

# Condensé de cours MP

E.P. et Q.M.

23 avril 2003

## 1 Analyse

### 1.1 Espaces vectoriels normés

**Déf. et prop. 1.1.1 (Norme)** – Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ .  $N$  est une norme pour  $E$  si elle vérifie les trois axiomes :  $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$ ;  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ ;  $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

- Si  $E$  est une algèbre et  $N(xy) \leq N(x)N(y)$ , on parle de norme d'algèbre.
- Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un evn et  $F$  un sev de  $E$ . La restriction de  $\|\cdot\|$  à  $F$  définit la norme induite sur  $F$
- Soient  $(E_1, N_1), \dots, (E_n, N_n)$  des evn. L'application  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod E_i \mapsto N(x) = \max_i N_i(x_i)$  définit une norme sur  $\prod E_i$ .
- $\forall (x, y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$
- Deux normes  $N_1, N_2$  sur un evn  $E$  sont dites équivalentes s'il existe  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tq  $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ .

**Déf. et prop. 1.1.2 (Distance)** –  $(E, N)$  un evn. On appelle distance associée à  $N$  l'application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto N(x - y)$ .  $d$  vérifie les trois axiomes d'une distance (métrique) :  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \iff x = y$ ;  $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ ;  $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

- Pour  $a \in E$  et  $A \subseteq E$ , on note  $d(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x)$ ; pour  $B \subseteq E$ , on note  $d(A, B) = \inf_{x \in B} d(x, A)$ .

**THÉORÈME 1.1.3 (ÉQUIVALENCE DES NORMES)**

Dans un evn de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

**Remarque 1.1.4** Pour montrer que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  ne sont pas équivalentes, on peut chercher  $(x_n) \in (E \setminus \{0\})^{\mathbb{N}}$  telle que  $\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}$  tende vers 0 ou  $\infty$ .

### 1.2 Topologie

**Définitions 1.2.1 (Ouverts, fermés)** – On appelle topologie sur un ensemble  $E$  un ensemble  $O$  de parties de  $E$  (les ouverts) stable par réunion (quelconque) et intersection finie et contenant  $E$  et  $\emptyset$ . Les fermés sont les complémentaires des ouverts.

- Soit  $(E, \|\cdot\|)$  est un evn. Par définition,  $O \subseteq E$  est un ouvert si pour tout  $x \in O$ , il existe une boule contenant  $x$  et contenue dans  $O$ .
- Un voisinage de  $x \in E$  est une partie de  $E$  contenant un ouvert qui contient  $x$ . Je noterais  $V(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$ .

**Définitions 1.2.2 (Adhérence, intérieur)** –  $a \in A$  est un point adhérent à  $A$  si  $\forall V \in V(a), V \cap A \neq \emptyset$ . L'adhérence de  $A$ , notée  $\bar{A}$  est l'ensemble des points adhérents à  $A$ .

- $a \in A$  est un point intérieur à  $A$  si  $A \in V(a)$ . On note  $\overset{\circ}{A}$  et on appelle intérieur de  $A$  l'ensemble des points intérieurs à  $A$ .
- On note  $\text{Fr } A = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  la frontière de  $A$ .
- On dit que  $A$  est dense dans  $B$  ssi  $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$

**Propriétés 1.2.3** –  $\bar{A}$  est un fermé.  $A \subseteq \bar{A}$ .

- Si  $F$  fermé,  $A \subseteq F \implies \bar{A} \subseteq F$  ( $\bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ ).  $A$  est fermé ssi  $\bar{A} = A$ .
- La relation  $\overset{\circ}{A} = E \setminus \overline{E \setminus A}$  permet de retrouver toutes les propriétés de l'intérieur :  $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ ,  $\overset{\circ}{A}$  est un ouvert, tout ouvert inclus dans  $A$  est inclus dans  $\overset{\circ}{A}$ .
- $a \in \bar{A}$  ssi  $a$  est limite d'une suite d'éléments de  $A$ .
- $A \subseteq E$  est un fermé ssi la limite de toute suite convergente d'éléments de  $A$  est dans  $A$ .
- $A$  est dense dans  $B$  ssi  $A \subseteq B$  et tout élément de  $B$  est limite d'éléments de  $A$ .

