A, e^B commutent deux à deux.*

→ *Si $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $P \in Gl_n(K)$: $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$*

→ *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension n, si $A = mat_B(f)$ et B une base de E, alors : $e^A = mat_B(e^f)$*

→ *Si $u \in C^1(I, K)$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors :*

$$\begin{aligned} &I \to \mathcal{M}_n(K) \\ &t \mapsto e^{u(t)A} \end{aligned}$$

est C^1 sur I est :

$$\frac{d}{dt}(e^{u(t)A}) = u'(t)Ae^{u(t)A}$$

→ $\forall t \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{M}_n(K)$, $e^{tA} \in Gl_n(K)$ *et* $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$. *En particulier, en prenant le cas ou t=1, on obtient l'expression de l'inverse de e^A.*

Propriété 130 $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(K))^2$ *telle que AB=BA, alors :*

$$e^A e^B = e^{A+B}$$

11.4.1 Calcul de e^A

Considérons le cas simple suivant :

$$A = \lambda I_n + N$$

Avec $\lambda \in K$ et N nilpotente d'indice p ($p \leq n$). On obtient que :

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\lambda I_n + N} \\ &= e^{\lambda} I_n e^N \\ &= I_n e^{\lambda}\left[I_n + \cdots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!}\right] \\ &= e^{\lambda}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{N^k}{k!} \end{aligned}$$

Ceci permet de déterminer e^A dans le cas où p n'est pas trop élevé.

11.5 Résolution de système différentielle à coefficients constant

Pour résoudre un système différentielle à coefficients constant à l'aide des exponentiels de matrices, nous avons besoins de propriétés suivantes :

Propriété 131 *Soit* $\frac{dX}{dt}(t) = A(t)X(t)$ *un système différentiel linéaire homogène avec* $A \in C(I, \mathcal{M}_n(K))$*, et* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Soit* $(X_1, \ldots, X_n)$ *une famille de solutions de ce système, noté* (S_0)*. Nous avons équivalence entre les conditions suivantes :*
$\rightarrow$ $(X_1, \ldots, X_n)$ *est une base de* $Sol_{(S_0)}(I, K^n)$
$\rightarrow$ $\forall t \in I, (X_1(t), \ldots, X_n(t))$ *est une base de* K^n
$\rightarrow$ $\exists t_0$ *tq* $(X_1(t_0), \ldots, X_n(t_0))$ *soit une base de* K^n

Propriété 132 *Etant donnée une famille (libre ou non)* $(X_1, \ldots, X_n)$ *de solution de* (S_0)*, avec* $\forall i \in [1, \ldots, n]$ $X_i(t) \in \mathbb{R}^n$*, on appelle Wronskien de* $(X_1, \ldots, X_n)$ *l'application :*

$$\begin{aligned} &I \rightarrow K \\ &t \mapsto W(X_1, \ldots, X_n)(t) = det_{can}(X_1, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

Les résultats de la propriété précédente peut alors s'énoncer :

$$\begin{aligned} (X_1, \ldots, X_n) \text{ est une base } Sol_{(S_0)}(I, K^n) &\Leftrightarrow \forall t \in I,\ W(X_1, \ldots, X_n)(t) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists t_0 \in I,\ W(X_1, \ldots, X_n)(t_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Définition 60 *Une base de* $Sol_{(S_0)}(I, K^n)$ *est appelé un système fondamental de solution de* (S_0)*. On utilise ce terme dans le cas des systèmes linéaires homogènes.*

Chapitre 12

Compléments sur les séries

12.1 Intégration des séries de fonctions

Théorème 34 *Théorème d'interversion du signe Σ et du signe intégrale.*
Soit $\sum\limits_n u_n$ *une série d'application* $u_n : I \to K$*, avec I un intervalle quelconque, continue par morceaux et convergent simplement sur I. On suppose que chaque* u_n *est intégrale sur I.*
Si $\sum\limits_n \int_I |u_n|$ *converge, alors :*

- $\to$ $\sum\limits_n \int_I u_n$ *converge*
- $\to$ $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$*, supposé continue par morceaux sur I, est intégrable sur I.*
- $\to$ $\int_I S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \int_I u_n$

La dernière conséquence est bien une propriété d'interversion du signe Σ et du signe intégrale.

12.2 Rudiment sur les séries doubles

Définition 61 *Étant donnée un ensemble I, on appelle famille à valeur dans K et indexé par I, et on note* $(u_i)_{i\in I}$*, une application :*

$$\begin{aligned} u : I &\to K \\ i &\to u_i \end{aligned}$$

Soit (u_{ij}) une famille de complexe. (u_{ij}) est une application :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\to K \\ (i,j) &\mapsto u_{ij} \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{cases} u_{ij} = \dfrac{1}{i^2+j^2+1} \\ u_{ij} = \dfrac{x^i}{j},\ x \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \end{cases}$$

Définition 62 *On dira que :*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}$$

existe si et seulement si :

- $\rightarrow$ $\forall i \in \mathbb{N}\ \sum_j u_{ij}$ *converge*
- $\rightarrow$ *En supposant la condition précédente vérifié, et en notant :*

$$S_i = \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}$$

$\sum_i S_i$ *converge.*

Dans ce cas :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} S_i$$

Théorème 35 *Soit (u_{ij}) une famille à valeur dans $\mathbb{C}$. Si :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |u_{ij}|$$

existe, alors :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij},\ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} u_{ij},\ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |u_{ij}|$$

existe et on peut permutter les signes Σ

Chapitre 13

Série entière

13.1 Définitions, rayon de convergence

13.1.1 Défintions

Définition 63 *On appelle série entière une série d'application* $\sum\limits_n u_n$ *où les* u_n *sont des monomes à coefficient réels ou complexe, définis sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, par :*

$$\begin{aligned} u_n : K &\to K \\ t &\mapsto a_n t^n \end{aligned}$$

En général, u_n *est une application d'un corps dans ce même corps.*

13.1.2 Abus de notation

Par abus de notation, car on assimile de faite série d'application et série numérique, on note souvent $\sum\limits_n a_n x^n$, respectivement $\sum\limits_n a_n z^n$, au lieu de $\sum\limits_n u_n$.

13.1.3 Rayon de convergence

Définition 64 *Étant donnée une série entière* $\sum\limits_n a_n.z^n$*, c'est a dire étant donnée une suite* (a_n) *de complexe, on appelle rayon de convergence de cette série entière, noté parfois* $\rho(\sum\limits_n a_n z^n)$ *:*

$$\rho(\sum_n a_n z^n) = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \ / \ (|a_n| r^n) \textit{ soit majorée }\}$$

C'est un ensemble non vide, car il contient toujours r=0.

Propriété 133 *Dans le cas où l'ensemble défini ci-dessus et non majorée, on convient que* $\rho(\sum\limits_n a_n.z^n) = +\infty$

Propriété 134 *Soit* $\sum\limits_n a_n z^n$ *une série entière, avec* (a_n) *suite de complexe, et R =* $\rho(\sum\limits_n a_n z^n)$*.*

→ *Si R =* $+\infty$ *: La série converge simplement dans* $\mathbb{C}$ *et converge normalement sur tout disque ferme* $\overline{B}(0,\alpha)$*, avec* $\alpha \geq 0$*, et même converge normalement sur tout compact inclu dans* $\mathbb{C}$*.*

→ *Si R est un réel > 0 : La série converge sur tout disque ouvert B(0,R). La série converge normalement sur tout disque fermé* $\overline{B}(0,\alpha)$ *inclu dans B(0,R), et même converge normalement sur tout compact inclu dans B(0,R).*

$\rightarrow$ *Si R = 0, la série ne converge que pour z=0.*

Vocabulaire 1 *B(0,R) s'appelle le disque ouvert de convergence de la série entière* $\sum\limits_n a_n z^n$.

13.1.4 Lemme d'Abel

Soit $z_0 \neq 0$. Si $(|a_n||z_0|^n)$ est majorée, alors $\forall \alpha \in [0, z_0[$, la série $\sum\limits_n a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{B}(0, \alpha)$.
On le démontre en introduisant $|z_0|$ dans l'expression de $|a_n z^n|$, puis on utilise les hypothèses.

13.2 Propriétés utilse au calcul du rayon de convergence

Dans tout ce chapitre, (a_n) et (b_n) désigne des suites de compact, et λ désigne un complexe non nuls

Propriété 135 *Nous avons les propriétés suivantes :*
$\rightarrow$ $\rho(\sum\limits_n a_n z^n) = \rho(\sum\limits_n |a_n| z^n)$
$\rightarrow$ $\rho(\sum\limits_n \lambda a_n z^n) = \rho(\sum\limits_n a_n z^n)$
$\rightarrow$ *Si* $z_0 \in \mathbb{C}$, *tq* $\sum\limits_n a_n z_0^n$ *converge, alors* $\rho(\sum\limits_n a_n z^n) \geq |z_0|$. *Il en est de même si la suite* $(a_n z^n)$ *est bornée ou si la suite converge*
$\rightarrow$ *Si* $z_0 \in \mathbb{C}$, *tq* $\sum\limits_n a_n.z_0^n$ *diverge, alors* $\rho(\sum\limits_n a_n.z^n) \leq |z_0|$. *Il en est de meme si la suite* $(a_n.z^n)$ *n'est pas bornée ou si la suite ne tend pas vers 0.*

Propriété 136 *Si* $\forall n \geq n_0$, *on a :*

$$|a_n| \leq |b_n|$$

Alors :

$$\rho(\sum_n a_n z^n) \geq \rho(\sum_n b_n z^n)$$

Propriété 137 *Si on a :*

$$|a_n| \underset{n\rightarrow+\infty}{\sim} |b_n|$$

Alors :

$$\rho(\sum_n a_n z^n) = \rho(\sum_n b_n z^n)$$

13.2.1 Règle de d'Alembert pour les séries entières

Soit $\sum\limits_n a_n z^n$ une série entière.
Si $\forall n \geq n_0 \ | \ a_n \neq 0 \ |$, et si :

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \rightarrow l \in \mathbb{R}_+ + \{+\infty\}$$

Alors :

$$\rho(\sum_n a_n.z^n) = \frac{1}{l}$$

avec les conventions suivantes :

$$l = 0 \Rightarrow \rho(\sum_n a_n.z^n) = +\infty$$

$$l = +\infty \Rightarrow \rho(\sum_n a_n.z^n) = 0$$

13.3 Somme et produit de deux séries entières

13.3.1 Somme de deux séries entières

Propriété 138 *Si* $\sum\limits_n a_n z^n$ *et* $\sum\limits_n b_n z^n$ *converge, alors* $\sum\limits_n (a_n + b_n) z^n$ *converge et nous avons :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Corollaire 1 *Si :*

$$\begin{cases} R_A = \rho(\sum_n a_n z^n) \\ R_B = \rho(\sum_n b_n z^n) \\ R_S = \rho(\sum_n (a_n + b_n) z^n) \end{cases}$$

Alors on obtient que :

$$R_S \geq min(R_A, R_B)$$

De plus, si $R_A \neq R_B$*, alors :*

$$R_S = min(R_A, R_B)$$

13.3.2 Produit de deux séries entières

Propriété 139 *Si* $\sum\limits_n a_n$ *et* $\sum\limits_n b_n$ *sont deux séries numériques, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou dans* $\mathbb{C}$*, absolument convergente, et si :*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Alors :

- $\rightarrow$ $\sum\limits_n c_n$ *est absolument convergente.*
- $\rightarrow$ *Nous avons l'égalité suivante :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

On remarquera que dans l'expression de c_n*, on somme à partir de 0. Si la suite* (a_n) *ou* (b_n) *n'est définie qu'a partir d'un certain rang on lui ajoute des termes nuls.*

Propriété 140 *Si* $z \in \mathbb{C}$ *est telque* $\sum\limits_n a_n z^n$ *et* $\sum\limits_n b_n z^n$ *converge absolument, alors :*

- $\rightarrow$ $\sum\limits_n c_n z^n$ *est absolument convergente.*
- $\rightarrow$ *Nous avons l'égalité suivante :*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Propriété 141 ***Définition 65*** *La suite* (c_n) *défini par :*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

est parfois appelé produit de cauchy des suites (a_n) *et* (b_n)

13.3.3 Propriétés sur les exponentiels complexes

Propriété 142 *Soit z et z′ deux complexes. Nous avons la propriété suivante :*

$$e^z e^{z'} = e^{z+z'}$$

On le démontre en utilisant le produit de cauchy sur les deux séries entière définissant e^z et $e^{z'}$.

Corollaire 2 *D'après la propriété précédente, on obtient que :*

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C}\ e^z \neq 0 \textit{ et } (e^z)^{-1} = e^{-z} \\ \forall z \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ (e^z)^n = e^{nz} \end{cases}$$

13.3.4 Continuité

Propriété 143 *Si $R = \rho(\sum\limits_n a_n z^n)$, alors :*

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur B(0,R)

13.4 Classe C^∞

Soit $\sum\limits_n a_n.x^n$ une série entière de rayon R>0 (on peut avoir $R = \infty$).
Alors :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n.x^n$$

est défini au moins sur $]-R, R[$. Cet intervalle est appelé intervalle de convergence.

Propriété 144 *Nous avons les propriétés suivantes :*

$$\begin{cases} \rho(\sum_n n a_n x^{n-1}) = \rho(\sum_n a_n x^n) \\ \rho(\sum_n (n+1) a_{n+1} x^n) = \rho(\sum_n a_n x^n) \end{cases}$$

On observe donc que la dérivation termes à termes ne modifie par le rayon de convergence d'une série entière.

Théorème 36 *Soit $\sum\limits_n a_n x^n$ une série entière de rayon R > 0 (On peut avoir $R = +\infty$).*
Alors sa somme :

$$\begin{aligned} S :] -R, R[&\to K \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

est C^∞ sur l'intervalle de convergence, et les dérivés $S^{(k)}$ s'obtiennent à l'aide d'une dérivation terme à terme :

$$\forall x \in]-R, R[,\ S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n.x^{n-p}$$

On le démontre par récurrence sur p.

Corollaire 3 *On obtient le corrolaire suivant :*

$$\forall x \in]-R, R[\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Corollaire 4 *Soient* $\sum\limits_{n} a_n x^n$ *et* $\sum\limits_{n} b_n x^n$ *deux séries entière de rayon* R_a *et* R_b *strictement positif. Si :*

$$\forall x \in]-r, r[\ \sum_n a_n x^n = \sum_n b_n x^n$$

avec :

$$0 < r \leq min(R_a, R_b)$$

Alors, on en déduit que :

$$a_n = b_n$$

La conclusion reste valable en supposant seulement que l'égalité des sommes est vérifié pour tout x appartenant à un intervalle de longeur > 0.

On peut aussi exprimer ceci de la façon suivante : Si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ *pour tout* $x \in]-r, r[$*, avec :*

$$0 < r < R_a$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n = 0$$

Corollaire 5 *Si* $\sum\limits_{n} a_n.x^n$ *est une série entière de rayon R > 0, alors :*

$$\rho(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}) = R$$

Et :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

est une primitive de

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

sur $]-R, R[$

13.5 Fonctions développable en série entière

Dans ce chapitre, on se limite à la variable réelle.

Définition 66 *Soit f fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$*.*
On dit que f est développable en série entière en x_0*, ou au voisinage de* x_0*, si il existe un r > 0 et une série entière* $\sum\limits_{n} a_n.x^n$*, c'est à dire* $\exists (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, de rayon* $R \geq r$ *tq :*

$$\forall x \in]-r, r[\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.(x - x_0)^n$$

Propriété 145 *Soit f une fonction décomposable en série entière en* x_0*. Son développement est le développement de Taylor en* x_0*, c'est à dire :*

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Corollaire 6 *On peut obtenir un développement limité en* x_0 *de f, à l'ordre n, en tronquant le développement en série entière.*

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$$

13.5.1 Quelques développpement en série entière classique

Nous avons les développement classique suivant :
$\rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$\rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}$ tq $|z| < 1$:

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k . z^k$$

$\rightarrow$ $\forall x \in [-1, 1[$:

$$ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

$\rightarrow$ $\forall x \in]-1, 1]$:

$$ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$\rightarrow$ $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$e^z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$ch(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$sh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$\rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$\rightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}, \forall x \in]-1, 1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} a_k . x^k$$

avec :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_k = \dfrac{\alpha.(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} \end{cases}$$

13.5.2 Développement en série entière des fractions rationnelles

Propriété 146 *Soit f une fraction rationnelle, f =* $\frac{P}{Q}$*, avec* $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$*, premiers entre eux. Si 0 n'est pas un pôle de f, alors f est un développable en série entière en 0 sur B(0,r), avec :*

$$r = \min_{\alpha \in Z(Q)} |\alpha|$$

De plus, la série entière en question, qui est la série de Taylor de f, est de rayon r.

13.6 Extension à $\mathbb{C}$ des fonctions trigonométrique

Nous avons les développement en série entière classique pour les fonctions exp, sh, ch dans $\mathbb{C}$ et de cos et sin dans $\mathbb{R}$. En observant que les rayons de convergence de ces séries sont infini, on peut donc obtenir les fonctions cos et sin dans $\mathbb{C}$, en considérent le développement en série entière identique, mais avec une variable complexe.

13.6.1 Lien entre trigonométrie circulaire et trigonométrie hyperbolique

On montre, en utilisant le développement en série entière, que $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$ch(iz) = cos(z)$$

$$sh(iz) = i.sin(z)$$

En remplacant z par iz, on obtient :

$$cos(iz) = ch(z)$$

$$sin(iz) = i.sh(z)$$

Chapitre 14

Série de Fourier

14.1 Définitions

Dans tout ce chapitre, les fonctions considérées seront des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (fonctions d'une variable réelle x, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 67 *Une fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite T-périodique (T réel > 0) lorsque :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x+T) = f(x)$$

(On suppose ici f définie sur tout $\mathbb{R}$). On a alors trivialement :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x+nT) = f(x)$$

Une fonction T-périodique est donc aussi nT-périodique, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 68 *On appelle polynôme trigonométrique de degré $\leq$ N (N $\in \mathbb{N}$), une fonction du type :*

$$\begin{aligned} &P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ &x \mapsto P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(n\omega w) + b_n \sin(n\omega x)] \end{aligned}$$

ou les a_n et les b_n sont des nombres (réels ou complexes) données. ($b_0 = 0$) et ω un réel > 0 donné.
Le polynôme trigo est dit de degré N si $a_N \neq 0$ ou $b_N \neq 0$.
Le polynôme trigo P est T-périodique, avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Propriété 147 *Si on utilise les relations d'Euler :*

$$\begin{cases} \cos(n\omega x) = \frac{1}{2}(e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}) \\ \sin(n\omega x) = \frac{1}{2i}(e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}) \end{cases}$$

On obtient facilement :

$$P(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

où :

$$\begin{cases} c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \text{ pour } n \in [|0, N|] \\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \text{ pour } n \in [|0, N|] \end{cases}$$

Définition 69 *On appelle série trigonométrique une série de fonctions :* $\sum_n u_n$ *définies pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *par :*

$$u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$
$$x \mapsto u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}$$

et, pour n=0, par :

$$u_0(x) = \frac{a_0}{2} = c_0$$

La somme partielle d'ordre N d'une telle série n'est donc rien d'autre qu'un polynôme trigonométrique :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x}$$

14.2 Condition suffisante de convergence des Séries Trigonométriques

Propriété 148 *Si les séries* $\sum_n |a_n|$ *et* $\sum_n |b_n|$ *convergent, alors la série trigo :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_n [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

converge normalement sur $\mathbb{R}$*.*

14.3 Rappel : Fonctions de Classe C^k par morceaux

Définition 70 *Une fonction f :* $[a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *(ou même un espace vectoriel normé E) est dite* C^k *par morceaux sur [a,b] s'il existe une subdivision finie de [a,b] :* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ *et des fonctions* $f_i \in C^k([x_i, x_{i+1}], \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C})$, $0 \leq i \leq p-1$ *tq :*

$$\forall i \in [|0, p-1|] f_{|]x_i, x_{i+1}[} = f_i$$

Autrement dit si la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ *peut être prolongée en une fonction de classe* C^k *sur* $[x_i, x_{i+1}]$*.*

Définition 71 *Une fonction f :* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est dite* C^k *par morceaux sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *(non nécessairement compact) si sa restriction à tout intervalle compact [a,b] inclus dans I est* C^k *par morceaux sur [a,b] (comme nous venons de le définir précédement)*

14.3.1 Fonctions continues par morceaux

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue par morceaux sur [a,b] si et seulement si :
a) f a au plus un nombre fini de points de discontinuité sur [a,b].
b) ces discontinuités sont des discontinuités de 1^{ere} espèce, c'est à dire des points de discontinuité x_i tq les limites à droite et à gauche en x_i existent et soient finies (évidement, si $x_i = a$ on ne considère que la limite à droite et si $x_i = b$ on ne considère que la limite à gauche)
On note alors :

$$f(x_i^+) = \lim_{x \to x_i, x > x_i} f(x)$$

et

$$f(x_i^-) = \lim_{x \to x_i, x < x_i} f(x)$$

Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Si f est continue par morceaux sur [a,b] on définit $\int_a^b f(t)dt$ par :
$\int_a^b f(t)dt = \displaystyle\sum_{i=0}^{p-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i(t)dt$ (avec les notations précédentes pour x_i et f_i). Ce qui ramène à l'intégrale de fonctions continues.
(Dans le cas où on aurait défini l'intégrale d'une autre manière, ceci n'est plus une définition mais une propriété)

14.3.2 Fonctions de classe C^1 par morceaux

f : [a,b] $\rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est C^1 par morceaux sur [a,b] si et seulement si :
a) f admet au plus un nombre fini de discontinuités : $x_0 < x_1 < \cdots < x_p$, toutes de 1^{ere} espèce.
b) f est de classe C^1 sur [a,b] - $\{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$.
c) $\lim\limits_{x \to x_i, x > x_i} \frac{f(x) - f(x_i^+)}{x - x_i}$ et $\lim\limits_{x \to x_i, x < x_i} \frac{f(x) - f(x_i^-)}{x - x_i}$ existent et sont finies ($0 \leq i \leq p$) (avec l'exception habituelle si $x_0 = a$ ou $x_p = b$). On note alors ces limites respectivement : $f'(x_i^+)$ et $f'(x_i^-)$.
(Elles sont appelées $\frac{1}{2}$ dérivées à droite et à gauche en x_i).

14.4 Développement des Fonctions périodiques en série de Fourier, Théorème de Dirichlet

14.4.1 La somme d'une série trigonométrique est périodique

Considérons la série trigonométrique $\sum\limits_n u_n(x)$ avec : $u_0(x) = \dfrac{a_0}{2}$, $u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Si cette série converge en x, alors elle converge aussi en x + T ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) et la somme $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ vérifie : $S(x+T) = S(x)$. Autrement dit :

Propriété 149 *Le domaine de convergence d'une série trigonométrique est invariant par la translation $x \mapsto x + T$ (et donc aussi par $x \mapsto x + kT,\ k \in \mathbb{Z}$) et sa somme est une fonction T-périodique sur ce domaine.*

14.4.2 Développement d'une Fonction périodique en série trigonométrique

On se pose ici le problème réciproque de la propriété précédente :
Étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, existe-t-il des a_n et des $b_n \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tq :

$$\begin{cases} \text{La série } \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \text{ converge} \\ f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)],\ \forall x \in D_f \end{cases} \quad ?$$

D'après la propriété précédente, cela implique que f soit T-périodique (autrement dit, le problème ne se pose que pour des fonctions périodiques).

Définition 72 *On dit qu'une fonction T-périodique f :$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est développable en série trigonométrique sur un domaine D $\subset \mathbb{R}$, s'il existe des a_n et des b_n (respectivement des c_n) $\in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tq :*

f soit, sur D, la somme de la série trigonométrique $\sum\limits_{n} u_n$ *avec, toujours :*

$$\begin{cases} u_0(x) = \dfrac{a_0}{2} \\ u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x), \ \textit{si } n \in \mathbb{N}^*. \\ \qquad\ = c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \end{cases}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \forall x \in D \ \ f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \end{aligned}$$

14.4.3 Relation entre la somme d'une série trigo et ses coefficients en cas de convergence uniforme

Propriété 150 *Si* $f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *et si la série de fonctions du second membre converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *alors les coefficients* a_n, b_n *sont donnée par :*

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt \ , \forall n \in \mathbb{N} \\ \\ b_n = \dfrac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt \ , \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(y compris n=0, ceci explique pourquoi on a noté $\dfrac{a_0}{2}$ *le coefficient constant)*

14.4.4 Coefficients de Fourier et Série de Fourier d'une fonction périodique continue par morceaux

Les intégrales qui interviennent dans les formules précédentes : $\int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt$, $\int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt$, $\int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$ peuvent, a priori, être définies pour toute fonction f continue par morceaux sur [0,T]

Définition 73 *Si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$, *on définit les coefficients de Fourier de f par :*

$$\begin{cases} a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos(n\omega t) dt, \ n \in \mathbb{N} \textit{ (y compris pour n=0)} \\ b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin(n\omega t) dt, \ n \in \mathbb{N} \\ c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-in\omega t} dt, \ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$c_n(f)$ *est parfois également noté* $\widehat{f}(n)$.

Définition 74 *On appelle série de Fourier de la fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *T-périodique et continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$, *la série trigonométrique :* $\sum\limits_{n} u_n$, *avec :*

$$u_0(x) = \frac{a_0(f)}{2} = c_0(f)$$

$$u_n(x) = a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x) = c_n(f) e^{in\omega x} + c_{-n}(f) e^{-in\omega x}$$

Propriété 151 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *une fonction T-périodique continue par morceaux. Si f est développable en une série trigonométrique uniformement convergente sur* $\mathbb{R}$ *(ce qui équivaut, rappelons le, à : uniformement convergente sur un intervalle compact d'amplitude T), alors cette série est la série de Fourier de f.*

14.4.5 Théorème de Dirichlet

Propriété 152 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction T-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ (ou, ce qui est équivalent, C^1 par morceaux sur un intervalle compact d'amplitude T).*
Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)] = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

En particulier, si f est continue en x, la somme de la série de Fourier en x vaut f(x) (autrement dit, en tout point où f est continue il y a convergence simple vers f de sa série de Fourier)

14.4.6 Remarque : Coefficients de Fourier des Fonctions périodiques paires et impaires

Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction T-périodique continue par morceaux. On sait que, pour calculer les coefficients de Fourier de f, on peut intégrer sur n'importe quel intervalle d'amplitude T. Donc, si f est paire :

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t)dt$$

La fonction intégrée : $t \to f(t)\sin(n\omega t)$ est impaire et on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0, donc $b_n(f) = 0$ (le démontrer en détail par un petit changement de variable)
De même, si f est impaire, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n(f) = 0$$

Dans le premier cas (f paire), on dit que la série de Fourier de f est une série de cosinus. Dans le second cas (f impaire), que c'est une série de sinus

14.5 Le Théorème de Weierstrass Trigonométrique

Théorème 37 *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une fonction 2π périodique continue sur $\mathbb{R}$.*
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ polynôme trigonométrique tq $\| f - P \|_{\underset{\mathbb{R}}{\infty}} \leq \varepsilon$

14.6 Convergence en Moyenne Quadratique des Séries de Fourier

Étant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, T-périodique et continue par morceaux, on définit, comme d'habitude, la somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\omega x}$$

Il s'agit, dans cette section, d'étudier la convergence de la suite de fonctions S_N vers f au sens de la $\frac{1}{2}$ norme hermitienne :

$$\| g \|_2 = \left(\frac{1}{T}\int_{[T]} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

On cherche à obtenir des résultats pour des fonctions continues par morceaux, donc dans un cadre plus large que celui du Théorème de Dirichlet où la fonction f était supposé C^1 par morceaux.

14.6.1 Définitions, Notations

E = $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions T-périodiques et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ (il est immédiat de vérifier que cet ensemble E est stable par les opérations + et λ., et même par produit : C'est non seulement un $\mathbb{C}$ espace vectoriel mais aussi une $\mathbb{C}$-algèbre).

C = l'ensemble des fonctions T-périodiques et continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. C'est un sous espace vectoriel de E.

E_N = l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré $\leq N$, c'est à dire des fonctions du type :

$$x \mapsto P(x) = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e^{in\omega x},\ \alpha_n \in \mathbb{C}$$

Nous noterons aussi e_n la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\stackrel{e_n}{\to} \mathbb{C} \\ x &\mapsto e^{in\omega x} \end{aligned}$$

Si $P \in E_N$:

$$P = \sum_{n=-N}^{N} \alpha_n e_n$$

Autrement dit :

$$E_N = \text{Vect}(e_{-N}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_N)\ \ (nb:\ e_0 = \tilde{1})$$

Contrairement aux sous-espaces précédents, E_N est de dimension finie.

On a :

$$E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_N \subset \cdots \subset C \subset E$$

Avec :

$$\begin{cases} E_0, \ldots, E_N \text{ sous espaces de dimension finie} \\ C, E \text{ espaces de dimension infinie} \end{cases}$$

14.7 Produit scalaire Hermitien

Pour tout couple d'éléments $(f, g) \in E \times E$, on peut définir :

$$< f|g >= \frac{1}{T} \int_{[T]} \overline{f(t)} g(t) dt$$

(car $\overline{f}$g est continue par morceaux).
Mais cette formule ne définit pas un produit scalaire sur E : <f|f>=0 n'implique pas nécessairement : $f = \tilde{0}$ (la forme sesquilinéaire (f,g)$\mapsto$<f|g> n'est pas "définie" : donner un contre-exemple).
De même :

$$\| f \| = \sqrt{< f|f >} = \left(\frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ne définit pas une norme sur E. On a bien : $\| \tilde{0} \| = 0$, $\| \lambda f \| = |\lambda| \ \| f \|$, $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ mais pas : $\| f \| = 0 \Rightarrow f = \tilde{0}$. On dit que $\| \ \|$ est une semi-norme sur E.

Pour obtenir un produit scalaire hermitien et une norme hermitienne par ces formules, il faut se restreindre à un sous-espace de E, par exemple C.

Propriété 153 *La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de C.*
La famille $(e_n)_{n \in [|-N, N|]}$ est une base orthonormée de E_N

Propriété 154

$$\forall f \in E\ c_n(f) =< e_n|f >$$

14.7.1 S_N est la meilleurs approximation quadratique de $f \in E$ parmi les polynômes trigonométriques de degré $\leq N$

Soit $f \in E$ (une fonction T-périodique continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$).
On rappelle que :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f(t)e^{-in\omega t}dt =< e_n|f >$$

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{in\omega x} \Leftrightarrow S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e_n \Leftrightarrow S_N = \sum_{n=-N}^{N} < e_n|f > e_n$$

Théorème 38 *$\forall f \in E,\ \| f - S_N \| = \inf_{P \in E_N} \| f - P \|$ et S_N est le seul élement de E_N vérifiant cette condition.*

Autrement dit, S_N réalise la meilleure approximation de f au sens de la $\frac{1}{2}$ norme quadratique $\| \|$ par un polynôme trigonométrique de degré $\leq N$ et, en outre :

$$[\| f - Q \| = \inf_{P \in E_N} \| f - P \| \text{ et } Q \in S_N] \Rightarrow Q = S_N$$

ou encore :

$$[\| f - Q \| = \| f - S_N \| \text{ et } Q \in E_N] \Rightarrow Q = S_N$$

14.7.2 Inégalité de Bessel

$$\forall f \in E \ \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \leq \frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2 dt$$

Corollaire *$\forall f \in E$ (f T-périodique continue par morceaux), la famille $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est de carré sommable. Cela signifie que la suite : $N \mapsto \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$ converge, et on note sa limite :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

(Cette limite est appelée "somme" de la famille $(|c_n|^2)_{n\in\mathbb{Z}}$)

14.8 Théorème de Parseval

$$\begin{aligned}
E_N \subset E_{N+1} &\Rightarrow \{\| f - P \|,\ P \in E_N\} \subset \{\| f - P \|,\ P \in E_{N+1}\} \subset \mathbb{R}^+ \\
&\Rightarrow \inf\{\| f - P \|,\ P \in E_{N+1}\} \leq \inf\{\| f - P \|,\ P \in E_N\} \\
&\text{(quand un ensemble augmente, son inf diminue, au sens large)} \\
&\Rightarrow \| f - S_{N+1} \| \leq \| f - S_N \|
\end{aligned}$$

Autrement dit : La suite $n \mapsto \| f - S_N \|$ est décroissante.

L'ensemble $\mathcal{P} = \bigcup_{N\in\mathbb{N}} E_N$ est l'ensemble des polynomes trigonométriques :

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik\omega x}$$

14.8.1 Enoncé du Théorème de Parseval

*$\forall f \in E$ (c'est à dire pour toute fonction f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T périodique et continue par morceaux)
$\| f - S_N \| \to 0$ quand $N \to \infty$ (autrement dit : $S_N \to f$ au sens de la norme quadratique) avec : S_N la somme partielle d'ordre N de la série de Fourier de f.*

14.9 Corollaire : Identité de Parseval

$$\forall f \in E \text{ (fonction T-périodique continue par morceaux), } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2 dt$$

Rappelons que, par définition :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2$$

*et que cette limite est finie d'après l'inégalité de Bessel (cf page 97).
L'identité de Parseval peut également s'énoncer à l'aide des $a_n(f)$ et des $b_n(f)$: $\forall f \in E$ (fonction T-périodique continue par mor
$|b_n(f)|^2$) converge et*

$$\frac{1}{4}|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{T}\int_{[T]} |f(t)|^2 dt$$

L'équivalence entre cette version et la précédente résulte des relations entre les $a_n(f), b_n(f)$ et $c_n(f)$ rappelées précédement

14.10 Analyse en Fréquence des fonctions périodiques continues par morceaux

Soient, tout d'abord, f et g deux fonctions T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux. Il résulte du Théorème de Dirichlet que si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f) = c_n(g)$ ou, ce qui revient au même :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_n(f) = a_n(g) \\ b_n(f) = b_n(g) \end{cases}$$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ f(x^+) + f(x^-) = g(x^+) + g(x^-)$$

et, en particulier : f(x) = g(x) en tout point $x \in \mathbb{R}$ où f et g sont toutes deux continues.
En résumé : deux fonctions T-périodiques C^1 par morceaux qui ont les mêmes coefficients de Fourier coïncident sauf, peut-être, en leurs points de discontinuité (qui, par définition d'une fonction C^1 par morceaux sur un intervalle, sont en nombre fini sur tout intervalle compact $\subset \mathbb{R}$).

Le Théorème de Parseval permet d'étendre ce résultat aux fonctions T-périodiques qui sont seulement continues par morceaux. Soient f et g deux telles fonctions vérifiant : $\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f) = c_n(g)$.

Propriété 155 *Si f et g sont deux fonctions T-périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, tq :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f) = c_n(g)$$

alors f=g.
Variante *: Si f est une fonction T-périodique continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ tq : $\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = 0$, alors $f = \tilde{0}$.*

14.11 Relation entre les coefficients de Fourier de f et de $f^{(p)}$

14.11.1 Généralisation du Théorème d'intégration par Parties

Si u et v sont deux fonctions $\in C^1([a,b],\mathbb{C})$ nous savons que :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

En fait, cette formule reste vraie si les fonctions u et v sont continues et seulement C^1 par morceaux sur [a,b].
Notons d'abord que les intégrales $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont tourjours bien définies car les intégrands u'v et uv' sont continus par morceaux.

14.11.2 Relation entre les coefficients de Fourier et ceux de f'

Propriété 156 *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est T périodique continue, et C^1 par morceaux, alors :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f') = in\omega c_n(f) \text{ (en particulier : } c_0(f') = 0)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_n(f') = n\omega b_n(f) \text{ (en particulier : } a_0(f') = 0) \\ b_n(f') = -n\omega a_n(f) \end{cases}$$

Propriété 157 *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est T périodique C^{p-1} et C^p par morceaux. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ c_n(f^{(p)}) = (in\omega)^p c_n(f)$$

14.11.3 Deuxième application : Convergence Normale de la série de Fourier

Théorème 39 *Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ une fonction T-périodique C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.*
Alors sa série de Fourier converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$. Plus précisement : les séries $\sum|a_n|, \sum|b_n|, \sum|c_n|, \sum|c_{-n}|$ sont convergentes

Quatrième partie

Équations différentielles

Chapitre 15

Équations différentielles

15.1 Équations différentielle linéaire du 1^{er} ordre

Définition 75 *Une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre est une équation du type :*

$$\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t) \ (E)$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in C(I, K), \ I \text{ Intervalle } \subset \mathbb{R} \\ y \in C^1(I, K) \text{ est une application inconnue} \end{cases}$$

On dit que (E) est résolue, par rapport à y, sur I lorsque α ne s'annule par sur I. Dans ce cas :

$$(E) \Leftrightarrow y' + a(t)y = b(t)$$

Définition 76 *On appelle équation homogène associé à (E), ou équation sans second membre, noté (E_0) :*

$$y' + a(t)y = 0$$

Théorème 40 *Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire du première ordre :*
Avec les notations et hypothèses précédentes, si (E) est résolue sur I, alors :

$$\forall t_0 \in I \ \forall y_0 \in K, \ \exists! y \in Sol(E) \ tq \ y(t_0) = y_0$$

Corollaire 3 *Toujours avec les mêmes notation et hypothèses :*
→ *Sol(E_0) est un K espace vectoriel de dimension 1*
→ *Sol(E) est un K espace affine de direction Sol(E_0)*
On peut écrire celà sous la forme : Si u est une solution particulière non nulle de E_0, l'équation homogène, sur I, alors Sol(E_0) = Vect(u) et si v est une solution particulière de E sur I, on obtient que :

$$\begin{aligned} Sol(E) &= v + Sol(E_0) \\ &= v + Vect(u) \end{aligned}$$

15.2 Equations différentielle linéaire du second ordre

Définition 77 *Une équation différentielle linéaire du 2^{nd} ordre est une équation du type :*

$$\alpha(t)y'' + \beta(t)y' + \gamma(t)y = \delta(t) \ (E)$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma, \delta \in C(I, K), \ I \text{ Intervalle} \subset \mathbb{R} \\ y \in C^2(I, K) \text{ est une application inconnue} \end{cases}$$

On dit que (E) est résolue, par rapport à y, sur I lorsque α ne s'annule par sur I. Dans ce cas :

$$(E) \Leftrightarrow y'' + a(t)y' + b(t)y = h(t)$$

Théorème 41 *Sous les hypothèses précédent, en particulier le fait que (E) est résolue sur I, alors,* $\forall t_0 \in I,\ \forall (y_0, y_0') \in K^2, \exists! y \in Sol(E)$ *tq :*

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

Corollaire 4 *Sous les hypothèses précédentes :*

$$\begin{cases} Sol(E_0) = \text{ K espace vectoriel de dimension 2} \\ Sol(E) = \text{ K espace affine de direction vectoriel } Sol(E_0) \end{cases}$$

15.2.1 Cas Particuliers

Considérons une équation différentielle linéaire de 2^{nd} ordre à coefficiant constant :

$$y'' + ay' + by = h(t)\ (E)$$

$$\begin{cases} \text{a et b sont des constantes indépendente de la variable du corps K} \\ h \in C(I, K) \end{cases}$$

Dans ce cas, on résout l'équation caractéristique associé :

$$r^2 + ar + b = 0$$

Si K = $\mathbb{C}$

Si l'équation caractérisitique a deux solutions Notons r_1, r_2 ces deux solutions disctinct.

$$Sol(E_0) = Vect(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$$

Si l'équation caractérisitique a racine double Notons r cette solution :

$$Sol(E_0) = Vect(t \mapsto te^{rt}, t \mapsto e^{rt})$$

Si K = $\mathbb{R}$

Si l'équation caractérisitique a deux solutions Notons r_1, r_2 ces deux solutions disctinct.

$$Sol(E_0) = Vect(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t})$$

Si l'équation caractérisitique a racine double Notons r cette solution :

$$Sol(E_0) = Vect(t \mapsto te^{rt}, t \mapsto e^{rt})$$

Si l'équation caractéristique à deux racines non réelles Pour obtenir ce résultat, on utilise la propriété suivantes :

Propriété 158 *L'ensemble des solutions complexe de* (E_0) *est un* $\mathbb{C}$ *espace vectoriel. Il est donc stable par combinaison linéaire.*

On se place dans le cas complexe pour résoudre, puis on pose :

$$r_1 = \alpha + i\beta$$

$$r_2 = \alpha - i\beta$$

On résoud en prenant la partie réelle et la partie imaginaire (cf propriété précédente)

$$Sol(E_0) = Vect(t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t))$$

15.2.2 Solutions de (E)

Si l'on possède une solution particulier de (E_0), on peut résoudre, si cette solution ne s'annule pas sur I, completement l'équation (E) par la méthode de variation de la constante.

15.2.3 Wronskrien

Soit u et v deux solutions d'une équation différentielle linéaire du 2^{nd} (vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz), on détermine si le couple (u,v) est libre (donc une base) en utilisant le Wronskien.