**Proposition 1.2.4 (Bolzano-Weierstraß)** De toute suite bornée de réels on peut extraire une sous-suite convergente.

### 1.3 Limite, continuité

**Définition 1.3.1 (Limite, continuité)** – Soient  $E$  et  $F$  des evn,  $f : A \subseteq E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  admet  $l$  pour limite en  $a \in \bar{A}$  si pour tout  $\forall V \in V(l), \exists W \in V(a)$  tq  $f(W) \subseteq V$ . (c'est à dire :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A, \|x - a\| \leq \alpha \implies \|f(x) - l\| \leq \varepsilon$ ).

- $f$  est dite continue en  $a \in A$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Définition 1.3.2 (Cont. uniforme, lipschitzité)**

- On dit que  $f : A \rightarrow F$  est uniformément continue ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, x') \in A^2, \|x - x'\| \leq \alpha \implies \|f(x) - f(x')\| \leq \varepsilon$ .
- $f : A \rightarrow F$  est  $k$ -lipschitzienne si  $\forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|$ .

**Proposition 1.3.3** –  $f \in F^A$  est continue en  $a \in A$  ssi pour toute suite  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $a$ ,  $f(u_n)$  converge vers  $f(a)$ .

- Lipschitzité  $\implies$  continuité uniforme  $\implies$  continuité.

**Proposition 1.3.4 (Cas réel)** – Théorème de la valeur intermédiaire. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Si  $f(a)f(b) < 0$ , alors il existe  $c \in ]a, b[$  tq  $f(c) = 0$  (Autrement dit : si  $f$  continue,  $f([a, b])$  est un intervalle).

- Soit  $f : I \rightarrow J$  ( $I, J$  intervalles de  $\mathbb{R}$ ) une application monotone surjective; alors  $f$  est continue.
- Une application de  $\mathcal{C}^0(I, J)$  injective est monotone.

**THÉORÈME 1.3.5 ("CONTINUITÉ TOPOLOGIQUE")**

Soit  $f : A \subseteq E \rightarrow F$  ( $E, F$  deux evn); alors les trois assertions sont équivalentes :

- $f$  est continue sur  $A$ ;
- l'image réciproque de tout ouvert par  $f$  est un ouvert;
- l'image réciproque de tout fermé par  $f$  est un fermé.

**Proposition 1.3.6 (Continuité des app. lin.)**

- Une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est continue ssi  $\exists k > 0$  tq  $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq k \|x\|$ .
- Soit  $E$  de dimension finie, toute application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est continue.
- $\mathcal{L}_c(E, F)$  désigne l'algèbre des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ . L'application  $\|\cdot\| : \mathcal{L}_c(E, F) \rightarrow \mathbb{R}^+, u \mapsto \sup\{\|u(x)\| \mid x \in E \text{ et } \|x\| \leq 1\}$  est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{L}_c(E, F)$ , appelée norme triple.
- $\forall (u, x) \in \mathcal{L}_c(E, F) \times E, \|u(x)\| \leq \|u\| \|x\|$ .

## 1.4 Compléments de topologie

**Définition 1.4.1** – Une partie  $A$  d'un evn est dite compacte ssi de toute suite d'éléments de  $A$  on peut extraire une sous suite convergente dont la limite est dans  $A$ .

- (HP) Ceci est équivalent à la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de  $A$  par des ouverts (ie. famille d'ouverts de  $E$  dont l'union contient  $A$ ) on peut extraire un recouvrement fini.

**Propriétés 1.4.2** – Une partie compacte est nécessairement fermée bornée. Dans  $\mathbb{K}^n$  (et dans tout evn de dimension finie) la réciproque est vraie.

- L'image d'une partie compacte par une fonction continue est compacte. En particulier une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
- Théorème de Heine. Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.
- Si  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  converge vers  $l \in E$ ,  $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$  est une partie compacte.

**Déf. et prop. 1.4.3 (Complétude)** –  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$  est dite de Cauchy ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tq  $q \geq N, p \geq N \implies \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon$ .

- Une suite de Cauchy est nécessairement bornée.
- Une partie  $A$  de  $E$  est dite complète si toute suite de Cauchy d'éléments de  $A$  converge vers un élément de  $A$ .
- $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}^n$  sont complets. Tout espace vectoriel de dimension finie est complet.