Définition 78 *Soient u et v deux applications* $\in C^2(I,K)$. *On appelle Wronskien du couple (u,v) et on note W(u,v) l'application* $\in C^1(I,K)$ *suivante :*

$$\begin{aligned} &I \to K \\ &t \mapsto W(u,v)(t) = det_{can}\left(\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Propriété 159 *Soit (u,v) un couple de solution* $\in Sol_{I,K}(E_0)$ *avec* (E_0) *l'équation différentielle homogène d'ordre 2, vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz. Nous avons les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} (u,v) \text{ est libre } &\Leftrightarrow (u,v) \text{ est une base de } Sol_{I,K}(E_0) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in I\ W(u,v)(t) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists t \in I\ W(u,v)(t) \neq 0 \end{aligned}$$

15.3 Équations différentielle (non linéaire) du 1^{er} ordre, résolue

Définition 79 *Un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *est défini par :*

$$(\mathcal{U} \text{ est un ouvert }) \Leftrightarrow (\forall M \in \mathcal{U},\ \exists r > 0\ tq\ B(M,r) \subset \mathcal{U})$$

Avec :

$$B(M,r) = \left\{ P \in \mathbb{R}^2 / \parallel \overrightarrow{MP} \parallel < r \right\}$$

Le fait que $\mathcal{U}$ *soit ouvert ne dépend pas de la norme choisie, car toutes les normes sont équivalente en dimension finies.*
Dans le cas de la norme infinie, la boule de rayon r est un carrée de coté 2r.

Cette équation est une équation du type :

$$y' = f(y,t)$$

avec f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$.

Définition 80 *Une solution de (E) est une application* $y \in C^1(I,\mathbb{R})$, *avec I intervalle de* $\mathbb{R}$ *telle que :*

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ (t,y(t)) \in \mathcal{U} \text{ (Cette condition est requise pour pouvoir définir } f(t,y(t))) \\ \forall t \in I,\ y'(t) = f(t,y(t)) \end{cases}$$

Définition 81 *Une solution y est dite maximale si on ne peut pas la prolonger en une solution de (E) sur un intervalle* $I' \supsetneq I$.
C'est à dire qu'il n'existe pas de solution de (E) sur $I' \supsetneq I$ *telque :*

$$y = z_{|I}$$

Théorème 42 *Théorème de Cauchy-Lipshitz pour les équations différentielles (non linéaire) du 1^{er} ordre résolue.*
Si $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\forall (t_0, y_0) \in \mathcal{U}$, l'équation (E) : y' = f(t,y) admet une solution maximale et une seule, noté $y \in C^1(I, \mathbb{R})$, avec I un intervalle $\ni t_0$, telque :

$$y(t_0) = y_0$$

De plus, pour une telle solution maximale, I est ouvert.
Si $z \in C^1(J, \mathbb{R})$ est une solution de (E) sur $J \ni t_0$ vérifiant z(t_0) = y_0, alors :

$$\begin{cases} J \subset I \\ z = y_{|J} \end{cases}$$

Autrement dit, toutes solutions de (E) se prolonge en une unique solution maximale. Cependant, ce théorème reste muet sur l'intervalle de définition de la solution maximale (dépendante des conditions initiales).

Corollaire 5 *Si z_1 et z_2 sont des solutions de (E) sur des intervalles J_1 et J_2 contenant t_0 et si :*

$$z_1(t_0) = z_2(t_0)$$

Alors :

$$z_1|J_1 \wedge J_2 = z_2|J_1 \wedge J_2$$

15.3.1 Équation à variable séparable

Définition 82 *C'est une équation différentielle du 1^{er} ordre équivalente à une équation du type :*

$$f(y)y' = g(t)\ (E)$$

Avec f et g des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si I est un intervalle sur lequel f ne s'annulent pas :

$$(E) \Leftrightarrow y' = \frac{g(t)}{f(y)} = F(t, y)$$

Si f est continue sur I, et ne s'annule pas sur I, et si g est continue sur $J \subset \mathbb{R}$, alors F précédement définie est continue sur $J \times I$. On le démontre à l'aide de fonctions composées.

15.3.2 Énoncé simplifié du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielle du 1^{er} ordre autonomes

Définition 83 *Une équation différentielle est dites autonome si elle est indépendente de t. C'est à dire si c'est une équation du type :*

$$y' = f(y)\ (E)$$

Si $f \in C^1(J, \mathbb{R})$, avec J intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall y_0 \in J$, il existe une solution maximale et une seule de (E), noté $y \in C^1(I, \mathbb{R})$ telle que $y(t_0) = y_0$.
De plus, l'intervalle de définition d'une telle solution maximale est un ouvert $\ni t_0$.
Toute solution z de (E) sur un intervalle $I' \in I$ vérifiant la même condition initiale est la restriction sur I' de y.

Corollaire 6 *Si z_1 et z_2 sont deux solutions de (E) sur des intervalles J_1 et J_2, vérfiant une même condition initiale en $t_0 \in J_1 \cap J_2$, alors z_1 et z_2 coincident sur $J_1 \cap J_2$*

Remarque 5 *$y' = f(y)$ est un cas particulier de y' = F(t,y) avec :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (t, y) &\mapsto f(y) \end{aligned}$$

On peut donc appliquer directement le théorème de Cauchy-Lipschitz (non-linéaire) du 1^{er} ordre avec pour ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times J$.

15.4 Équation différentielle (non linéaire) du 2^{nd} ordre, résolue

C'est une équation du type :

$$y'' = f(t, y, y')\ (E)$$

Théorème 43 *Théorème de Cauchy-Lipschitz pour une équation différentielle (non linéaire) du 2^{nd} ordre. Si f $\in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, avec $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors : $\forall (t_0, y_0, y_0') \in \mathcal{U}$, il existe une unique solution maximale de (E), notée $y \in C^2(I, \mathbb{R})$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$, c'est à dire que :*

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ (t, y(t), y'(t)) \in \mathcal{U} \\ \forall t \in I,\ y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \end{cases}$$

Vérifiant les conditions initiale suivante :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases}$$

De plus, l'intervalle I de définition d'une telle solution maximale est ouvert.
Toute solution z de (E) sur un intervalle $J \ni t_0$ et vérifiant les mêmes conditions initiales est la restrictions de y sur J.

$$\begin{cases} J \subset I \\ \forall t \in J\ z(t) = y(t) \end{cases}$$

Corollaire 7 *Si deux solutions z_1 et z_2 de (E) sur J_1 et J_2 vérifiant la même condition initiale en t_0, alors z_1 et z_2 coincident sur $J_1 \cap J_2$*

15.4.1 Énoncé simplifié pour les équations différentielles autonomes

C'est une équation du type :

$$y'' = f(y, y')$$

Si f $\in C^1(W, \mathbb{R})$, W un ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $\forall (y_0, y_0') \in W$, (E) admet une solution et une seule, maximale, de (E), noté $y \in C^1(I, \mathbb{R})$, I intervalle $\in t_0$, c'est à dire :

$$\begin{cases} \forall t \in I,\ (y(t), y'(t)) \in W \\ \forall t \in I,\ y''(t) = f(y(t), y'(t)) \end{cases}$$

vérifiant la condition initiale.
De plus, l'intervalle de définition d'une telle solution maximale est ouvert. Toute solution de (E) se prolonge en une unique solution maximale

Corollaire 8 *Si z_1 et z_2 sont deux solutions de (E), sur J_1 et sur J_2, $\ni t_0$, et si ces solutions vérifient les même conditions initiale, alors :*

$$\forall t \in J_1 \cap J_2,\ z_1(t) = z_2(t)$$

Remarque 6 *De même que précédement, $y'' = f(y, y')$ est un cas particulier de $y'' = F(t, y, y')$ avec :*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ (t, y, y') &\mapsto f(y, y') \end{aligned}$$

On peut donc directement appliquer le théorème précédent en considérant l'ouvert $\mathcal{U} = \mathbb{R} \times W$

15.5 Système différentielles (non linéaire) autonome du 1^{er} ordre, de deux équations à deux inconnus

Définition 84 *Ce sont les systèmes différentielles du type :*

$$(S):\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

Le système est dit autonome car la variable t dont dépendent les deux fonctions x et y ne figurent pas dans les équations.

Dans ce chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes : f et g sont deux applications de $C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$, avec $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, c'est à dire que f et g admettent des dérivées partielles du 1^{er} ordre, continues sur $\mathcal{U}$.

Définition 85 *On dit que x et y sont des solutions de (S) sur $I \subset \mathbb{R}$ si x et y $\in C^1(I,\mathbb{R})$ telque :*

$$\forall t \in I \begin{cases} (x(t),y(t)) \in \mathcal{U} \\ x'(t) = f(x(t),y(t)) \\ y'(t) = g(x(t),y(t)) \end{cases}$$

Dans ce cas, x et y sont solutions de (S) sur $I \subset \mathbb{R}$.

15.5.1 Ecriture synthétique du système (S)

Notons X la fonction suivante :

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

X est $C^1(I,\mathbb{R}^2)$ si x et y sont elle même C^1 sur I, avec I intervalle de $\mathbb{R}$. Dans ce cas :

$$\forall t \in I \ X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

D'autre part, définissons :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto F(x,y) = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

F est de classe C^1 de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{R}^2$, c'est à dire admet des dérivées partielles continues sur $\mathcal{U}$ si et seulement si f et g sont $C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$.
Dans ce cas, on obtient les dérivées partielles de F par dérivée composantes par composantes.

Définition 86 *F est appelé champs de vecteur de classe C^1 sur l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$*

A l'aide de ces notations, on obtient que x et y sont solutions de (S) sur I si et seulement si :

$$\begin{cases} X \in C^1(I,\mathbb{R}^2) \\ \forall t \in I,\ X(t) \in \mathcal{U} \\ \forall t \in I,\ X'(t) = F(X(t)) \end{cases}$$

On résume donc les trois conditions en disant que X est solution sur I de l'équation différentielle vectorielle :

$$X' = F(X) \quad (E)$$

Définition 87 *Une solution X de (E) est dite maximale si elle n'est pas prolongable en une solution de (E) sur un intervalle* $I' \supsetneq I$

Théorème 44 *Théorème de Cauchy-Lipschitz.*
Sous les hypothèses précédente, c'est à dire essentiellement $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^2)$*, avec* $\mathcal{U}$ *un ouvert de* $\mathbb{R}^2$*, l'équation (E) :*

$$X' = F(X)$$

admet $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ *et tout* $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ *une unique solution maximale X :*

$$X : I \to \mathbb{R}^2$$
$$t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

De classe C^1 *sur I telle que X(*t_0*) =* X_0*. De telles solutions maximales de (E) s'appelle des courbes intégrale de champs F. De plus :*

- $\rightarrow$ *L'intervalle de définition d'une solution max de (E) est ouvert*
- $\rightarrow$ *Toutes solutions de (E) sur un intervalle* J *est la restriction à* J *d'une solution maximale*

Corollaire 9 *Si* Z_1 *et* Z_2 *sont deux solutions de (E) défini sur* J_1 *et* J_2*, vérifiant les mêmes conditions initiales, alors :*

$$\forall t \in J_1 \cap J_2 \; Z_1(t) = Z_2(t)$$

Cinquième partie

Réduction d'endomorphismes

Chapitre 16

Réduction des endomorphismes et des matrices - Première Partie

16.1 Système linéaire

Considérons un système linéaire (S) à n équations et à n inconnes :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n_1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

On peut écrire (S) sous sa forme matricielle :

$$AX = B$$

Avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition 88 *Un système linéaire admet une unique solution si et seulement si A est inversible, donc si det(A) $\neq$ 0 ou rang (A) = n.*
Dans ce cas, on dit que le système linéaire est inversible, ou que c'est un système de Cramer. L'unique solution est donnée par :

$$\Omega = A^{-1}.B$$

16.2 Détermination de l'inverse de A

16.2.1 Méthode directe

Pour déterminer l'inverse de A, avec A une matrice inversible, on peut utiliser la formule suivante (Voir fiche de révision Sup) :

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}.{}^tCom(A)$$

Cependant, la complexité de cette méthode (c'est à dire le nombre d'opération élémentaire à effectuer) est équivalente en l'infini à $n^2.n!$. Ceci rend cette méthode totalement inutilisable pour n superieur à quelque unité.

16.2.2 Méthode du pivot de Gauss

À l'aide d'opération élémentaire, on peut modifier le système pour obtenir un système triangulaire. Avec cette méthode, la complexité de l'algorithme de résolution du système est équivalente en l'infini à $\frac{n^3}{3}$. La complexité est donc tout à fait acceptable.

Détails de la méthode général

Définition 89 *Une famille est un ensemble ordonée, qui accepte les répétitions*

Sachant que A est inversible, la famille $(C_1, ..C_n)$ des colonnes de A est libre, on peut donc trouver un pivot non nul.
On fixe un pivot non nul (à l'aide de permutation si besoin), et élimine l'inconnu du pivot dans toutes les autres ligne par substitution. Et on intère la méthode pour toutes les inconnus, jusqu'a obtenir un système triangulaire.

Défault de la méthode du pivot de Gauss

Cette méthode est extrèmement instable numériquement. Il y a des erreurs d'arrondi lors des calculs (incontournable), mais ces erreurs peuvent être multiplié par un facteur extremement grand si le pivot est "petit". Cette méthode n'est donc pas fiable pour les grands système.

16.2.3 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi s'applique à la résolution des systèmes Strictement diagonalement dominant

Définition 90 *Un système (S), ou la matrice A, est dit Strictement diagonalement dominant (notée Sdd) si :*

$$\forall i \in [1, n] |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

C'est à dire si la valeur absolu du terme diagonale est strictement superieur à la somme de toute les autres termes de sa ligne.

Détails de la méthode général

La méthode de Jacobi consite à réecrire le systeme Sdd sous la forme suivante : On résoud ce systeme en considérant que les coefficiant non diagonaux dans le systeme de départ sont nul. On obtient donc une valeur approché de la solution, on la note X_0 par exemple. Puis on itere le procédé avec la formule suivante :

$$X_{k+1} = A.X_k + b$$

Cette formule devient par récurrence :

$$\forall k \in N \ X_k - \Omega = A^k(X_0 - \Omega)$$

Le comportement de (X_k) dépend donc principalement de A^k.
On montre que si M, la matrice des coefficiants, est Sdd, alors :

$$\lim_{k \to \infty} A^k = \overrightarrow{0}$$

Avec $\overrightarrow{0}$ l'élément nul de l'espace M_n, l'espace des matrices carrée d'ordre n.
On obtient donc que :

$$\forall X_0 \in K^N \quad \lim_{k \to \infty} X_k = \Omega$$

La convergence de la méthode de Jacobi est donc indépendante de l'approximation initale. Cette méthode est donc stable numériquement.

Rappel

Définition 91 *A est inversible* $\Leftrightarrow \exists A' \in \mathcal{M}_n(K)$ *tq* $AA' = I_n$

Propriété 160

$$\begin{aligned} A \textit{ inversible } &\Leftrightarrow \exists A' \in \mathcal{M}_n(K) \textit{ tq } AA' = I_n \\ &\Leftrightarrow \exists A'' \in \mathcal{M}_n(K) \textit{ tq } A''A = I_n \\ &\Leftrightarrow \textit{ det } A \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \textit{ det } {}^tA \neq 0 \\ &\Leftrightarrow^t A \textit{ inversible } \Rightarrow ({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1}) \\ &\Leftrightarrow \textit{ la famille } (c_1, \ldots, c_n) \textit{ est libre dans } K^n \\ &\Leftrightarrow \textit{ la famille } (l_1, \ldots, l_n) \textit{ est libre dans } K^n \\ &\Leftrightarrow \textit{ rang } A = n \end{aligned}$$

Propriété 161 *Si E est un K espace vectoriel de dimension n et f l'endomorphisme associé à A dans une base B de E :*

$$A = \textit{ mat }_B(f)$$

Alors :

$$\begin{aligned} A \textit{ inversible } &\Leftrightarrow f \textit{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow f \textit{ est injective} \\ &\Leftrightarrow f \textit{ est surjective} \\ &\Leftrightarrow \textit{ Ker}(f) = \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \\ &\Leftrightarrow \textit{ Im}(f) = E \end{aligned}$$

16.3 Valeur propres, vecteurs propre, sous-espace vectoriel propre

16.3.1 Vecteurs propres

Définition 92 *Soit E un K espace vectoriel et* $f \in \mathcal{L}(E)$, *le groupe des endomorphisme de E dans E.*
On dit que $\overrightarrow{x} \in E$ *est un vecteur propre de f si* $f(\overrightarrow{x})$ *est colinéaire à* $\overrightarrow{x}$, *c'est à dire si :*

$$\exists \lambda \in K \textit{ tq } \ f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$

Avec λ *qui a priori dépend de* $\overrightarrow{x}$.

Propriété 162 *Nous avons la propriété suivante :*
→ *Si* $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, *alors* $\forall \lambda \in K \ \ f(\overrightarrow{0}) = \lambda . \overrightarrow{0}$
→ *Si* $\overrightarrow{x} \neq 0$, *alors il existe au plus un* $\lambda \in K$ *tq* $f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$

16.3.2 Valeur propre

Définition 93 *On appele valeur propre de l'endomorphisme tout* $\lambda \in K$ *tq :*

$$\exists \overrightarrow{x} \in E - \left\{ \overrightarrow{0} \right\} \textit{ tq } f(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$$

On enlève $\overrightarrow{0}$ *à cause de la propriété vu ci-dessus.*

16.3.3 Propriétés et définitions

Définition 94 *Les vecteurs $\overrightarrow{x} \in E$ tq $f(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$ sont appelé vecteur propre associé à la valeur propre. Leurs ensembles est égale à $Ker(f - \lambda Id)$. C'est un sous espace vectoriel de E, appelé sous espace vectoriel associé à la valeur propre λ.*
L'ensemble des valeurs propres de f est appelé spectre de f, notée $S_p(f)$:

$$\lambda \in S_p(f) \Leftrightarrow Ker(f - \lambda.Id) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$$

Théorème 45 *Des sous espaces vectoriel propre, d'un endomorphisme f, associés à des valeur propre deux à deux différentes sont en somme direct.*

Propriété 163 *Nous avons les propriétés suivantes :*
$\rightarrow$ *f est injective $\Leftrightarrow$ Ker f = $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ (C'est le sous espace propre associé à la valeur propre λ)*
$\rightarrow$ *f est injective $\Leftrightarrow 0 \notin S_p(f)$*
Si la dimension de E est fini, nous avons la propriété suivante :
$\rightarrow$ *f est bijective $\Leftrightarrow 0 \notin S_p(f)$*

Propriété 164 *Dans un système aux vecteurs propres (C'est à dire un système définissant l'espace Ker(f-λId), les équations sont toujours liée entre elles, autrement dit elle sont linéairement dépendentes. Ce système n'est donc pas un système de Cramer, ce n'est donc pas un système inversible.*

16.3.4 Cas des matrices

On appelle $v_p, \overrightarrow{v_p}$, sous espace propre, spectre de A, le $v_p, \overrightarrow{v_p}$, sous espace propre, spectre de f, l'endomorphisme canoniquement associé à A :

$$\begin{aligned} f : K^n &\rightarrow K^{\mathbb{N}} \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

Donc, par définition :

$$\lambda \in S_p(A) \Leftrightarrow \exists X \in K^n,\ X \neq \overrightarrow{0}\ tq\ AX = \lambda X$$

16.4 Cas où E est de dimension finie : Polynôme caractéristique

Dans tout ce chapitre, E est un K espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$

Propriété 165 *On montre que $S_p(f)$ est l'ensemble des racines dans K du poylome $P_f \in K[X]$, défini par :*

$$P_f(X) = det(f - X.id)$$

Ce polynome est aussi notée χ_f. On défini aussi ce polynome par :

$$P_f(X) = det(X.id - f)$$

Ces deux définitions sont équivalente, sauf qu'il y a un rapport $(-1)^n$ entre les deux, car :

$$det(-g) = (-1)^n.det(g)$$

Par extension au matrice, on obtient que :

$$P_f(X) = det(A - X.I_n)$$

Propriété 166 *L'ensembles des valeurs propre d'un endomorphisme est aussi l'ensemble des racines du polyôme P_f.*

Définition 95 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension finie n.*
On appelle polynome caractéristique de f le polynome :

$$P_f(X) = det(f - Xid) \in K[X]$$

Définition 96 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*
On appelle polynome caractéristique de A :

$$P_A = det(A - X.I_n)$$

Propriété 167 *Si f est l'endomorphisme de K^n canoniquement associé à A, alors :*

$$P_A(X) = P_f(X)$$

Propriété 168 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E un K espace vectoriel de dimension n. On obtient que :*

$$P_f(X) = (-1)^n \left[X^n - Trace(f).X^{n-1} + \cdots + (-1)^n.det(f)\right]$$

Les coefficiants dans les ... ne sont pas à connaitre.

Théorème 46 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension n.*
Alors :

$$\forall \lambda \in S_p(f),\ 1 \leq dim(Ker(f - \lambda.Id) \leq mult_{P_f}(\lambda)$$

Avec $mult_{P_f}(\lambda)$ la multiplicité de λ dans les racines de P_f. On le démontre de la façon suivante :

- → *Si $\lambda \in S_p(f)$, alors $Ker(f - \lambda id) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$*
- → *On écrire la forme du polynome caractéristique. On prend un complémentaire de $Ker(f - \lambda id)$ et on écrire la matrice. On écrire le polynome caractéristique de cette matrice, et on compart avec le précédent. On obtient l'inégalité recherché.*

16.4.1 Relations entre les racines d'un polynome et ses racines

Propriété 169 *Soit P un polynome scindé de la forme :*

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_n) \\ &= X^n + \alpha_{n-1}.X^{n-1} + \dots + \alpha_1 + \alpha_0 \end{aligned}$$

On obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1} &= -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \alpha_{n-2} &= -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \lambda_i.\lambda_j \\ \vdots &= \vdots \\ \alpha_0 &= (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

16.5 Diagonalisabilité

16.5.1 Définitions

Définition 97 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension n.*
On dit que f est diagonalisable s'il existe une base B de E tq $mat_B(f)$ soit diagonale :

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Quitte à réordonnée les vecteurs de B, il existe aussi une base B′ de E telque :

$$mat_{B'}(f) = \begin{array}{c} |\leftarrow \overset{n_1}{- - -} \rightarrow| \quad |\leftarrow \overset{n_2}{- - -} \rightarrow| \quad \dots \quad |\leftarrow \overset{n_p}{- - -} \rightarrow| \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec les λ_i deux à deux distincts. On obtient alors que :

$$\begin{array}{rcl} P(X) & = & (\lambda_1 - X)^{n_1} \dots (\lambda_p - X)^{n_p} \\ & = & (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_p)^{n_p} \end{array}$$

Le polynome est donc scindé. Comme les λ_i sont deux à deux distincts, on obtient que :

$$n_i = multi_{P_f}(\lambda_i)$$

De plus, nous avons les résultats suivants :
$\rightarrow$ *Ker($f - \lambda_1.Id$) est le sous espace vectoriel engendré par les n_1 premiers vecteurs de B′*
$\rightarrow$ *Ker($f - \lambda_2.Id$) est le sous espace vectoriel engendré par les n_2 vecteurs suivants de B′*
$\rightarrow$ *Etc ....*
Enfin, on obtient que les sous espaces vectoriel propres sont supplémentaire.

Propriété 170 *En résumé, si $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension finie est diagonalisable et si $B = B_1 \vee \dots \vee B_p$ est une base de diagonalisation, avec les λ_k deux à deux distinct, alors :*
$\rightarrow$ *$P_f(X) = det(f - Xid)$ est scindé dans K[X] :*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{n_1} \dots (X - \lambda_p)^{n_p}$$

$\rightarrow$ *$\forall k \in [|1, p|]$ $dimKer(f - \lambda_k id) = mult_{P_f}(\lambda_k)$ et même :*

$$Ker(f - \lambda_k id) = Vect(B_k)$$

$\rightarrow$ *Les sous espaces propres sont supplémentaire.*

Théorème 47 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension finie n. Les conditions suivantes sont équivalente :*
$\rightarrow$ *f est diagonalisable*
$\rightarrow$ *P_f est scindé et $\forall \lambda \in Sp(f)$, $dim(f - \lambda.Id) = mult_{P_f}(\lambda)$*
$\rightarrow$ *Les sous espaces propres de f sont supplémentaire*
$\rightarrow$ $\sum\limits_{\lambda \in S_p(f)} dim(Ker(f - \lambda.Id)) = dim(E)$

16.5.2 Cas particulier des valeurs propres simples

Propriété 171 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E un K espace vectoriel de dimension finies n.*
Si $\lambda \in S_p(f)$ est une racine simple de P_f, on obtient que :

$$dim(Ker(f - \lambda.Id) = 1$$

Les sous espaces associé à une valeur propre simple sont donc des droites vectoriel, appelé droite propre

Propriété 172 *Si P_f est un polynome scindé, c'est à dire que f admet n valeurs propres simple, alors on as :*

$$\forall k \in \{1, ..., n\} \ dim(Ker(f - \lambda_k.Id)) = multi_{P_f}(\lambda_k) = 1$$

On en déduit donc que f est diagonalisable et que tout ses sous espaces vectoriel propres sont des droites vectoriel.

16.5.3 Cas d'une matrice

Définition 98 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On dit que A est diagonalisable si f, l'endomorphisme canoniquement associé à A est diagonalisable*

Propriété 173 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Nous avons la propriété suivantes :*

$$(\text{ A est diagonalisable }) \Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(K) \ tq \ P^{-1}.A.P \text{ soit diagonale })$$

Théorème 48 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique réelle, alors A est orthonormalement diagonalisable, c'est à dire que A est diagonalisable (P_A est scindé dans $\mathbb{R}[X]$) et ses espaces propres, qui sont supplémentaire, sont deux à deux orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique, c'est à dire munie du produit scalaire canonique.*

16.6 Trigonalisabilité

Définition 99 *Soit $f \in (E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension finie n.*
On dit que f est trigonalisable si il existe une base B de E telque $mat_f(B)$ soit triangulaire superieur.

Définition 100 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*
On dit que A est trigonalisable si l'endomorphisme canoniquement associée à A est trigonalisable.

Propriété 174 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Nous avons la propriété suivantes :*

$$(\text{ A est trigonalisable }) \Leftrightarrow (\exists P \in GL_n(K) \ tq \ P^{-1}.A.P \text{ soit triangulaire superieur })$$

Théorème 49 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E une K espace vectoriel de dimension finie n.*

$$(\text{f est trigonalisable}) \Leftrightarrow (P_f \text{ est scindé dans } K[X])$$

Corollaire 7 *Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie, alors tout $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable. De même, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable* s

Chapitre 17

Réduction des endomorphismes et des matrices - Deuxième Partie

17.1 Polynomes d'endomorphisme ou de matrice

Dans ce chapitre, toutes les relations vu sont transposable aux matrices

Définition 101 *Soit f une application linéaire de E dans E, avec E un K espace vectoriel.*
Soit P $\in K[X]$ défini par :

$$P = a_0 + a_1.X + \cdots + a_p.X^p$$

Avec $\forall i\ a_i \in K$. On défini :

$$P(f) = a_0.Id + a_1.f + \cdots + a_p.f^p$$

Avec :
- $\rightarrow\ fofo \dots of = f^k$
- $\rightarrow\ f^0 = Id$

De meme, si A $\in \mathcal{M}_n(K)$:

$$P(A) = a_0.I_n + a_1.A + a_p.A^p$$

Propriété 175 *Soit B est une base de E, avec E un K espace vectoriel de dimension fini, f$\in \mathcal{L}(E)$ et $A = mat_B(f)$. On obtient :*

$$P(A) = mat_B(P(f))$$

Propriété 176 *Soit P_1 et $P_2 \in K[X]$, $\lambda \in K$, $f \in \mathcal{L}(E)$.*
Nous avons les résultats suivants :

$$(P_1 + P_2)(f) = P_1(f) + P_2(f)$$
$$(\lambda P_1)(f) = \lambda P_1(f)$$
$$(P_1.P_2)(f) = P_1(f)oP_2(f)$$

De ce dernier résultat, on obtient que :

$$P_1(f)oP_2(f) = P_2(f)oP_1(f)$$

Définition 102 *Soit f un endomorphisme de E, avec E un K espace vectoriel et :*

$$K[f] = \{P(f), P \in K[X]\}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.
On note :

$$K[A] = \{P(A), P \in K[X]\}$$

Propriété 177 *Les espaces défini ci dessus sont des sous algèbres commuative de respectivement $(\mathcal{L}(E), +, \lambda., o)$ et $(\mathcal{M}_n(K), +, \lambda., x)$*

17.2 Idéaux de K[X]

Définition 103 *On appelle idéale de K[X] toute partie non vide $\mathcal{I}$ de K[X] tq :*
→ $\mathcal{I}$ est stable par +
→ $\forall P \in \mathcal{I}$ et $\forall Q \in K[X]$, $PQ \in \mathcal{I}$
De cette définition, on obtient que :

$$P \in \mathcal{I} \Rightarrow -P \in \mathcal{I}$$
$$0 \in \mathcal{I}$$

Avec ici 0, le polynome constant nul.

17.2.1 Exemple

Nous avons les ensembles suivants, qui sont des idéaux triviaux :

$$\mathcal{I} = \{0\}$$

Celui ci constitue l'idéal nul.

$$K[X] = \mathcal{I}$$

Définition 104 *Soit P un polynome de K[X]. On défini l'idéal engendré par P, noté [P], par :*

$$[P] = \{PQ, Q \ \in K[X]\}$$

C'est donc l'ensemble constitué des multiples de P.

17.2.2 Définitions et théorème

Définition 105 *Un idéal engendrée par un seul polynome, du type [P], est appelé idéal principale*

Théorème 50 *Tout idéal de K[X] est principale. On dit donc que l'anneau K[X] est principale.*

Définition 106 *Soit $\mathcal{I}$, un idéal de K[X], donc un idéal idéal.*
On appelle générateurs de $\mathcal{I}$ les polynomes ω telque :

$$\mathcal{I} = [\omega]$$

Propriété 178 *Les générateurs ω se déduisent les uns des autres par multiplication par une constante non nulle $\lambda \in K^*$.*
De plus, si $\mathcal{I} \neq \{0\}$, alors les générateurs ont tous le même degrés :

$$deg(\omega) = min\,\{deg(P), P \in \mathcal{I} - \{0\}\}$$

Propriété 179 *De la propriété précédente, on déduit que si :*
→ $\omega \in \mathcal{I}$
→ deg(ω)$min\,\{deg(P), P \in \mathcal{I} - \{0\}\}$ Alors :

$$\mathcal{I} = [\omega]$$

Définition 107 *L'unique générateur unitaire d'un idéal $\mathcal{I}$ non nul est appelé polynome minmale de l'idéal $\mathcal{I}$*

17.2.3 Application au pgcd de deux polynomes, et à l'algorithme d'Euclide

Soit P_1 et P_2 deux polynomes de K[X] non tous les deux nuls.
On sait que $[P_1, P_2]$ est un idéal de K[X], donc un idéal principale.
On obtient donc qu'il existe un unique $\omega \in K[X] - \{0\}$ telque :

$$[P_1, P_2] = [\omega]$$

On montre que ω est le pgcd de P_1 et P_2

Algorithme d'Euclide

Cet algoritme se base sur la propriété suivante :

$$\forall Q \in K[X]\ [P_1, P_2] = [P_1, P_2 + Q.P_1]$$

17.2.4 Polynome annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice, Polynome minimal d'un endomorphisme ou d'une matrice

Définition 108 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel.*
On dit que $P \in K[X]$ annule f, ou que P est un polynome annulateur de f, ou encore que f annule P si :

$$P(f) = \tilde{0}$$

De meme, si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on dit que P annule A si :

$$P(A) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété 180 *L'ensemble $A_{nn}(f)$ (Notation non standard), des polynomes annulateur de f, défini par :*

$$A_{nn}(f) = \left\{P \in K[X]\ tq\ \ P(f) = \tilde{0}\right\}$$

Cet ensemble est un idéal de K[X].

Définition 109 *On appelle polynome minimale de f, noté ω_f, l'unique polynome unitaire telque que :*

$$A_{nn}(f) = [\omega]$$

On défini de même le polynome minimal d'une matrice

Propriété 181 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension finie, B une base de E et A = $mat_B(f)$.*
On obtient dans ce cas que :

$$\omega_A = \omega_f$$

Propriété 182 *Soit E une K espace vectoriel de dimension n.*
On obtient que, $\forall f \in \mathcal{L}(E)$:

$$A_{nn} \neq \{O\}$$

Donc que :

$$\omega_f \neq 0$$

Propriété 183 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel.*
Si $\omega_f \neq 0$ et d = deg(ω_f), alors (Id,f,...,f^{d_1}) est une base de K[f], en particulier :

$$dimK[f] = deg(\omega_f)$$

17.2.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 51 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension fini. On obtient alors que :*

$$P_f(f) = \tilde{0}$$

Nous avons les équivalences suivantes :

$$(P_f(f) = \tilde{0}) \Leftrightarrow (P_f \in A_{nn}(f)) \Leftrightarrow (\omega_f | P_f)$$

Corollaire 8 *Si E est une K espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors deg $w_f \leq n$*

17.2.6 Relation entre valeurs propres et racines des polynomes annulateurs

Propriété 184 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel (E peut être un espace de dimension infini). Si f annule $P \in K[X]$, alors :*

$$S_p(f) \subset Z(P)$$

Avec Z(P) l'ensemble des zéros de P, c'est à dire l'ensemble des racines de P.

Lemme 2 *Si $f(\overrightarrow{x}) = \lambda.\overrightarrow{x}$, alors :*

$$\forall P \in K[X] \ P(f)(\overrightarrow{x}) = P(\lambda)(\overrightarrow{x})$$

Propriété 185 *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension finies, alors :*

$$S_p(f) = Z(w_f)$$

Cependant, ceci ne nous donne bien évidement aucune information sur la multiplicité des racines.

Propriété 186 *Soit f et g deux endomorphisme de E dans E. Si :*

$$fog = gof$$

C'est à dire, si les deux endomorphimes communent, alors Ker(g) et Im(g) sont stable par f

17.3 Lemme des noyaux

Propriété 187 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel. Soit P_1 et P_2 deux polynomes de $K[X]$, premiers entre eux. On obtient alors :*

$$Ker(P_1.P_2)(f) = Ker(P_1)(f) \oplus Ker(P_2)(f)$$

On le démontre à l'aide de l'identité de Bezout.

Généralisation 12 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel. Soit $P_1, \ldots, P_k$ des polynomes de K[X] deux à deux premiers entre eux. Soit P = $P_1 \ldots P_k$, on obtient alors :*

$$Ker(P)(f) = Ker(P_1)(f) \oplus \cdots \oplus Ker(P_k)(f)$$

17.3.1 Application fondamentale de Lemme des noyaux

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace de dimension n telque P_f soit scindé sur K[X]. On peut donc écrire P_f sous la forme :

$$P_f(X) = (-1)^n(X - \lambda_1)^{n_1} \ldots (X - \lambda_p)^{n_p}$$

En utilisant conjointement le lemme des noyaux et le théorème de Cayley-Hamilton, on obtient que :

$$P_f(f) = (-1)^n.(f - \lambda_1.Id)^{n_1} o \ldots o(f - \lambda_p.Id)^{n_p} = \tilde{0}$$

Grâce au lemme des noyaux, on obtient que :

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$$

Avec :

$$E_k = Ker(f - \lambda_k.Id)^{n_k}$$

On peut obtenir à partir de tout ceci une matrice diagonale par bloc, de la forme :

$$mat_B(f) = \begin{array}{c} |\leftarrow \overset{n_1}{---} \rightarrow| \quad |\leftarrow \overset{n_2}{---} \rightarrow| \quad \dots \quad |\leftarrow \overset{n_p}{---} \rightarrow| \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & \lambda_p & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ (0) & & & & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix} \end{array}$$

17.4 Endomorphismes et matrices nilpotants

Définition 110 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*
f est dit nilpotant si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ telque :

$$f^p = \tilde{0}$$

La définition est analogue pour les matrices

Propriété 188 *Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
- $\rightarrow$ *f est nilpotant*
- $\rightarrow$ $S_p(f) = \{0\}$
- $\rightarrow$ *$\exists$ B base de E telque $mat_B(f)$ soit une matrice stricement triangulaire, c'est à dire triangulaire avec tous ces termes diagonaux nuls.*

Définition 111 *On appelle indice de nilpotence de f le plus petit entier ν telque :*

$$f^\nu = \tilde{0}$$

Si E est un C espace vectoriel de dimension n, on obtient que :

$$\nu \geq n$$

Plus précisement, on obtient que :

$$w_f = X^\nu$$

17.5 Nouveaux critères de trigonabilité

Théorème 52 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension n. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
- $\rightarrow$ *f est trigonalisable*
- $\rightarrow$ *f annule un polynome scindé sur K*
- $\rightarrow$ *w_f est scindé sur K*

17.5.1 Réduction de Dunford

Si :

$$w_f = (X - \lambda_1)^{m_1} ... (X - \lambda_p)^{m_p}$$

avec les λ_k deux à deux distinct, alors on obtient que, d'après le lemme de noyaux :

$$E = E_1 \oplus ... \oplus E_P$$

avec :

$$E_k = Ker(f + \lambda_k.id)^{m_k}$$

On peut donc choisir une base de chaqu'un des E_k, notée B_k, telque :

$$mat_{B_k} f_{\|E_k} = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (a_{ij}) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

C'est donc une matrice triangulaire superieur. De plus, on a :

$$B = B_1 \vee \cdots \vee B_P$$

qui est une base de E. On obtient donc que :

$$mat_B f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{n'_1}{\leftrightarrow} & \cdots & \overset{n'_p}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_p} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \updownarrow n'_1 \\ \\ \updownarrow n'_p \end{array}$$

Avec $A_k = mat_{B_k} f_{\|E_k}$. On montre de plus qu'en réalité :
 $\rightarrow$ n'_k est en réalité egale à $mult_{Pf}(\lambda_k)$
 $\rightarrow$ E_k = Ker(f-λ.id)^{n_k}

17.6 Nouveau critère de diagonabilité

Théorème 53 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un K espace vectoriel de dimension finies. Les propositions suivantes sont équivalente :*
 $\rightarrow$ *f est diagonalisable*
 $\rightarrow$ *f annule un polynome scindé sur K à racine simple*
 $\rightarrow$ *w_f est scindé sur K à racine simple*
De plus, nous savons que :

$$Z(w_f) = S_p(f)$$

La première proposition s'écrit donc :

$$w_f(X) = (X - \lambda_1)...(X - \lambda_p)$$

ou

$$S_p(f) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$$

Sixième partie

Espaces vectoriels normés

Chapitre 18

Espaces vectoriels normés - Première partie

18.1 Norme - Distance - Définitions

18.1.1 Définitions

Définition 112 *Soit E un K espace vectoriel.*
On appelle norme de E toutes application de $E \to \mathbb{R}^+$, que l'on note N ou $\| \|$, et vérifiant les axiomes suivants :

- $\rightarrow$ *Si* $\overrightarrow{x} \in E, N(\overrightarrow{x}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
- $\rightarrow$ $\forall \lambda \in K, \forall \overrightarrow{x} \in E, N(\lambda \overrightarrow{x}) = |\lambda| N(\overrightarrow{x})$
- $\rightarrow$ $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 \; N(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \leq N(\overrightarrow{x}) + N(\overrightarrow{y})$

Une norme est donc une application définie, qui vérifie la propriété 2 et l'inégalité triangulaire.