**Déf. et prop. 1.4.4 (Suites de fonctions)**

- $B(A, F)$  est l'ensemble des applications bornées de  $A$  dans  $F$  (c'est un sev de  $F^A$ ); l'application  $\|\cdot\|_{\infty} : B(A, F) \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \sup_{x \in A} \|f(x)\|$  est appelée norme de la convergence uniforme.
- $(f_n)$  converge simplement (cvs) vers  $f$  si  $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n > N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ .
- $(f_n)$  converge uniformément (cvu) vers  $f$  si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, n > N \implies \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ . Ceci équivaut à :  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \sup_{x \in A} \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$ .
- Si  $f$  (limite simple de  $f_n$ ) est bornée, alors  $f_n$  cvu vers  $f$  ssi  $f_n$  est bornée à partir d'un certain rang et  $f_n$  converge vers  $f$  au sens de  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

**Proposition 1.4.5 (Cauchy et Cvu)** – Une suite de fonctions  $(f_n) \in F(A, F)^{\mathbb{N}}$  satisfait le critère de Cauchy pour la convergence uniforme si  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in A, p, q \geq N \implies \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$ . En fixant  $x$ , on obtient que  $f_n(x)$  est une suite de Cauchy.

- Si  $F$  est complet ( $f : A \rightarrow F$ ) alors toute suite satisfaisant le critère de Cauchy uniforme converge uniformément.
- Si  $F$  est complet,  $B(A, F)$  est complet pour  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

**Proposition 1.4.6 (Cvu et continuité)** – Une limite uniforme de fonctions continues est continue.

- $\mathcal{C}^0(A, F)$  avec  $A$  compact et  $F$  complet est complet.
- Convergence compacte. Si  $(f_n) \in \mathcal{C}^0(A, F)$  converge uniformément sur toute partie compacte de  $A$  alors sa limite simple est continue.

**THÉORÈME 1.4.7 (INTERVERSION DES LIMITES)**

Soit  $F$  un evn complet,  $A \subseteq E$  un evn,  $a \in \bar{A}$ ,  $(f_n) \in F(A, F)^{\mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ . On suppose que

$l_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$  existe pour tout  $n$  et que  $(l_n)$  converge vers  $l$ . Alors  $f$  admet une limite en  $a$  égale à  $l$ . Autrement dit, sous ces hypothèses  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

**THÉORÈME 1.4.8 (POINT FIXE)**

Soit  $A$  une partie complète non vide d'un evn  $E$ , et  $f : A \rightarrow A$  une application contractante (c'est à dire  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ ). Alors  $\forall u_0 \in A$ , la suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers l'unique point fixe de  $f$  dans  $A$ .

**THÉORÈME 1.4.9 (POINT FIXE, HP)**

Soit  $K$  un compact non vide d'un evn  $E$  et  $f : K \rightarrow K$  telle que  $\forall x \neq y \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$ . Alors  $\forall u_0 \in K$ , la suite  $u_{n+1} = f(u_n)$  converge vers l'unique point fixe de  $f$  dans  $K$ .

## 1.5 Dérivation des fonctions d'une variable réelle

**Déf. et prop. 1.5.1 (Dérivabilité)** –  $f$  est dérivable en  $a$  s'il existe  $l \in E$  tq  $f(t) = f(a) + (t-a)l + o(\|t-a\|)$

- Si  $f$  dérivable en  $a$ ,  $f$  est continue en  $a$ .
- Soient  $E, F, G$  3 evn de dimension finie,  $B : E \times F \rightarrow G$  bilinéaire, et  $f, g$  dérivables en  $a \in I$ ;  $B(f, g)$  est dérivable en  $a$  et  $(B(f, g))'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$ .
- Soit  $f : I \rightarrow E$  dérivable.  $f$  est constante sur  $I$  ssi  $f'(I) = \{0\}$ .
- Formule de Leibniz. Pour  $f$  et  $g \in \mathcal{C}^k$ ,  $(fg)^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^k C_k^i f^{(i)}(t)g^{(k-i)}(t)$

**Déf. et prop. 1.5.2 (Difféomorphismes)**

- Une fonction bijective,  $\mathcal{C}^k$  dont la réciproque est  $\mathcal{C}^k$  est appelée  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme (si  $k = 0$  on parle d'homéomorphisme).
- $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $I$  sur  $f(I)$  ssi  $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$  et dans ce cas  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ .

**THÉORÈME 1.5.3 (ROLLE, ACCROISSEMENTS FINIS)**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dérivable sur  $]a, b[$  ( $b > a$ ). Rolle :  $f(a) = f(b) \implies \exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$ . Accroissements finis :  $\exists c \in ]a, b[, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

**THÉORÈME 1.5.4 (PROLONGEMENT  $\mathcal{C}^k$ )**

Soit  $f : ]a, b[ \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^k$  tq  $f^{(k)}$  ait une limite  $l$  en  $a$ . Alors  $f$  se prolonge en une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $[a, b]$ .

**Déf. et prop. 1.5.5 (Convexité)**

- Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\forall (x, y, t) \in I^2 \times [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$  est dite convexe.
- Si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe, alors  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , alors  $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ .
- Si  $f$  est  $\mathcal{C}^1$ ,  $f$  convexe  $\iff f'$  est croissante.
- Si  $f$  est  $\mathcal{C}^2$ ,  $f$  convexe  $\iff f'' \geq 0$ .
- Une fonction convexe sur  $I$  est continue sur  $\overset{\circ}{A}$ .

**THÉORÈME 1.5.6 (DARBOUX, HORS PROGRAMME)**

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable (mais pas nécessairement  $\mathcal{C}^1$ ). Alors  $f'(I)$  est un intervalle (lire : une dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires même si elle n'est pas continue).

## 1.6 Séries

**Propriétés 1.6.1 (Convergence)** – Le terme général d'une série convergente tend nécessairement vers 0.

- Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ . La série  $\sum u_n$  converge ssi la suite des sommes partielles  $(\sum_{n=0}^p u_n)_p$  est majorée.
- La série de terme général  $u_n$  satisfait le critère de Cauchy si la suite des sommes partielles le vérifie.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, q \geq p \geq N \implies \left\| \sum_{n=p}^q u_n \right\| \leq \varepsilon$ .

**Déf. et prop. 1.6.2 (Convergence absolue)**

- Si la série  $\sum \|u_n\|$  est convergente, on dit que  $\sum u_n$  est absolument convergente.
- Soit  $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $E$  étant complet. Si  $\sum u_n$  est absolument convergente, elle est convergente.

**Déf. et prop. 1.6.3 (Deux séries classiques)**  $E$  désigne une algèbre normée complète.

- Soit  $u \in E$  tq  $\|u\| < 1$  alors la série  $\sum u^n$  converge et a pour somme  $(e - u)^{-1}$ .
- Soit  $u \in E$ ; la série de terme général  $\frac{1}{n!} u^n$  est convergente, et sa somme est notée  $e^u$ . Si  $u$  et  $v$  commutent,  $e^{u+v} = e^u \cdot e^v$ .

Désormais on considère uniquement les séries numérique :  $E = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Proposition 1.6.4 (Recettes)**

- Règle de D'Alembert :  $(u_n)$  est à termes positifs, et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$ . Alors si  $l > 1$ ,  $\sum u_n$  diverge, si  $l < 1$ ,  $\sum u_n$  converge.
- Séries alternées. Soit  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ ; si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , et que  $(u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang, alors la série  $\sum (-1)^n u_n$  converge, et on a de plus  $|R_p| \leq |u_{p+1}|$  ( $R_p$  désigne le reste partiel d'ordre  $p$ ).
- Série de Riemann.  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est convergente ssi  $\alpha > 1$

**Proposition 1.6.5 (Recettes HP)**

- Séries de Bertrand. La série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$  est convergente ssi  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .
- Règle de Raab-Duhamel : si  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \alpha/n + O(1/n^2)$  alors il existe  $A > 0$  tel que  $u_n \sim An^\alpha$ .

**THÉORÈME 1.6.6 (COMPARAISON SÉRIES-INTÉGRALES)**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  décroissante. Alors la série de terme général  $w_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt$  est convergente. En particulier la série  $\sum f(n)$  et l'intégrale  $\int_0^\infty f(t)dt$  ont même nature.