18.1.2 Conséquence immédiate des axiomes

- $\rightarrow$ $N(\overrightarrow{0}) = 0$
- $\rightarrow$ $\forall (\overrightarrow{x_1}, ..., \overrightarrow{x_p}) \in E^p, N(\overrightarrow{x_1} + ... + \overrightarrow{x_p}) \leq N(\overrightarrow{x_1}) + ... + N(\overrightarrow{x_p})$
- $\rightarrow$ $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 \; | \| \overrightarrow{x} \| - \| \overrightarrow{y} \| | \leq \| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \|$
- $\rightarrow$ De même : $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 \; | \| \overrightarrow{x} \| - \| \overrightarrow{y} \| | \leq \| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \|$

18.2 Distance

18.2.1 Définitions

Définition 113 *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble quelconque, non vide.*
On appelle distance sur $\mathcal{E}$ toutes applications :

$$\begin{aligned} d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\to \mathbb{R}^+ \\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) &\mapsto d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \end{aligned}$$

vérifiant les axiomes suivantes :

→ *Si x et y sont dans $\mathcal{E}$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*

→ $\forall (x,y) \in \mathcal{E}^2$, *d(x,y) = d(y,x)*

→ $\forall (x,y,z) \ \in \mathcal{E}^3$, *d(x,z) $\leq$ d(x,y)+d(y,z)*

18.2.2 Conséquence

Des axiomes précédents, on peut étendre l'axiome n°3 :

$$\forall (x_1, ..., x_p) \in \varepsilon^p,\ d(x_1, ..., x_p) \leq d(x_1, x_2) + ... + d(x_{p-1}, x_p)$$

18.2.3 Distance déduite d'une norme

Définition 114 *Soit $\mathcal{E}$ un K espace affine et $\| \ \|$ une norme sur $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, l'espace vectoriel associé à l'espace affine.*
On appelle distance déduite de $\| \ \|$ sur $\mathcal{E}$ l'application :

$$\begin{aligned} d : \varepsilon \times \varepsilon &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x,y) &\mapsto d(x,y) = \| x - y \| \end{aligned}$$

18.3 Exemple classique de normes dans un espaces de dimension finies

18.3.1 La norme $\| \ \|_\infty$ sur K^n

Définition générale

Soit X la matrice défini par :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n = \mathcal{M}_{n,1}(K)$$

On associe le n-uplet à une matrice colonnes.
On défini la norme $\| X \|_\infty$ = max($\mid x_k \mid$)

Cas d'un espace de dimension n

Soit E un K espace vectoriel de dimension n, et B=($\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}$) une base de E.
Si :

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

On défini $\| \overrightarrow{x} \|_{\underset{B}{\infty}}$ =max($|x_k|$)

18.3.2 La norme $\| \ \|_1$ sur K^n

Définition générale

Soit X la matrice défini précédement. On défini la norme par :

$$\| X \|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Cas d'un espace de dimension n

Soit E un K espace vectoriel de dimension n, et B=($\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}$) une base de E.
Si :

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n}$$

On défini :

$$\| \overrightarrow{x} \|_{\underset{B}{1}} = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

18.3.3 La norme $\| \|_2$ sur K^n

Définition

Avec les même notations :

$$\| X \|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|}$$

Cas particulier : K = $\mathbb{R}$

La norme défini ci dessus vérifie dans ce cas :

$$\| \|_2 = \sqrt{< X|X >}$$

Si :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

Alors :

$$< X|Y > = \sum_{k=1}^{n} x_k.y_k$$

Ceci est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. C'est l'unique produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ qui fasse de la base canonique une base orthonormée.
Dans ce cas, l'inégalité triangulaire s'appelle l'inégalité de Minkowski

18.4 Convergence au sens d'une norme ou d'une distance - Norme équivalente

18.4.1 Au sens d'une distance

Définition 115 *Soit $(\mathcal{E}, d)$ un espace métrique, et (x_n) une suite de point de $\mathcal{E}$.*
On dit que (x_n) converge vers $x \in \mathcal{E}$ au sens de la distance d si et seulement si :

$$d(x_n, x) \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

18.4.2 Au sens d'une norme

Définition 116 *Soit (E,$\| \|$) un K espace vectoriel normé, et $(\overrightarrow{x_n})$ une suite d'éléments de E.*
On dit que la suite $(\overrightarrow{x_n})$ converge vers $\overrightarrow{l} \in E$ au sens de la norme $\| \|$ si et seulement si :

$$\| \overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{l} \| \underset{n\mapsto\infty}{\to} 0$$

En théorie, cette définition ramène le problème à un problème de convergence dans $\mathbb{R}^+$. La notion de norme sert à unifier les études de convergence.

Propriété 189 *Cette propriété est un cas particulier de la définition au sens d'une distance, en utilisant la norme déduit de la norme.*

18.4.3 Norme équivalente

Définition 117 *Soit $\| \|$ et $\| \|$ deux normes sur un même K espace vectoriel de E.*
Ces deux normes sont dites équivalente si il existe α et β deux réels strictement positif telque :

$$\| \|' \leq \alpha \| \|$$

$$\| \| \leq \beta \| \|'$$

Définition 118 *On peut écrire cette définition sous la forme suivante :*
Ces deux normes sont équivalente si les deux applications suivantes :

$$E - \{0\} \to \mathbb{R}^+$$
$$\overrightarrow{x} \mapsto \frac{\| \overrightarrow{x} \|'}{\| \overrightarrow{x} \|}$$

et

$$E - \{0\} \to \mathbb{R}^+$$
$$\overrightarrow{x} \mapsto \frac{\| \overrightarrow{x} \|}{\| \overrightarrow{x} \|'}$$

sont majorées.

Propriété 190 *Il résulte de ce qui précède que si $\| \|$ et $\| \|'$ sont deux normes équivalente sur le K espace vectoriel E :*

$$\overrightarrow{x_n} \underset{\infty}{\to} \overrightarrow{x} \ dans \ (E, \| \|) \Leftrightarrow \overrightarrow{x_n} \underset{\infty}{\to} \overrightarrow{x} \ dans \ (E, \| \|')$$

Propriété 191 *Nous avons aussi la propriété réciproque :*
Soient $\| \|$ et $\| \|'$ deux normes sur un meme K espace vectoriel E telque pour toutes suite $(\overrightarrow{x_n}) \in E^N$, et pour tous $\overrightarrow{x} \in E$:

$$\overrightarrow{x_n} \underset{\infty}{\to} \overrightarrow{x} \ dans \ (E, \| \|) \Leftrightarrow \overrightarrow{x_n} \underset{\infty}{\to} \overrightarrow{x} \ dans \ (E, \| \|')$$

Alors ces deux normes sont équivalentes.

18.5 Convergence dans les K espaces vectoriel de dimension finies

Théorème 54 *Si E est un K espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes*

Corollaire 1 *La converge vers $\overrightarrow{x} \in E$ d'une suite $(\overrightarrow{x_n}) \in E^{\mathbb{N}}$ ne dépend pas de la norme choisie si E est un K espace vectoriel de dimension finie.*

Propriété 192 *Soit B=($\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p}$) une base du K espace vectoriel E. Si :*

$$\overrightarrow{x_n} = x_{1,n}\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_{p,n}\overrightarrow{e_p}$$

$$\overrightarrow{x} = x_1\overrightarrow{e_1} + \cdots + x_p\overrightarrow{e_p}$$

Alors :

$$\overrightarrow{x_n} \underset{\infty}{\to} \overrightarrow{x} \Leftrightarrow x_{1,n} \underset{\infty}{\to} x_1, \ldots, x_{n,p} \underset{\infty}{\to} x_p$$

On peut écrire ceci de la façon suivante :
$\overrightarrow{x_n} \to \overrightarrow{x}$ si et seulement si il y a convergence composant par composant.

Chapitre 19

Espace vectoriel normé - Deuxième partie

19.1 Interieur d'un ensemble, ensemble ouvert

Définition 119 *Soit (E,d) un espace métrique. En général, E est un K espace vectoriel munie d'une norme* $\| \ \|$*, et d est la distance déduite de cette norme.*
Soit A un ensemble non vide de E. On dit que $a \in E$ *est intérieur à A, si il existe r>0 telque :*

$$B(a,r) \subset A$$

Définition 120 *On appelle interieur de A, et on le note* $\overset{o}{A}$*, l'ensemble des points interieurs à a.*

Définition 121 *A est dit ouvert si tout point de A est interieur à A. C'est à dire si :*

$$A \subset \overset{o}{A}$$

Or, par définition, nous avons :

$$\overset{o}{A} \subset A$$

Donc, nous avons l'équivalence suivante :

$$(\text{ A est un ouvert }) \Leftrightarrow (A = \overset{o}{A})$$

Propriété 193 *Nous avons les propriétés suivantes :*
→ *$\emptyset$ est un ouvert par convention.*
→ *E est un ouvert*
→ *Une intersection finie d'ouvert est un ouvert.*
→ *Une réunion quelconque (finie ou infinie) d'ouvert est un ouvert.*

Propriété 194 $\overset{o}{A}$ *est le plus grand (Au sens de l'inclusion) ouvert inclu dans A.*

Exemple

Nous avons un exemple classique :
→ Les boules ouvertes d'un espace métrique sont des ouverts

19.2 Adérence d'un ensemble, ensemble fermé

Considérons toujours A, un sous ensemble non vide d'un espace métrique (E,d).

Définition 122 *On dit que $x \in E$ est adhérent à A s'il existe une suite (a_n) d'élements de A telque :*

$$a_n \underset{n\to\infty}{\to} x$$

x peut être ou ne pas être un élement de A.
Si d est une distance déduite d'une norme $\| \|$, on peut écrire cette condition sous la forme :

$$\| a_n - x \| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

Par définition, tout point de A est adhérent à A (pour le démontrer prendre la suite constante)

Propriété 195 *Nous avons la propriété suivante :*

$$\begin{aligned}(x \textit{ est adhérent à } A\ ) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \textit{ tq } d(a,x) \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset)\end{aligned}$$

La dernière équivalence dit que x est adhérent à A si pour tout $\varepsilon > 0$, B(x,ε) rencontre A.

Définition 123 *L'ensemble des points adhérent à A, s'appelle l'adhérence à A, et est noté $\overline{A}$. Par définition, nous avons donc :*

$$\overset{o}{A} \subset A \subset \overline{A}$$

Définition 124 *Un sous ensemble A d'un ensemble normé (E,d) est dit fermé s'il est égale à son adhérence, c'est à dire si A=$\overline{A}$. Et comme par définition nous avons l'une des inclusions, on obtient que A est fermé si et seulement si :*

$$\overline{A} \subset A$$

Définition 125 *On appelle complémentaire de A, et on le note C_A, l'ensemble défini par :*

$$C_A = E - A$$

Propriété 196 *Nous avons la propriété suivante :*

$$A \textit{ est fermé} \Leftrightarrow C_A \textit{ est ouvert}$$

Propriété 197 *Caractérisation séquentielle :*
A est fermé si et seulement si toute suite convergente d'élement de A à sa limite dans A.

Propriété 198 *Nous avons les propriétés suivantes :*
$\to$ *$\emptyset$ est un fermé*
$\to$ *E est un fermé*
$\to$ *Une intersection quelconque de fermés est un fermé*
$\to$ *La réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé*

Propriété 199 *Nous avons les propriétes suivantes :*
$\to$ *$\overline{A}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant A.*
$\to$ *Dans un espace vectorielle normé, la boule fermé $\overline{B}(x_0, r)$ est l'adhérence de B(x_0, r). Celà n'est pas nécessairement vrai dans un espace métrique.*

Exemples

Il y a un exemple classique de fermé :
$\to$ Les boules fermés d'un espace métrique sont des fermés.

19.3 Frontière

Définition 126 *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E,d). On appelle frontière de A, et on le note parfois ∂A, l'ensemble défini par :*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{C_A}$$

Propriété 200 *Nous avons la propriété suivante :*

$$\partial A = \overline{A} - \overset{o}{A}$$

19.4 Diamètre d'une partie bornée

Définition 127 *Une partie A d'un espace métrique (E,d) est dit borné si :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \exists x_0 \in E,\ tq\ \forall x \in A\ d(x_0, x) \leq M$$

Cette définition est équivalente à :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \exists x_0 \in E,\ tq\ A \subset \overline{B}(x_0, M)$$

Propriété 201 *Si cette condition est remplie, alors :*

$$\forall x_1 \in E,\ \exists M_1 \in \mathbb{R}_+,\ tq\ \forall x \in A,\ d(x_1, x) \leq M_1$$

19.5 Ensembles compacts

19.6 Définitions et propriétés

19.6.1 Définition de Bolzano-Weierstrass

Définition 128 *Un sous ensemble K d'un espace vectoriel normée E (ou un espace métrique (E,d), avec d la distance déduite de la norme), munie de la norme $\|\ \|$, est dit compact si de toute suite (γ_n) à valeur dans K, on peut extraire une sous-suite $(\gamma_{\phi(n)})$, avec ϕ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, qui converge vers un éléments de K.*

19.6.2 Théorème

Théorème 55 *Tout segment [a,b] inclu dans $\mathbb{R}$ est compact, c'est à dire que de toute suite bornée on peut extraire une suite qui converge.*

Théorème 56 *Nous avons les propriétes suivantes :*

$\rightarrow$ *Tout compact est fermé et borné*

$\rightarrow$ *Tout fermé inclus dans un compact est compact*

$\rightarrow$ *$[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ est un compact de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_\infty)$, ou même de $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie.*

Théorème 57 *Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout ensemble, non vide, fermé et borné est un compact.*

Propriété 202 *Si (x_n) est une suite d'élements d'un espace métrique convergeant vers l, alors :*

$$K = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$$

est un compact.

Corollaire 10 *Soit f une application de E dans E', avec E et E' des espaces vectoriels normés ou des espaces métriques, définie sur une partie non vide $A \subset E$.*
f est continue sur A si et seulement si f est continue sur tout compact inclu dans A.

Théorème 58 *Soit f une fonction de E dans E′, avec E et E′ deux K espaces vectoriels (ou espace métrique) munie respectivement des normes ∥ ∥ et ∥ ∥′, définie et continue sur un compact C de E. Alors :*

→ *f(C) est un compact de E′*

→ *f est bornée sur C, c'est à dire :*

$$\exists M \in R^+ \; tq \; \forall \gamma \in C, \; \| f(\gamma) \|' \leq M$$

→ *f est uniformement continue sur C*

→ *Si E′=ℝ, alors f atteint ces bornes.*

Chapitre 20

Espace Prehilbertiens, Espaces euclidiens

Ce chapitre se réfère aux chapitres de MPSI et de MP sur les espaces vectoriels normés. Certaines propriétés établie précédement ne seront pas re-mentionné, mais font partie intégrante de ce chapitre. Dans le cours de MPSI, qui contient la grande majorité des élements non revu ici, on considère un espace euclidien. Mais ces propriétés, si elle n'ont pas été reproduite ici, s'étendent aux espaces $\mathbb{R}$ prehilbertien.

20.1 Norme euclidienne

Définition 129 *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel.*
On appelle norme euclidienne sur E une norme N telle qu'il existe un produit scalaire :

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$$

vérifiant :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ N(\overrightarrow{x}) = \sqrt{\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})}$$

Définition 130 *Un $\mathbb{R}$ espace vectoriel munie d'un produit scalaire, c'est à dire le couple (E,< | >), s'appelle un espace préhilbertien réel.*
On appelle espace euclidien un espace préhilbertien réel de dimension finie.

Propriété 203 *On montre que l'application :*

$$\begin{aligned} &E \to \mathbb{R}_+ \\ &\overrightarrow{x} \mapsto \| \overrightarrow{x} \| = \sqrt{< \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x} >} \end{aligned}$$

est une norme sur E. Cette norme est appelée norme euclidienne déduite du produit scalaire < | >.

20.2 Propriétés Elémentaire

20.2.1 Identités de polarisation

Définition 131 *On appelle identité de polarisation une égalité qui permet d'exprimer le produit scalaire au moyen de la norme euclidienne seule. Nous avons donc les égalités suivantes :*

$$\begin{cases} < \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} > = \frac{1}{2}(\| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \|^2 - \| \overrightarrow{x} \|^2 - \| \overrightarrow{y} \|^2) \\ < \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} > = \frac{1}{4}(\| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \|^2 - \| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \|^2) \end{cases}$$

20.2.2 Identités du Parallélogramme et de la médiane

Énoncé 16 *En généralisant la propriété en géométrie élémentaire, on obtient que dans le cas d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel prehilbertien, on a :*

$$2(\| \overrightarrow{x} \|^2 + \| \overrightarrow{y} \|^2) = \| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \|^2 + \| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \|^2$$

On obtient aussi une égalité de la médiane, mais elle n'a pas de valeur ajouté par rapport à l'égalité précédente.

Propriété 204 *Si une norme vérifié l'égalité ci-dessus, alors c'est une norme euclidienne*

20.3 Forme linéaire dans un espace euclidien

Propriété 205 *Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel préhilbertien, muni du produit scalaire < | >, alors :*
$\forall \overrightarrow{e} \in E$, l'application :

$$\begin{aligned} \varphi_{\overrightarrow{e}} : E &\to \mathbb{R} \\ \overrightarrow{x} &\to < \overrightarrow{e} | \overrightarrow{x} > \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue non nulee si et seulement si $\overrightarrow{e} \neq \overrightarrow{0}$

Propriété 206 *Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien, alors pour toute forme linéaire $\varphi \in E^*$, l'ensemble des formes linéaires sur E, il existe un unique vecteur $\overrightarrow{e} \in E$ telque :*

$$\varphi = \varphi_e$$

C'est à dire telque :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, < \overrightarrow{e} | \overrightarrow{x} >$$

Corollaire 11 *Tout hyperplan d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien est l'orthogonal d'une droite vectorielle.*

20.4 Théorème de projection orthogonale sur un sous espace de dimension finie

Cette section s'appuit fortement sur la section "Projection orthogonale" dans le livre de révision de Mathématiques de MPSI.

20.4.1 Inégalité de Bessel

Avec les notations présenté dans l'ouvrage MPSI, c'est à dire principalement p un projecteur orthogonal, on a :

$$\| p(\overrightarrow{x}) \|^2 = \sum_{i=1}^{p} < \overrightarrow{e_i} | \overrightarrow{x} >^2$$

On obtient donc que :

$$\sum_{i=1}^{p} < \overrightarrow{e_i} | \overrightarrow{x} >^2 \leq \| \overrightarrow{x} \|^2$$

Ceci constitue l'inégalité de Bessel.

20.4.2 Norme d'un projecteur orthogonal subordonnée à la norme euclidienne

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel préhilbertien, et $\| \ \|$ la norme euclidienne de E.
Soit F un sous espace vectoriel de E, de dimension fini, et p le projecteur orthogonal sur F. Alors :

$$\| p \|_* = 1$$

Si F $\neq \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$, avec, par définition :

$$\| p \|_* = \sup_{\overrightarrow{x} \in E - \left\{ \overrightarrow{0} \right\}} \frac{\| p(\overrightarrow{x}) \|}{\| \overrightarrow{x} \|}$$

20.4.3 Projection orthogonale sur une droite vectorielle

Soit $D = Vect(\overrightarrow{u})$ une droite vectorielle d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel préhilbertien E, et p le projecteur orthogonal sur D. Alors :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ p(\overrightarrow{x}) = \frac{< \overrightarrow{x} | \overrightarrow{u} >}{\| \overrightarrow{u} \|^2} . \overrightarrow{u}$$

20.4.4 Théorème de la base orthonormée incomplète dans un espace vectoriel euclidien

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien de dimension n et $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_p})$ un système orthonormé de E. Si p<n, alors il existe un système orthonormée $(\overrightarrow{e_{p+1}}, ..., \overrightarrow{e_n})$ telque $(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n})$ soit une base orthonormée de E.

20.5 Orthogonal d'une partie, sous-espaces orthogonaux

Corollaire 12 *Pour que $\overrightarrow{x}$, un vecteur de E, soit orthogonal à un sous espace vectoriel F, il faut et il suffit que $\overrightarrow{x}$ soit orthogonal à une famille génératrice de F.*

20.5.1 Propriétés

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel prehilbertien. Soit A et B deux parties de E, F et G de sous espaces vectoriel de E. Nous avons les propriétés suivantes :
→ A ⊂ B ⇒ $A^\perp \subset B^\perp$
→ $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. Cette propriété se généralise pour un plus grand nombre de sous espace.
→ $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. Si E est un espace de dimension finie, il y a égalité. Cette propriété se généralise elle aussi.
→ F ⊂ $(F^\perp)^\perp \Leftrightarrow (F^\perp)^\perp = \overline{F}$. Il y a égalité dans le cas d'un espace de dimension finie.

20.5.2 Sous-espaces Vectoriels orthogonaux

Définition 132 *On dit que des sous espaces vectoriels $F_1, ..., F_p$ d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel prehilbertien E sont supplémentaire orthogonaux s'ils sont supplémentaire et orthogonaux deux à deux. On le note :*

$$E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} F_p$$

Propriété 207 *Si les F_i précédents sont des sous espaces vectoriel deux à deux orthogonaux, et si B_i est une famille orthogonale (respectivement orthonormée) de F_i, alors $B_1 \vee ... \vee B_p$ est une famille orthogonale (respectivement orthonormée) de $F_1 \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} F_p$.*
Il en est de même si on considère une base au lieu d'une famille

Propriété 208 *Si $B_1, ..., B_p$ sont des familles orthogonales (respectivement orthnormée) telque $\forall i \neq j \in [1, p]$, tout vecteur de B_i soit orthogonal à tout vecteur de B_j, alors les $F_i = Vect(B_i)$ sont des sous espaces vectoriels deux à deux orthogonaux et $B_1 \vee ... \vee B_p$ est une base orthogonale (respectivement orthonormée) de :*

$$F_1 \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} F_p$$

20.6 Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 59 *Soit (u_i) une famille libre d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel préhilbertien E, avec $i \in I = [1, n]$ ou $i \in I = \mathbb{N}^*$.*
Alors, il existe une unique famille orthonormée (e_i) telle que :
→ $\forall i \in I,\ Vect(\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_i}) = Vect(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_i})$
→ $\forall i \in I,\ < \overrightarrow{u_i} | \overrightarrow{e_i} > > 0$
L'unicité provient de la seconde condition.

20.6.1 Traduction matricielle

Propriété 209 $\forall A \in Gl_n(\mathbb{R}),\ \exists!(Q, R) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ *avec Q orthogonale et R triangulaire supérieur à diagonale strictement positive telque :*

$$A = QR$$

A l'aide de cette propriété, on peut traduire matriciellement l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

20.7 Endomorphismes Orthogonaux, Matrices orthogonales

Dans cette section, on généralise les résultats vu en MPSI, dans le cas ou l'espace de départ n'est pas forcément l'espace d'arrivé.

20.7.1 Isométries vectorielles

Propriété 210 *Soient E et E' deux $\mathbb{R}$ espace vectoriel préhilbertiens de f une application de E dans E', qui n'est pas supposé linéaire. On a alors équivalence entre les deux conditions suivantes :*
→ *f conserve le produit scalaire :* $\forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}' \in E^2\ < f(\overrightarrow{x}) | f(\overrightarrow{x}') > = < \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x}' >$
→ *f est linéaire et conserve la norme :* $\forall \overrightarrow{x} \in E,\ \| f(\overrightarrow{x} \| = \| \overrightarrow{x} \|$

Définition 133 *Une telle application f est appelé isométrie vectorielle de E dans E'.*

Propriété 211 *Toute isométrie vectorielle est injective.*

20.7.2 Matrices orthogonales

Définition 134 *Une matrice orthogonale est une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telque ${}^tA.A = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensembles des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'apres la caractérisation précédente, on obtient que l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposé.*

Propriété 212 $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ *est un sous groupe de* $(Gl_n(\mathbb{R}, \times)$*. Nous avons donc les propriétés suivantes :*
→ I_n *est une matrice orthogonale*
→ *Le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonales*
→ *L'inverse d'une matrice orthogonale est une matrice orthogonale*

Propriété 213 *Soit E un espace vectoriel euclidien. Nous avons les propriétés suivantes :*
→ *Si $f \in O(E)$, alors la matrice de f dans n'importe quelle base orthonormée est orthogonale*
→ *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, et si il existe une base orthonormée dans laquelle f est représenté par une matrice orthogonale, alors $f \in O(E)$*

Lien avec les bases orthonormées

Propriété 214 *Nous avons les propriétés suivantes :*
- $\rightarrow$ *Si E est un espace vectoriel euclidien, la matrice de passage d'une base orthonormée à une autre base orthonormée est une matrice orthogonale.*
- $\rightarrow$ *Si B est une base orthonormée de E et si la matrice de passage entre B et B' est une matrice orthogonale, alors B' est aussi une base orthonormée de E.*
- $\rightarrow$ $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est une matrice orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée dans* $\mathbb{R}^n$ *euclidien canonique. Il en est de même si on considère les lignes.*

Déterminant d'un endomorphisme orthogonal

Propriété 215 *Si* $A \in O_n(\mathbb{R})$*, alors :*
$$det(A) = \pm 1$$

Propriété 216 *Si* $f \in O(E)$*, avec E un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel euclidien, alors :*
$$det(f) = \pm 1$$

Propriété 217 *Les endomorphismes orthogonaux de déterminant +1 sont dits directs ou positif. Les endomorphismes orthogonaux de déterminant -1 sont dits indirects ou négatif.*

Valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal ou d'une matrice orthogonale

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$

Propriété 218 *Les valeurs propres complexes d'une matrice orthogonale sont de module 1.*

Symétries orthogonales

Définition 135 *Soit E un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel euclidien de dimension finie n et F un sous espace vectoriel de E. Nous avons donc :*
$$E = F \oplus F^{\perp}$$
On peut donc définir la symétrie orthogonale s par rapport à F et parralèlement de $F^{\perp}$ *:*
$$s : E \rightarrow E$$
$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2} \rightarrow s(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x_1} - \overrightarrow{x_2}$$
Avec $\overrightarrow{x_1} \in F$ *et* $\overrightarrow{x_2} \in F^{\perp}$.

Propriété 219 *Nous avons la propriété suivante :*
$$s \in O(E)$$

Réduction orthonormale d'un endomorphisme orthogonal

Théorème 60 *Soit* $f \in O(E)$*, avec E un* $\mathbb{R}$ *espace vectoriel euclidien. Alors, il existe au moins une base orthonormée B de E telle que :*
$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} \boxed{R_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{R_p} \end{pmatrix}$$

Avec $R_k = (1)$ *ou* $R_k = (-1)$ *ou :*
$$R_k = \begin{pmatrix} cos(\theta_k) & -sin(\theta_k) \\ sin(\theta_k) & cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$

$O_k \neq 0\ [\pi]$. *Dans ce dernier cas,* R_k *représente une rotation d'angle* θ_k

Chapitre 21

Adjoint d'un endomorphisme, Endomorphisme et matrice symétrique

21.1 Rappel

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, B=($\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n}$) une base orthonormé de E. Si :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i} \\ \overrightarrow{x'} = \sum_{k=1}^{n} x'_i \overrightarrow{e_i} \end{cases}$$

Alors :

$$< \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x'} >= \sum_{i=1}^{n} x_i x'_i$$

Soit X et X' les matrices de x et x' dans B. On obtient que :

$$< x | x' >=^t X.X'$$

Il faut bien noté que cette propriété n'est valable que dans une base orthonormée.

21.2 Propriétés - Définition d'un adjoint

Propriété 220 *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien de $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$\exists! f^* \in (E) \; tq \; \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 \;\; < f(\overrightarrow{x}) | \overrightarrow{y} >=< \overrightarrow{x} | f^*(\overrightarrow{y}) >$$

On montre l'unicité en en considérant deux, et on montre l'existance en utilisant le rappel ci-dessus.

Définition 136 *f^* est appelé l'adjoint de f, pour un produit scalaire défini. Cette adjoint dépend à priori du produit scalaire choisi.*

Propriété 221 *Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien, et B une base orthonormée de E, alors :*

$$mat_B f^* =^t (mat_B f)$$

Définition 137 *Un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien E est dit auto-adjoint ou symétrique si :*

$$f^* = f$$

D'après le propriété précédente, $f \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée est symétrique.

Propriété 222 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien.*
- $\rightarrow$ *Si f est symétrique, alors quelque soit la base orthonormée B de E, la matrice de f dans cette base est symétrique.*
- $\rightarrow$ *S'il existe une base orthonormée B de E telque la matrice de f soit symétrique, alors f est symétrique*

21.3 Propriétés élémentaires

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien. f et g désigne des endomorphisme de E.

Propriété 223 *Nous avons les propriétés suivantes :*
- $\rightarrow$ $(f+g)^* = f^* + g^*$
- $\rightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}\ (\lambda f)^* = \lambda f^*$
- $\rightarrow$ $(fog)^* = g^* o f^*$
- $\rightarrow$ $(f^*)^* = f$

Propriété 224 *Nous avons les propriétés suivantes :*

$$Ker(f^*) = (Im(f))^{\perp}$$

$$Im(f^*) = (Ker(f))^{\perp}$$

Propriété 225 *Si $\lambda \in Sp(f)$ et $\lambda' \in Sp(f^*)$. Si $\lambda \neq \lambda'$, alors :*
Ker($f - \lambda.Id$) et Ker($f^* - \lambda'.Id$) sont orthogonaux.

Propriété 226 *Soit F un sous espace vectoriel de E.*

$$(\text{ F est stable par f }) \Leftrightarrow (F^{\perp} \text{ est un sous espace vectoriel stable par } f^*)$$

21.3.1 Cas ou f et g sont symétrique

Corollaire 13 *L'ensemble des endomorphismes symétriques de E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*

Corollaire 14 *Nous avons les égalités suivantes :*

$$Ker(f) = (Im(f))^{\perp}$$

$$Im(f) = (Ker(f))^{\perp}$$

Corollaire 15 *Si λ et λ' sont deux valeurs propres distinct d'un endomorphisme f symétrique, alors :*
Ker($f - \lambda.Id$) et Ker($f - \lambda'.Id$) sont orthogonaux.

Corollaire 16 *Si f est symétrie et si F est un sous espace vectoriel de E :*

$$(\text{ F est stable par f }) \Leftrightarrow (\text{ F est un sous espace vectoriel stable par f })$$

21.4 Théorème d'orthogonalisation

Théorème 61 *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien de dimension finie n. Soit f un endomorphisme symétrique de E. Alors :*

→ *P_f est scindé sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que le spectre complexe de f est égale au spectre réel de f.*

→ *Les sous espaces vectoriels propre de f sont deux à deux orthogonaux et supplémentaires. En particulier, f est diagonalisable.*

→ *Il existe une base orthonormée de diagonalisation de f, c'est à dire une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.*

→ *Réciproquement, si f est un endomorphisme de E orthonormalement diagonalisable, c'est à dire si f admet une base orthonormée de diagonalisation, alors f est symétrique.*

On démontrer que le spectre complexe est égale au spectre réel en utilisant le produit scalaire hermitien canonique dans $\mathbb{C}^n$. Le fait que les sous espaces propres sont supplémentaire se démontre par récurrence sur la dimension de l'espace.

21.4.1 Corollaire matricielle

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique, alors A est orthonormalement diagonalisable, c'est à dire qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ telque $P^{-1}AP$ soit diagonale. Dans ce cas $P^{-1} = P^{\perp}$

21.5 Caractéristation par l'adjoint de certains endomorphismes classiques d'un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien, $f \in \mathcal{L}(E)$.

Propriété 227 *f est un projecteur orthogonal si et seulement si :*

$$\begin{cases} fof = f \\ f^* = f \end{cases}$$

Propriété 228 *Nous avons la propriété suivante :*

$$(f \in O(E)) \Leftrightarrow (fof^* = Id_E)$$

Propriété 229 *Nous avons la propriété suivante :*

$$f \text{ est symétrique orthogonale } \Leftrightarrow \begin{cases} f^2 = Id \\ f^* = f \end{cases}$$

Chapitre 22

Formes quadratiques

22.1 Formes quadratiques sur $\mathbb{R}^n$

Définition 138 *On appelle forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ toute application polynomiale homogène du second degrès de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, donc une application défini par :*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\xrightarrow{q} \mathbb{R} \\ X\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\mapsto q(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2 + 2.\sum_{\substack{1\leq i<j\leq n \\ i\neq j}} a_{ij}.x_j.x_i \end{aligned}$$

Avec :

$$\forall i \neq j,\ a_{ij} = a_{ji}$$

Quelques exemples

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto q(X) = ax^2 + by^2 + 2uxy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto q(X) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \end{aligned}$$

22.1.1 Forme bilinéaire symétrique associé à une forme quadratique

Propriété 230 *Si q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{R}^n$ telle que :*

$$\forall X \in \mathbb{R}\ q(X) = \varphi(X, X)$$

φ est appelé forme polaire de q. On montre l'existence de φ par la méthode de dédoublement des termes. Cette méthode consiste à remplacer dans l'expression de la forme quadrique :

$\to$ les $a_{ii}x_i^2$ par $a_{ii}x_ix_i'$

$\rightarrow$ *les* $2a_{ij}x_ix_j$ *par* $a_{ij}(x_ix'_i + x_jx'_j)$
On montre que l'unicité est du à l'identité de polarisation, qui permet d'exprimer φ *explicitement en fonction de q.*

22.1.2 Moyen mnémotechnique pour l'identité de polarsation

Dans le cas particulier où n=1, on a la forme quadratique suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

et sa forme polaire associé :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, x') &\mapsto xx' \end{aligned}$$

Dans ce cas particulier, on obtient, à l'aide d'identité remarquables :

$$\begin{cases} xx' = \dfrac{1}{2}((x - x')^2 - x^2 - x'^2) \\ \\ xx' = \dfrac{1}{4}((x + x')^2 - (x - x')^2) \end{cases}$$

En procédant par analogie, on obtient le cas général :

$$\begin{cases} \varphi(x, x') = \dfrac{1}{2}(q(x - x') - q(x) - q(x')) \\ \\ \varphi(x, x') = \dfrac{1}{4}(q(x + x') - q(x - x')) \end{cases}$$

Exemple

Dans l'exemple :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto q(X) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \end{aligned}$$

On obtient que la forme polaire associé est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) &\mapsto q(X) = xx' + yy' + zz' + \frac{1}{2}(xy' + x'y + yz' + y'z + zx' + z'x) \end{aligned}$$

22.1.3 Expressions matricielles de q et de φ

Propriété 231 *Soient q et* φ *une forme quadratique et sa forme polaire associé sur* $\mathbb{R}^n$*, alors :*

$$\begin{cases} \forall X \in \mathbb{R}^n \; q(X) =^t X.A.X \\ \forall (X, X') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \; \varphi(X, X') =^t X.A.X' \end{cases}$$

Avec A =(a_{ij})) matrice symétrique. (a_{ij} sont les composantes précédentes de la forme quadratique). On le démontrer en exprimant la forme polaire sous sa forme de somme, avec $a_{ij} = a_{ji}$:

$$\begin{aligned}\forall (X, X') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ \varphi(X, X') &= \sum_{(i,j)\in[1,n]^2} a_{ij} x_i x'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x'_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j y_j \quad (\textit{Avec } y_j \textit{ la j-ème composante de } Y =^t AX) \\ &=^t X'Y \textit{ (on reconnait le produit scalaire canonique de X et Y)} \\ &=^t X'^t AX \\ &=^t X'AX \textit{ (par symétrie de A)}\end{aligned}$$

Corollaire 17

$$\begin{aligned}\forall X \in \mathbb{R}^n \ q(X) &= \varphi(X, X) \\ &=^t XAX\end{aligned}$$

Propriété 232 *Il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telque :*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \ q(X) =^t X.A.X$$

A est appelé la matrice de la forme quadratique q dans la base canonique, et se note :

$$A = mat_{can}(q)$$

De même, A est l'unique matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telque :

$$\forall (X, X') \in (\mathbb{R}^n)^2 \ \varphi(X, X') = t^X.A.X'$$

On obtient :

$$A = mat_{can}(q) = mat_{can}(\varphi) = (a_{ij})$$

Avec :

$$\forall (i, j) \in [|1, n|]^2 \ a_{ij} = \varphi(\overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j})$$

Avec ($\overrightarrow{e_1}, ..., \overrightarrow{e_n}$) la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

22.1.4 Endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ associé à une forme quadratique q

$\mathbb{R}^n$ est munie du produit scalaire canonique. q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, de forme polaire φ, de matrice A sur la base canonique.

Propriété 233 *Il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ symétrique telque :*

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \ q(X) =< f(X)|X >$$

Cet endomorphisme vérifie aussi :

$$\begin{aligned}\forall (X, X') \in (\mathbb{R}^n)^2 \ < f(X)|X' > &=< X|f(X') > \\ &= \varphi(X, X')\end{aligned}$$

f est appelé l'endomorphisme symétrique associé à q dans ($\mathbb{R}^n, < | >$). De plus, nous avons :

$$mat_{can}(f) = mat_{can}(q)$$

On montre l'existence de f en prenant f l'endomorphisme canoniquement associé à A et en développant la forme polaire.

Exemple

Soit :

$$q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto ax^2 + by^2 + 2cxy$$

On obtient :

$$mat_{can}(q) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$$

22.1.5 Théorème de réduction orthonormale d'une forme quadratique de $\mathbb{R}^n$

Théorème 62 *$\mathbb{R}^n$ étant munie de son produit scalaire canonique euclidien, et q étant une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, il existe B=($\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}$) base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ telque si :*

$$X = x_1.\overrightarrow{u_1} + ... + x_n.\overrightarrow{u_n}$$

alors :

$$q(X) = \lambda_1.x_1'^2 + ... + \lambda_n.x_n'^2$$

ou les λ_i sont des valeurs propres associés à f, l'endomorphisme symétrique canoniquement associé à q. Une telle base B s'obtient en orthonormalisent f. En résumé, par un changement de base, on fait "disparaitre" les termes rectangles ($x_i.x_j$ ...)

22.1.6 Version matricielle du théorème de réduction orthonormale

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, et φ sa forme polaire. Soit A la matrice de q dans la base canonique, et f l'endomorphisme symétrique canoniquement associé à q dans $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.
Si $X \in \mathbb{R}^n$:

$$q(X) =^t X.A.X =< f(X)|X >$$

Changement de base

Soit B une nouvelle base de $\mathbb{R}^n$, B=($\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}$) et P la matrice de passage entre la base canonique et B. Soit $X' = mat_B(X)$. On sait que :

$$X = PX'$$

Donc :

$$q(X) =^t X.(^tP.A.P).X'$$

Posons A' = $^tP.A.P$. A' est symétrique et c'est l'unique matrice symétrique vérifiant l'expression précédent $\forall X \in \mathbb{R}^n$. Par définition :

$$A' = mat_B(q)$$

Propriété 234 *Si A=(a'_{ij}), alors :*

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2 \ a'_{ij} = \varphi(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j})$$

De plus, si B est une base orthonormée, alors :

$$A- =^t P.A.P = P^{-1}.A.P$$

On obtient donc que déterminer une base de réduction de q est équivalent à diagonaliser orthonormalement la matrice $mat_{can}(q)$.

22.2 Généralisation : Formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E

Définition 139 *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel quelconque, non nécessairement de dimension finie. On appelle forme quadratique sur E une application $q : E \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe φ application de $E \times E \to \mathbb{R}$ bilinéaire symétrique vérifiant :*

$$\forall \overrightarrow{x} \in E, q(\overrightarrow{x}) = \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x})$$

Propriété 235 *Avec les notations précédentes, φ est alors unique et appelé forme polaire q. On l'obtient à l'aide de l'identité de polarisation, que l'on peut démontrer en exprimant $q(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$*

Propriété 236 *En conservant les notations précédentes :*

$$\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 \ \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \frac{1}{4}[q(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) - q(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y})]$$

Propriété 237 *Si q est une forme quadratique sur E, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \overrightarrow{x} \in E \ q(\lambda.\overrightarrow{x}) = \lambda^2.q(\overrightarrow{x})$$

22.2.1 Exemples

Les formes quadratiques défini à la section précédente sur $\mathbb{R}^n$ sont des formes quadratiques au sens de la nouvelle définition générale. Réciproquement, toute forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^n$ au sens de la nouvelle définition est une application polynomiale homogène du 2^{nd} degrès. En résumé, les formes quadratiques définies au paragraphe 1 sur $\mathbb{R}^n$ sont des cas particuliers des formes quadratiques défini globalement.

22.2.2 Expression dans une base, matrice d'une forme quadratique dans une base

On se plance dans le cas d'un espace E de dimension finie.

Propriété 238 *Soit q, application de E dans $\mathbb{R}$, une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E de dimension n. φ est sa forme polaire. Soit B=$(\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ une base de E. Si :*

$$\begin{cases} \overrightarrow{x} = x_1.\overrightarrow{u_1} + ... + x_n.\overrightarrow{u_n} \\ \overrightarrow{y} = y_1.\overrightarrow{u_1} + ... + y_n.\overrightarrow{u_n} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} q(\overrightarrow{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2 + 2.\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}.x_i.x_j \\ \\ \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \displaystyle\sum_{(i,j) \in [|1,n|]^2} a_{ij}.x_i.x_j \end{cases}$$

Réciproquement, si q est une application E dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E \ q(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.x_i^2 + 2.\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}.x_i.x_j$$

alors q est une forme quadratique et sa forme polaire φ est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\to \mathbb{R} \\ (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) &\mapsto \sum_{(i,j) \in [1,n]^2} a_{ij}.x_i.x_j \end{aligned}$$

Définition 140 *Avec les notations précédentes, la matrice A=(a_{ij}) telque :*

$$\forall (i,j) \in [1,n]\ a_{ij} = \varphi(\overrightarrow{u_i}, \overrightarrow{u_j})$$

A est appelé matrice de q ou de φ dans la base B.

Propriété 239 *Avec les notations et définitions précédentes, A est l'unique matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telque :*

$$\forall \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i.\overrightarrow{u_i} \in E, q(\overrightarrow{x}) =^t X.A.X$$

Avec X la matrice de $\overrightarrow{x}$ dans B.

22.2.3 Changement de Base

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n, B et B′ deux bases de E. Soit P la matrice de passage entre B et B′. q est une forme quadratique sur E. A est la matrice de q dans B, A′ la matrice de q dans B′ :

$$A' = t^P.A.P$$

Définition 141 *Si A et A′ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A et A′ sont congruente s'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telque :*

$$A' =^t P.A.P$$

On défini ainsi une relation d'équivalence sur E. Deux matrices congruentes sont en particulier équivalentes. Donc deux matrices congruentes ont même rang.

Définition 142 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie. On appelle rang de q le rang de sa matrice sur une base B de E. Cette définition ne dépend pas de la base B choisie.*

Définition 143 *Si E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n et q une forme quadratique sur E. On dit que q est non dégénéré si rang(q)=n, c'est à dire si la matrice de q sur une base est inversible.*

22.2.4 Endomorphisme symétriques associés à une forme quadratique dans un espace vectoriel euclidien

Propriété 240 *Soit q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien E, alors il existe un unique endomorphisme f$\in \mathcal{L}(E)$, symétrique (pour le produit scalaire de E) telque :*

$$\forall \overrightarrow{x} \in E\ q(\overrightarrow{x}) =< f(\overrightarrow{x})|\overrightarrow{x} >$$

En outre, quelque soit la base B orthonormée de E :

$$mat_B(f) = mat_B(q)$$

De plus, si φ est la forme polaire de q :

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2,\ \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) =< f(\overrightarrow{x})|\overrightarrow{x} >=< \overrightarrow{x}|f(\overrightarrow{x}) >$$

22.2.5 Réduction orthonormale d'une forme quadratique dans un espace vectoriel euclidien

Théorème 63 *Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien de dimension n, q une forme quadratique sur E, alors il existe une base B orthonormée de E et des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ telque :*

$$\forall \overrightarrow{x} = x_1.\overrightarrow{u_1} + ... + x_n.\overrightarrow{u_n} \in E\ q(\overrightarrow{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i^2$$

Une telle base B s'obtient en orthonormalisent l'endomorphisme symétrique f associé à q.
Avec les notations précédentes, si $\overrightarrow{y} = y_1.\overrightarrow{u_1} + ... + y_n.\overrightarrow{u_n}$ *et si* φ *est la forme polaire de q :*

$$\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i.y_i$$

22.3 Application à la réduction de coniques

Définition 144 *Soit E un* $\mathbb{R}$ *espace affine de dimension 2. Soit* $\mathcal{R}$ *un repère de E. On appelle conique au sens large un sous ensemble* (Γ) *de E admettent dans* $\mathcal{R}$ *une équation du type :*

$$P(x, y) = 0$$

Avec P polynome du second degrès :

$$P(x, y) = a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2 + u.x + v.y + h$$

Avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$*. Soit* $\Omega = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*. On défini une forme quadratique q par :*

$$\overrightarrow{E} \rightarrow \mathcal{R}$$

$$x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} \mapsto a.x^2 + 2.b.x.y + c.y^2$$

Avec $\overrightarrow{E}$ *l'espace vectoriel associé à E. Nous avons donc :*

$$mat_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}(q) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

On défini de même une forme linéaire l par :

$$\overrightarrow{E} \rightarrow \mathcal{R}$$

$$x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} \mapsto u.x + v.y$$

Avec ces notations, l'équation de (Γ) *s'écrit :*

$$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow q(\overrightarrow{OM}) + l(\overrightarrow{OM}) + h = 0$$

Propriété 241 *Si* $\mathcal{R}'$ *est un autre repère de (E) si* (Γ) *a pour équation P(x,y)=0, avec P polynome du* 2^{nd} *degrès. dans le repère* $\mathcal{R}$*, alors* (Γ) *a pour équation :*

$$Q(x, y) = 0$$

avec Q polynome du 2^{nd} *degrès. Autrement dit, la définition ci-dessus ne dépend pas du repère choisi.*

22.3.1 Cas général

On suppose ici E euclidien et $\mathcal{R}$ un repère orthonormée. En réduisant d'abord orthonormalement q, ce qui revient à un changement de repère par rotation, puis en effectuant éventuellement un deuxième changement de repère par translation, on montre qu'il existe un repère orthonormée $\mathcal{R}_1$ dans lequel (Γ) à une équation du type (a,b>0) :

→ Coniques non dégénéré :
  - → $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. C'est une ellipse. q a deux valeurs propres de même signe
  - → $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. C'est une hyperbole. q a deux valeurs propres de signe contraire
  - → $x_1^2 = 2.p.y_1$. C'est une parabole. q a 1 valeur propre nulle.

→ Coniques dégénéré :

$\rightarrow \ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 0$. (Γ) est réduit au point (0,0).

$\rightarrow \ \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = \alpha < 0$. (Γ) est égale au vide.

$\rightarrow \ \dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2} = 0$. (Γ) est la réunion de deux droites sécantes.

Pour déterminer la conique associé à (Γ), on peut utiliser la méthode suivantes : Soit A la matrice de q ou de f dans une base orthonormée de dimension 2. Soit λ_1 et λ_2 les valeurs propres associé à A. On montre que :

$\rightarrow$ λ_1 et λ_2 non nulle et de même signe $\Leftrightarrow$ det(A) > 0

$\rightarrow$ λ_1 et λ_2 non nulle et de signe contraire $\Leftrightarrow$ det(A) < 0

De plus, si (Γ) est une conique dégénéré, les sous espaces propres vectoriels de f fournissent les dimensions vectorielles des axes de la conique.

Dans le cas d'un hyperbole, on obtient les droites parallèles au asymptotes en annulant q.

22.4 Catalogue des quadriques dans un $\mathbb{R}$ espace affine E (euclidien) de dimension 3

Définition 145 *On appelle quadrique de (E) un ensemble (Σ) telque qu'il existe un repère $\mathbb{R}$ de E dans lequel (Σ) a pour équation P(x,y,z) = 0, avec P un polynome à coefficiant réele du 2^{nd} degrès.*

Propriété 242 *Dans ce cas, $\forall \mathcal{R}'$ repère de (E), (Σ) admet également une équation polynomiale de degrès 2 dans $\mathcal{R}'$.*

22.4.1 Catalogue des quadriques

On suppose E euclidien, $\mathcal{R}$ un repère orthonormée. Pour simplifier l'équation de (Σ), on commence par réduire orthonormalement la forme quadratique q, c'est à dire diagonalisé orthonormalement l'endomorphisme symétrique f qui va de $\overrightarrow{E}$ dans $\overrightarrow{E}$ associé à q. On sait que l'on peut eliminer les termes rectangles. On va classer les quadriques possibles suivant, essentiellement, le nombre de valeur propre non nulle.

Les trois valeurs propres sont non nulle

En développent les expressions, on montre que l'on obtient qu'il $\exists \Omega \in E \ / \ Si \ M \underset{\mathcal{R}''}{\equiv} (X, Y, Z)$, alors :

$$M \in (\Sigma) \Leftrightarrow \lambda_1.X^2 + \lambda_2.Y^2 + \lambda_3.Z^2 = h'$$

On montre que ceci équivaut à :

$$\begin{cases} \varepsilon_1.\dfrac{X^2}{a^2} + \varepsilon_2.\dfrac{Y^2}{b^2} + \varepsilon_3.\dfrac{Z^2}{c^2} = 1 \ si \ h' \neq 0. \\ \varepsilon_1.\dfrac{X^2}{a^2} + \varepsilon_2.\dfrac{Y^2}{b^2} + \varepsilon_3.\dfrac{Z^2}{c^2} = 0 \ si \ h' = 0. \end{cases}$$

Avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \pm 1$. Quitte à permutter les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ de la base B', nous avons les possibilités suivantes :

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (+1, +1, +1) \ (1)$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (+1, +1, -1) \ (2)$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (+1, -1, -1) \ (3)$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (-1, -1, -1) \ (4)$$

Dans tous les cas suivants, on montre que l'on obtient les cas suivantes à partir de cas plus simple, au moyen d'affinité.

Cas (1) Σ est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

La quadrique se déduit de la sphère unité par au plus 3 affinité droites. On obtient un ellipsoïde (allongé ou aplati). Ω est un center de symétrie. Les axes de coordonnée dans $\mathcal{R}''$ en sont les axes de symétries.

Cas (1′) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$$

C'est une quadrique dégénéré associé à 1 point :

$$(\Sigma)=\{\Omega\}$$

Cas (2) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

(Σ) est un hyperboloide elliptique à une nappe

Cas (2′) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$

(Σ) est le cône asymptote de l'hyperbolide elliptique précédent.

Cas (3) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

(Σ) est un hyperbolide elliptique de révolution à deux nappes

Cas (3′) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$

(Σ) est le cone asymptote du cas précédent.

Cas (4) (Σ) est défini par :

$$-\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

$(\Sigma)=\emptyset$

Cas (4′) (Σ) est défini par :

$$-\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$

$(\Sigma)=\{\Omega\}$

Deux valeurs propres distinct, la troisième nulle

Quitte à réordonnée les vecteurs propres, $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ de la vase B′ on peut supposé :

$$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0,\ \lambda_3 = 0$$

De la même façon que précédement :

$$\begin{cases} \varepsilon_1.\dfrac{X^2}{a^2} + \varepsilon_2.\dfrac{Y^2}{b^2} = Z \; si \; \omega_0' \neq 0. \\ \varepsilon_1.\dfrac{X^2}{a^2} + \varepsilon_2.\dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \; si \; \omega_0' = 0,\ h' \neq 0. \\ \varepsilon_1.\dfrac{X^2}{a^2} + \varepsilon_2.\dfrac{Y^2}{b^2} = 0 \; si \; \omega_0' = 0,\ h' = 0. \end{cases}$$

Quitte à permutter $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$, on peut avoir les cas suivants :

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (+1, +1)\ (1)$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (-1, -1)\ (2)$$

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (+1, -1)\ (3)$$

Cas (1) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

(Σ) est un paraboloide elliptique

Cas (2) (Σ) est défini par :

$$-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

On peut se ramener au cas précédent en changent de repère.

Cas (3) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = Z$$

(Σ) est un paraboloide hyperbolique.
Dans les cas suivants, l'équation est du type :

$$f(X, Y) = 0$$

On montre que ces surfaces sont des cylindres.

Cas (4) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

(Σ) est l'intersection des plans X=0 et Y=0. C'est à dire :

$$(\Sigma) = (\Omega.Z) = \Omega + Vect(\overrightarrow{u_3})$$

C'est une quadrique dégénéré.

Cas (5) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$$

(Σ) est la réunion de deux plans parallèle à Oz.

Cas (6) (Σ) est défini par :

$$-\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$(\Sigma) = \emptyset$

Cas (7) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

(Σ) est un cylindre hyperbolique de génératrice parallèle à Ωz.

Cas (8) (Σ) est défini par :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

(Σ) est un cylindre hyperbolique de génératrice parallèle à Ωz.

Une seule valeur propre non nulle

Quitte à réordonnée les vecteurs propres, $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$ de la vase B′ on peut supposé :

$$\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0$$

Cas 1 Si $(v', w') \neq (0, 0)$. Dans un certain repère, on montre que l'équation de (Σ) est donnée par :

$$X^2 - 2.p.Y = 0$$

(Σ) est un cylindre parabolique de génératice paralèlle (Ωz)

Cas 2 Si $(v', w') = (0, 0)$, on obtient une équation du type :

$$X^2 = h''$$

Nous avons les cas suivants :

→ h″ < 0 ⇒ (Σ) = 0

→ h″ = 0 ⇒ (Σ) est le plan X=0

→ h″ > 0 ⇒ (Σ) est la réunion de deux plans

Chapitre 23

Applications linéaires continues, normes subordonnées

23.1 Application linéaires continues

Soient (E,$\|\ \|$) et (E',$\|\ \|'$) deux K espaces vectoriel (K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f \in \mathcal{L}(E, E')$.
Rappel :

$$\begin{aligned} \text{f est continue sur E} \Leftrightarrow\ & \text{f est continue en tout } \overrightarrow{x_0} \in E \\ \Leftrightarrow\ & \forall \overrightarrow{x_0} \in E \ \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{x_0}) \\ \Leftrightarrow\ & \forall \overrightarrow{x_0} \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ / \ \| \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0} \| \leq \alpha \Rightarrow \| f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{x_0}) \|' \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Propriété 243 *Nous avons la propriété suivante :*

$$f \in \mathcal{L}(E, E') \text{ est continue sur E } \Leftrightarrow f \text{ est continue en } \overrightarrow{0}$$

On le démontre en explicitant le rappel précédent et en utilisant la linéarité de f.

Propriété 244 $f \in \mathcal{L}(E, E')$ *est continue sur E* $\Leftrightarrow$ *f est bornée sur* $\overline{B}(\overrightarrow{0}, 1)$ *avec :*

$$\overline{B}(\overrightarrow{0}, 1)) \{ \overrightarrow{x} \in E \ / \ \| \overrightarrow{x} \| \leq 1 \}$$

Propriété 245 *Soit* $f \in \mathcal{L}(E, E')$*, avec E et E' des K espaces vectoriels normés.*

$$f \text{ est continue sur E } \Leftrightarrow f \text{ est bornée sur la sphère unité}$$

Avec $S(\overrightarrow{0}, 1)$ *la sphère unité définie par :*

$$S(\overrightarrow{0}, 1) = \{ \overrightarrow{x} \in E \ / \ \| \overrightarrow{x} \| = 1 \}$$

Théorème 64 *Si E est un K espace vectoriel normé de dimension finie, et E' un K espace vectoriel normé, alors toute application linéaire* $\in \mathcal{L}(E, E')$ *est continue.*

Rappel :
La somme de deux applications continues sur E est continue sur E (qu'elles soient ou non linéaire).
Le produit par $\lambda \in K$ (K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) d'une application continue sur E est continue sur E (toujours que l'application soit linéaire ou non).
Si : $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$ sont des applications continues alors gof aussi (encore une fois que f et g soient linéaire ou non).
Il en résulte, dans le cas des applications linéaires, les propriétés suivantes :

Propriété 246 *L'ensembe* $\mathcal{L}_C(E, E')$ *des applications linéaires continues de l'espace vectoriel normé E dans l'espace vectoriel normé E' est un K sous espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E, E')$ *[pour les lois + et* λ*.]*

Propriété 247 $\mathcal{L}_C(E) = \mathcal{L}_C(E, E)$ *est une K-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$ *[pour les lois +,*λ*. et o]*

23.2 Normes subordonnées

23.2.1 Propriété et définition

Définition 146 *Soient (E,$\| \|$) et (E',$\| \|'$) deux K espace vectoriel normé (K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors :*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C(E,E') &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \| f \|_* = \sup_{\overrightarrow{x}\in\overline{B}(\overrightarrow{0},1)} \| f(\overrightarrow{x}) \|' \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathcal{L}_C(E,E')$ appelé norme subordonnée aux normes $\| \|$ sur E et $\| \|'$ sur E'.

NB :
f étant linéaire contiue, f est bornée sur $\overline{B}(\overrightarrow{0},1)$, donc $\sup_{\overrightarrow{x}\in\overline{B}(\overrightarrow{0},1)} \| f(\overrightarrow{x}) \|'$ existe dans $\mathbb{R}_+$

Propriété 248 *Si $f \in \mathcal{L}_C(E,E')$:*

$$\begin{aligned} \sup_{\overrightarrow{x}\in\overline{B}(\overrightarrow{0},1)} \| f(\overrightarrow{x}) \|' = \sup_{\overrightarrow{x}\in S(\overrightarrow{0},1)} \| f(\overrightarrow{x}) \|' &= \sup_{\overrightarrow{x}\in E-\{\overrightarrow{0}\}} \frac{\| f(\overrightarrow{x}) \|'}{\| \overrightarrow{x} \|} \\ &= \sup_{\overrightarrow{x}\in\overline{B}(\overrightarrow{0},1),\overrightarrow{x}\neq\overrightarrow{0}} \frac{\| f(\overrightarrow{x}) \|'}{\| \overrightarrow{x} \|} \end{aligned}$$

23.2.2 Normes Matricielle subordonnée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et f :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto AX \end{aligned}$$

l'application linéaire canoniquement associé à A.
Munissons $\mathbb{R}^p$ d'une norme $\| \|$ et $\mathbb{R}^n$ d'une norme $\| \|'$. On note alors : $\| A \|_* = \| f \|_*$ la norme de f subordonnée aux normes $\| \|$ et $\| \|'$. Donc :

$$\| A \|_* = \sup_{\overrightarrow{x}\in E-\{\overrightarrow{0}\}} \frac{\| AX \|'}{\| X \|} = \sup_{\overrightarrow{x}\in\overline{B}(\overrightarrow{0},1)} \| AX \|' = \sup_{\overrightarrow{x}\in S(\overrightarrow{0},1)} \| AX \|'$$

Propriété 249 *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A &\mapsto \| A \|_* \end{aligned}$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

23.2.3 Propriété fondamentale de la norme $\| \|_*$

Propriété 250 *Soit $f \in \mathcal{L}_C(E,E')$, avec toujours les mêmes notations pour E et E'. Alors $\forall \overrightarrow{x} \in E$:*

$$\| f(\overrightarrow{x}) \| \leq \| f \|_* \| \overrightarrow{x} \|$$

Corollaire :
Si $f \in \mathcal{L}_C(E,E')$, alors f est $\| f \|_*$ lipchitzienne et donc uniformement continue.
Corollaire fondamentale :
La norme $\| \|_*$ est sous multiplicative. C'est à dire que si $f \in \mathcal{L}_C(E,E')$ et $g \in \mathcal{L}_C(E,E')$, avec (E,$\| \|$), (E',$\| \|'$) et (E'',$\| \|''$) des K espaces vectoriels normés alors :

$$\| gof \|_* \leq \| f \|_* \| g \|_*$$

Nous avons la propriété analogue pour les matrices.

23.2.4 Norme d'Algèbre

Définition 147 *Soit $(\mathcal{A}, +, \lambda., \times)$ une K-algèbre, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Une norme sur le K espace vectoriel $(\mathcal{A}, +, \lambda.)$ est appelé norme d'Algèbre si elle est sous multiplicative, c'est à dire si :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{A} \ \parallel x \times y \parallel \leq \parallel x \parallel \parallel y \parallel$$

$(\mathcal{A}, +, \lambda., \times, \parallel \ \parallel)$ est appelé alors une Algèbre normé.

Norme subordonnée à $\parallel \ \parallel_1$

Considérons le cas ou $K = \mathbb{R}$. Pour obtenir le résultat suivant, comme dans tout les cas suivant, on cherche à majorer la norme $\parallel \ \parallel_*$ subordonnée à la norme considéré, puis à montrer un X particulier qui permet d'obtenir l'égalité. Si $\mathbb{R}^n$ est munie de $\parallel \ \parallel = \parallel \ \parallel_1$, alors :

$$\parallel A \parallel_* = \max_{1 \leq j \leq n} \parallel C_j \parallel_1$$

Dans ce cas, le X particulier à considérer est : Si $\max\limits_{1 \leq j \leq n} \parallel C_j \parallel_1 = \parallel C_{j0} \parallel$, alors X = C_{j0}.
On obtient un résultat équivalent dans le cas où $K = \mathbb{C}$.

Norme subordonnée à $\parallel \ \parallel_\infty$

Considérons le cas ou $K = \mathbb{R}$. Dans ce cas, on obtient que :

$$\parallel A \parallel_* = \max_{1 \leq i \leq n} \parallel L_i \parallel_1$$

Dans ce cas, le X particulier à considérer est : Si $\max\limits_{1 \leq i \leq n} \parallel L_i \parallel_1 = \parallel L_{i0} \parallel_1 = \parallel a_{i0,1} \ldots a_{i0,n}$, alors on prend :

$$X = \begin{pmatrix} signe(a_{i0,1}) \\ \vdots \\ signe(a_{i0,n}) \end{pmatrix}$$

Norme subordonnée à $\parallel \ \parallel_2$, la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$

Au cours de la démonstration, nous avons énoncé les définitions et propritétés suivantes :

Définition 148 *Un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien E est dit positif (repectivement défini positif) si la forme quadratique qui lui est associé est positive (respectivement définie positive)*

Propriété 251 *Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel euclidien E :*

$$\begin{aligned} f \text{ positif } &\Leftrightarrow S_p(f) \subset \mathbb{R}_+ \\ f \text{ défini positif } &\Leftrightarrow S_p(f) \subset \mathbb{R}_+^* \end{aligned}$$

On obtient en faisant comme d'habitude : Si $\parallel \ \parallel = \parallel \ \parallel_2$, la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\parallel A \parallel_* = \sqrt{\rho({}^t AA)}$$

Avec $\rho({}^t AA)$ le rayon spectral de ${}^t AA$.

23.2.5 Suite d'endomorphisme en dimension finie

Propriété 252 *Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'endomorphisme d'un K espace vectoriel normé (E,$\parallel \ \parallel$) de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\rightarrow$ *$f_k \rightarrow f$ quand $k \rightarrow \infty$ (de plus, les espaces sont de dimensions finies, donc la convergence ne dépend pas de la norme considéré)*
- $\rightarrow$ *f_k converge uniformement vers f sur toute parties bornées.*

$\rightarrow$ f_k *converge uniformement vers f sur tout compact.*
$\rightarrow$ $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $f_k(\overrightarrow{x}) \underset{k\to+\infty}{\rightarrow} f(\overrightarrow{x})$ *(*$|f_k|$ *converge simplement vers f sur E)*
$\rightarrow$ $\forall B$ *base de E et* $\forall \overrightarrow{e} \in B$ $f_k(\overrightarrow{e}) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} f(\overrightarrow{e})$
$\rightarrow$ $\exists B$ *base de E telque* $\forall \overrightarrow{e} \in B$ $f_k(\overrightarrow{e}) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} f(\overrightarrow{e})$
$\rightarrow$ $\forall B$ *base de E,* $mat_B(f_k) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} mat_B(f)$
$\rightarrow$ $\exists B$ *base de E telque* $mat_B(f_k) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} mat_B(f)$

Septième partie

Autres

Chapitre 24

Anneau (et $\mathbb{Z}$-module) $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

24.1 Convergence modulo $n \in \mathbb{N}^*$

Définition 149 *Si (a,b)$\in \mathbb{Z}^2$:*

$$\begin{aligned} a \equiv b\ [n] &\Leftrightarrow n | a-b \\ &\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \ / \ a-b = nq \end{aligned}$$

Propriété 253 *$\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.*

Propriété 254 *Si (a,b)$\in \mathbb{Z}^2$, a$\equiv$ b $[n]$ $\Leftrightarrow$ a et b ont un même reste dans leurs divisions euclidienne par n*

Corollaire 18 *Parmis les élements de $\mathbb{Z}$ congrus à $a \in \mathbb{Z}$ modulo n, il en existe un et un seul $\in \{0, \ldots, n-1\}$*

Propriété 255 *Si :*

$$\begin{cases} a \equiv b\ [n] \\ a' \equiv b'\ [n] \end{cases}$$

alors :

$$\begin{cases} a + a' \equiv b + b'\ [n] \\ aa' \equiv bb'\ [n] \\ \forall \lambda \in \mathbb{Z}\ \lambda a = \lambda b\ [n] \end{cases}$$

24.2 Anneau (et $\mathbb{Z}$-module) $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

Définition 150 *n étant toujours un entier $\in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ est l'ensemble des classes d'équivalence modulo la relation $\equiv$ [n]. Si $x \in \mathbb{Z}$, on note $\overline{x}$ la classe de x modulo la relation $\equiv$ [n] :*

$$\overline{x} = \{x' \in \mathbb{Z} \ / \ x' \equiv x[n]\} \qquad = \{x + nq \ / \ q \in \mathbb{Z}\}$$

(Les classes formes une partition de $\mathbb{Z}$)

Remarque : Nous avons la relation précédente, qui permet de faire le lien entre classe et entiers :

$$\overline{x} = \overline{x'} \text{ dans } \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \Leftrightarrow x \equiv x'\ [n]$$

24.2.1 Opérations +,$\times$,λ. sur $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

On défini les opérations suivantes :

$$\begin{cases} \overline{x} + \overline{x'} = \overline{x + x'} \\ \overline{x}\overline{x'} = \overline{xx'} \\ \forall \lambda \in \mathbb{Z}\ \lambda\overline{x} = \overline{\lambda x} \end{cases}$$

Remarque : Si $\overline{x} = \overline{x_1}$ et $\overline{x'} = \overline{x'_1}$, on as alors $\overline{x + x'} = \overline{x_1 + x'_1}$. Ceci permet de s'assurer que la définition précédente est bien une définition.

Propriété 256 *$\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ possède n classes.*

Propriété 257 *($\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$,+,$\times$) est un anneau commutatif.*

24.2.2 Les élements inversibles de $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$

Définition 151 *Le nombre d'élements $\in [|1, n|]$, premier avec n, est noté $\varphi(n)$. $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est appelé indicateur d'Euler.*

Corollaire 19 *($\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$,+,$\times$) est un corps $\Leftrightarrow$ n est premier.*

Huitième partie

Annexe

Annexe A

Intégrales généralisées

A.1 Convergence d'une intégrale

A.1.1 Propriétés

Il existe trois propriétés qui permettent de prouver la convergence, d'une intégrale complexe, à l'aide d'une intégrale "simple".
$\rightarrow$ La convergence d'une intégrale de fonction positive par majoration (Implication)
$\rightarrow$ L'intégration par domination (Implication)
$\rightarrow$ La convergence des intégrale de fonction positive par equivalence (Équivalence)

A.1.2 Fonctions "classique"

Il existe plusieurs "cas" standard, au quel on peut se rapporter pour démontrer la convergence d'une intégrale

En ∞

Nous retiendrons que dans l'étude en $+\infty$, les α "tendent plus vers l'infini" (utilisation du > dans les relations).
Nous avons la règle de Riemann :

Propriété 258 *Soit f fonction continue par morceaux de $[a, \infty[$ dans K.*
Si il existe $\alpha > 1$ telque :

$$t^\alpha f(t) \underset{t\to\infty}{\rightarrow} 0$$

Alors f est intégrable (converge absolument) sur $[a, \infty[$

Nous avons aussi l'intégrale de Bertrand :

Propriété 259 *Soit a un réel strictement superieur à 1, et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.*

$$\left(\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha ln(x)^\beta} \textit{ converge}\right) \Leftrightarrow (\alpha > 1,\ ou\ \alpha = 1, \beta > 1)$$

La propriété suivante n'est qu'un cas particulier de l'intégrale de Bertrand, ou $\beta = 0$:

Propriété 260 *Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$:*

$$\left(\int_a^\infty \frac{dt}{t^\alpha}\right) \textit{ converge } \Leftrightarrow (\alpha > 1)$$

En 0

Nous retiendrons que l'ordre de l'étude en 0, les α "tend en quelque sorte plus vers 0" (utilisation du < dans les relations).
Nous avons la règle de Riemann :

Propriété 261 *Soit f fonction continue par morceaux de* $]0, a]$ *dans K.*
Si il existe $\alpha < 1$ *telque :*

$$t^{\alpha} f(t) \underset{t \to 0^{+}}{\to} 0$$

Alors f est intégrable (converge absolument) sur $]0, a]$

Dans le cas de l'intégralde de Bertrand, nous retiendrons que le second cas, $\alpha = 1,\ \beta > 1$, est identique en l'infini et en 0.
Nous avons aussi l'intégrale de Bertrand :

Propriété 262 *Soit a un réel telque* $a \in]0, 1[$*, et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left(\int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha} ln(x)^{\beta}} \textit{ converge} \right) \Leftrightarrow (\alpha < 1,\ ou\ \alpha = 1, \beta > 1)$$

La propriété suivante n'est qu'un cas particulier de l'intégrale de Bertrand, ou $\beta = 0$:

Propriété 263 *Soit* $a \in \mathbb{R}$*,* $a > 0$ *:*

$$\left(\int_0^a \frac{dt}{t^{\alpha}} \right) \textit{ converge } \Leftrightarrow (\alpha < 1)$$

A.2 Divergence d'une intégrale

A.2.1 Les règles de Riemann

Les règles de Riemann nous donne les moyens de prouver la divergence d'une intégrale.

En ∞

Soit f fonction de $[a, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux. Si :

$$t.f(t) \underset{t \to \infty}{\to} 0$$

Alors :

$$\int_a^{\infty} \text{ diverge}$$

En 0

Soit f fonction de $]0, a]$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux. Si :

$$t.f(t) \underset{t \to 0}{\to} 0$$

Alors :

$$\int_0^a \text{ diverge}$$

Annexe B

Développement asymptotiques

Il existe une méthodologie "classique" à utiliser dans le cas d'un développement asymptotique.

B.1 Fonction du type f^α, ou ln(f)

Pour obtenir le développement asymtotique de fonction du type f^α, ou ln(f), on range les termes de façon prépondérant décroissante, puis on met toujours le terme prépondérant en facteur, et enfin on effectue un développement limité avec le reste, qui tend vers 0.
Exemple : Considérons le fonction ln($x^2 + x + 1$). Cette fonction est rangé en considérant la prépondérance en l'infini. On obtient donc :

$$ln(x^2 + x + 1) = ln((x^2)(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$$

$$ln(x^2 + x + 1) = ln(x^2) + ln(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})$$

On effectue un développement limité de la forme ln(1+u), avec u qui tend vers 0.

B.2 Développement asymptotique de S_n ou de R_n dans le cas d'une série

La première question à se poser est de savoir si la série $\sum_n u_n$ converge.

B.2.1 Si la série converge

Si la série converge, alors :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

On poursuit en écrivant l'égalité suivante :

$$S_n = S - R_n$$

Pour continuer le développement asymptotique, il faut donc détérminer un équivalent à R_n

B.2.2 Si la série diverge

Alors on cherche directement un équivalent de S_n

B.2.3 Méthode à suivre

Pour obtenir un équivalent de S_n, dans le cas divergent, ou un équivalent de R_n dans le cas convergent, on simplifie le problème en remplacent u_k par un équivalent w_k plus simple.
On obtient alors :

$$S_n \underset{\infty}{\sim} \sum_{k=n_0}^{n} w_k \text{ cas non sommable}$$

$$R_n \underset{\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} w_k \text{ cas sommable}$$

L'utilisation de ceci ramène le problème de recherche d'équivalent de la somme partielle ou du reste de la série $\sum\limits_k w_k$, avec (w_k) appartenant à une échelle de comparaison. :

$$w_k = k^\alpha . ln(k)^\beta . e^{P(k)}$$

Avec P(k) un pseudo polynome.
Pour obtenir un équivalent, on distingue deux cas :

- $\rightarrow$ Si (w_k) est à variation lente ($P = 0$ ou deg(P)<1), alors on encadre par des intégrales
- $\rightarrow$ Si (w_k) est à variation rapide (deg(P) ≥ 1), on utilise une comparaisons asymptotique entre $w_{k+1} - w_k$ et w_k.

Les relations de comparaions utilisable dans le second cas sont :

$$\gg ; \ll ; \sim$$

Annexe C

Séries

C.1 Propriétés générales

Pour montrer la convergence d'une série $\sum_n u_n$, il faut déjà vérifier que $(u_n) \underset{\infty}{\to} 0$. Ceci est une condition necessaire, mais non suffisante.
Nous avons trois propriétés générales qui implique la convergence à l'aide d'un terme générale plus simple :
→ La convergence d'une série de terme général positive par majoration (Implication)
→ L'intégration par domination (Implication)
→ La convergence d'une serie de terme générale par équivalence (Équivalence)

C.2 Règle usuelle

C.2.1 Convergence des séries de Riemann

Soit une séries de Riemman, de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}$$

Cette série converge si et seulement si :

$$(\alpha > 1)$$

C.2.2 Règle de Riemann - Convergence

Soit (u_n) une suite à valeur complexe.
Si il existe $\beta > 1$ telque :

$$(n^\beta . u_n \underset{\infty}{\to} 0$$

Alors (u_n) est sommable

C.2.3 Règle de Riemann - Divergence

Soit (u_n) une suite à valeur réelle.
Si :

$$n.u_n \underset{\infty}{\to} \infty$$

Alors la série de terme générale u_n diverge.

C.2.4 Série de Bertrand

Soit une série de Bertrand, de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha . ln(n)^\beta}$$

Cette série converge si et seulement si :

$$(\alpha > 1 \; ou \; \alpha = 1 \; et \; \beta > 1)$$

C.2.5 Règle de d'Alembert

Soit (u_n) une suite de réels telques $\forall n \geq n_0$, $u_n > 0$ et telque :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{\infty}{\rightarrow} l$$

Alors :
- $\rightarrow$ Si l > 1, alors la série de terme général u_n diverge grossièrement
- $\rightarrow$ Si l < 1, alors la série converge

Annexe D

Calcul matriciel par blocs

D.1 Produit matriciel par blocs

Considérons deux matrices A et A' :

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overset{\beta_1}{\leftrightarrow} & \cdots & \overset{\beta_p}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} \alpha_1 \updownarrow \\ \vdots \\ \alpha_n \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \cdots & \boxed{A_{1p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{A_{n1}} & \cdots & \boxed{A_{np}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A' = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \overset{\gamma_1}{\leftrightarrow} & \cdots & \overset{\gamma_q}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{array}{c} \beta_1 \updownarrow \\ \vdots \\ \beta_p \updownarrow \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{A'_{11}} & \cdots & \boxed{A'_{1q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{A'_{p1}} & \cdots & \boxed{A'_{pq}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec :

$$\begin{cases} A_{ij} \in \mathcal{M}_{\alpha_i,\beta_j}(K) \\ A'_{kl} \in \mathcal{M}_{\beta_k,\gamma_l}(K) \end{cases}$$

On défini de plus :

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ \beta = \beta_1 + \cdots + \beta_p \\ \gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_q \end{cases}$$

On obtient, pour le produit de A' par A :

$$A.A' = \begin{pmatrix} \boxed{C_{11}} & \cdots & \boxed{C_{1q}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{C_{n1}} & \cdots & \boxed{C_{nq}} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik}.A'_{kj}$$

L'ordre du produit réalisé dans la somme a une importance à priori, car le produit des matrices n'est pas commuatif, à priori.

D.1.1 Cas particuliers

Matrices diagonales

Soient A et A′ deux matrices diagonales :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overset{\beta_1}{\leftrightarrow} & \quad\cdots\quad & \overset{\beta_n}{\leftrightarrow} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_{nn}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A'_{11}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A'_{nn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \beta_1 \\ \\ \updownarrow \beta_n \end{matrix}$$

On obtient, pour le produit :

$$A.A' = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}.A'_{11}} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_{nn}.A'_{nn}} \end{pmatrix}$$

Matrices Triangulaires

Soient A et A′ deux matrices triangulaire :

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \overset{\beta_1}{\leftrightarrow} & \quad\cdots\quad & \overset{\beta_n}{\leftrightarrow} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & & (A) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_{nn}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A' = \begin{pmatrix} \boxed{A'_{11}} & & (A') \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A'_{nn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \beta_1 \\ \\ \updownarrow \beta_n \end{matrix}$$

On obtient, pour le produit :

$$A.A' = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}.A'_{11}} & & (B) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_{nn}.A'_{nn}} \end{pmatrix}$$

D.2 Calcul de déterminants de matrices triangulaires par blocs

D.2.1 Propriétés

Propriété 264 *Nous avons la propriété suivantes :*

$$det\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{n_1}{\leftrightarrow} & \quad \overset{n_2}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \boxed{A_{12}} \\ 0 & \boxed{A_{22}} \end{pmatrix} \end{array} = det(A_{11}).det(A_{22})$$

Avec :

$$\begin{cases} A_{11} \in \mathcal{M}_{n_1}(K) \\ A_{22} \in \mathcal{M}_{n_2}(K) \end{cases}$$

D.2.2 Généralisation

Propriété 265 *On peut généraliser la propriété de la façon suivante :*

$$det\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overset{n_1}{\leftrightarrow} & \dots & \overset{n_p}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & & (B) \\ & \ddots & \\ (0) & & \boxed{A_{pp}} \end{pmatrix} \end{array} = det(A_{11})\dots det(A_{pp})$$

Annexe E

Points importants pour obtenir l'équation réduit d'un quadrique (Σ) et l'identifier

Nous avons les points suivants :

$\rightarrow$ Réduire orthonormalement la forme quadratique q associé à (Σ). Dans certains cas, pour identifier (Σ), la connaisance des valeurs propres suffit.

$\rightarrow$ Si l'équation réduite f(X,Y,Z) = 0 est homogène, donc de degrés 2, (Σ) est une surface conique de sommet Ω.

$\rightarrow$ Si l'équation réduite ne contient pas de Z (par exemple) du type f(X,Y)=0, (Σ) est une surface cylindrique de génératrice parallèle à Ωz.

$\rightarrow$ S'il s'agit d'identifier (Σ), on peut encore simplifier l'équation réduite en transformant (Σ) par des affinités droites de base l'un des plans de coordonnées.

Annexe F

Résolution d'un système différentiel linéaire à coefficients constants

F.1 Différents types de Matrices

Considérons un système différentiel du type :

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Nous pouvons avoir quatre cas de figure suivant A :
- → Premier type : A diagonalisable à valeurs propres réelles
- → Deuxième type : A diagonalisable : Une valeur propre réelle, deux valeurs propres imaginaire conjugées
- → Troisième type : A n'est pas diagonalisable ou A à deux valeurs propres réelles, une simple et une double.
- → Quatrième type : A a une seule valeur propre

F.2 Cas d'une matrice diagonalisable

Pour voir le plan à suivre, partons d'un exemple : Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x + 2y + z \\ z' = x + y + 2z \end{cases}$$

Pour résoudre ce système, on commence par introduire des notations :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ et \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, le système précédent s'écrit :

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

Pour poursuivre, nous allons diagonaliser la matrices (possible ici car elle est symétrique réelle, donc orthonormalement diagonalisable). Pour ce faire, déterminons le polynome caractéristique. On obtient :

$$P_A(X) = -(X-4)(X-1)^2$$

Puis on détermine les espaces propres associés aux valeurs propre 1 et 4. On considère une base de Ker(f-id), noté B_1 et une base de Ker(f-4id), noté B_2. On obtient une base de K^3, noté B = $B_1 \vee B_2$. On obtient donc que :

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Avec P=$mat_{can}(B)$. On remplace maintenant A dans le système précédent :

$$\frac{dX}{dt}(t) = PDP^{-1}X(t)$$

Par un changement de variable, on obtient que ce système équivaut à :

$$\frac{dY}{dt}(t) = DY$$

On peut résoudre maintenant facilement pour $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Une fois Y obtenue, on obtient facilement X à l'aide de l'expression de Y :

$$Y = P^{-1}X \Rightarrow X = PY$$

Nous avons donc résolu le système. On peut ensuite utiliser le Théorème de Cauchy Lipschitz pour vérifier la cohérence de notre résultat. Si on considère une équation linéaire homogène avec second membre, on procède de la même façon, sauf à la fin du procédé. On doit alors utiliser une méthode de variation de la constante et calculer P^{-1}. On aura donc avantage dans ce cas à utiliser une base orthonormée de diagonalisation, car dans ce cas $P^{-1} =^t P$. Pour ce faire, on part de :

$$\frac{dX}{dt}(t) = PDP^{-1}X(t) + b(t)$$

Puis on fait un changement de variable Y=$P^{-1}X$:

$$\frac{dY}{dt}(t) = DY(t) + P^{-1}b(t)$$

Et on continue ......

F.3 Cas d'une matrice trigonalisable

On commence comme précédement, en déterminant le polynome caractéristique. On obtient un polynome du type :

$$P_A(X) = (X - \lambda_1)^2(X - \lambda_2)$$

Mais on obtient que la dimension de l'espace propre associe à λ_1 est 1. La matrice n'est donc pas diagonalisable. On considère une base des deux espaces propres, et on complete cette famille en une base de E. On la complete avec le vecteur issu du produit scalaire des deux premiers par exemple. On obtient donc une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Il reste à déterminer les coefficiants a,b. Pour ce faire, on détermine l'image d'un vecteur par A. Et on continue comme précédement.

F.4 Cas d'une valeur propre triple

Considérons la matrice :

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On obtient que :

$$P_A(X) = -(X+2)^2$$

Dans ce cas, l'utilisation de l'exponentiel de matrice est particulièrement indiqué. On sait que toutes solutions est de la forme :

$$t \mapsto X(t) = e^{tA} X_0$$

D'apres Cayley-Hamilton, A annule P_A, donc :

$$(A + 2I_3)^3 = 0$$

Posons :

$$N = A + 2I$$

On obtient donc que N est nilpotente d'indice ≤ 3. On calcul e^A en utilisant la méthode (générique) suivante :

$$\begin{aligned} e^A &= e^{\lambda I_n + N} \\ &= e^{\lambda} I_n e^N \\ &= I_n e^{\lambda} \left[I_n + \cdots + \frac{N^{p-1}}{(p-1)!} \right] \\ &= e^{\lambda} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{N^k}{k!} \end{aligned}$$

Annexe G

Trigonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $P_A(X)$ scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A. Supposons que :

$$P_A(X) = -(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)^2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$$

Avec :

$$\begin{cases} dim(Ker(f-\lambda_1 id)) = 1 \\ dim(Ker(f-\lambda_2 id)) = 1 \\ Ker(f-\lambda_1 id) = Vect(\overrightarrow{u}) \\ Ker(f-\lambda_2 id) = Vect(\overrightarrow{v}) \end{cases}$$

On est donc dans le cas où A n'es pas diagonalisable.

G.1 Réduction sommaire

Complétons la famille libre $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ en une base de K^3. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur quelconque dans K^3 telque B=$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ soit une base de K^3, par exemple considérons :

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$$

On obtient :

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a \\ 0 & \lambda_2 & b \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Le λ_2 de la troisième colonne est connu à l'aide de la trace. Nous devons déterminer le couple (a,b). Pour se faire, on écrire :

$$f(\overrightarrow{w}) = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{w}$$

Dans la base canonique, on obtient que :

$$A\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + \lambda_2\overrightarrow{w}$$

G.2 Réduction de Dunford

Toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(K)$ dont le polynome caractéristique est scindé se trigonalise sous la forme de Dunford, c'est à dire qu'il existe B=$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{z})$ telle que :

$$mat_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, l'inconnue est :

$$\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

On cherche $\overrightarrow{w}$ tel que :

$$f(\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}$$

On résoud cette équation en l'écrivant dans la base canonique :

$$A\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + \lambda \overrightarrow{w}$$
$$(A - \lambda_2 I)\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v}$$

(A - λ_2 I), n'est pas de Cramer car $\lambda_2 \in Sp(A)$, donc cette matrice n'est pas inversible. On obtient en résolvant qu'il existe une infinité de solution.
On peut aussi résoudre en considérant un élement de l'espace caractéristique associé à λ_2, c'est à dire : $Ker(f - \lambda_2 id)^2$.

G.3 Cayley-Hamilton + Lemmes des noyaux

On peut utiliser ces deux théorèmes pour résoudre ce problème.