**THÉORÈME 1.6.7 (COMPARAISON ASYMPTOTIQUE)**

Soient deux séries  $\sum a_n$  et  $\sum b_n$  à termes positifs.

- Si  $\sum b_n$  converge et  $a_n = O(b_n)$ , alors  $\sum a_n$  converge et les restes vérifient  $(\sum_{n=p+1}^\infty a_n)_p = O(\sum_{n=p+1}^\infty b_n)$  (idem pour  $o$  et  $\sim$ ).
- Si  $\sum b_n$  diverge et  $a_n \sim b_n$ , alors  $\sum a_n$  diverge et les sommes partielles vérifient  $(\sum_{n=0}^p a_n)_p \sim (\sum_{n=0}^p b_n)_p$ .
- Si  $\sum b_n$  diverge et  $a_n = o(b_n)$  (resp  $O(b_n)$ ) alors les sommes partielles vérifient  $(\sum_{n=0}^p a_n)_p = o((\sum_{n=0}^p b_n)_p)$  (resp  $O$ ).

**Proposition 1.6.8 (Stirling)**  $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$ .

## 1.7 Familles sommables

**Déf. et prop. 1.7.1** – Soit  $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$ ; la famille est dite sommable si l'ensemble  $\{\sum_{i \in J} a_i \mid J \subseteq I, J \text{ finie}\}$  est majoré. Soit  $(b_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ ; la famille est dite sommable si la famille  $(|b_i|)$  l'est.

- Une famille  $(a_i) \in \mathbb{R}_+^I$  est sommable ssi pour toute suite croissante  $(J_n)$  de parties finies de  $I$  dont l'union vaut  $I$  (suite convenable pour  $I$ ), la suite  $(\sum_{i \in J_n} a_i)_n$  est majorée.
- Soit  $a \in \mathbb{K}^I$  une famille sommable. Alors pour toute suite  $J_n$  convenable pour  $I$ , la suite  $(\sum_{i \in J_n} a_i)_n$  converge, et sa limite, qui ne dépend pas de  $(J_n)$  est appelée somme de  $a$  (notée  $s(a)$ ).

**Déf. et prop. 1.7.2 (Sommabilité et suites)**

- Une suite  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  est sommable ssi la série de terme général  $u_n$  est convergente et dans ce cas  $s(u) = \sum_{n=0}^\infty u_n$ .
- Une suite  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  est sommable ssi  $\sum u_n$  est absolument convergente et dans ce cas  $s(u) = \sum_{n=0}^\infty u_n$ .
- Soit  $\ell^1(\mathbb{K}) = \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u \text{ sommable}\}$ , et pour  $u \in \ell^1(\mathbb{K})$ ,  $\|u\|_1 = s(u)$ . Alors  $(\ell^1(\mathbb{K}), \|\cdot\|_1)$  est un evn.
- $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$  est sommable ssi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$  sont sommables et alors  $s(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_{-n}$ .

**THÉORÈME 1.7.3 (SUITES DOUBLES)**

Soit  $u = (u_{p,q}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$  une suite double.  $u$  est sommable ssi  $\forall p$  la série  $\sum_q u_{p,q}$  est absolument convergente et la série  $\sum_p \sum_{q=0}^\infty |u_{p,q}|$  est convergente, ssi  $\forall q$  la série  $\sum_p u_{p,q}$  est abs. convergente et  $\sum_q \sum_{p=0}^\infty |u_{p,q}|$  est convergente.

**THÉORÈME 1.7.4 (INTERVERSION DES SOMMATIONS)**

Soit  $(u_{p,q}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$  sommable. Alors  $s(u) = \sum_{p=0}^\infty \sum_{q=0}^\infty u_{p,q} = \sum_{q=0}^\infty \sum_{p=0}^\infty u_{p,q}$

**Corollaire 1.7.5** Soient  $(a, b) \in (\mathbb{K}^{\mathbb{N}})^2$  deux familles sommables. Alors la famille  $(a_p b_q) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}^2}$  est sommable et  $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = (\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p)(\sum_{p \in \mathbb{N}} b_p)$ .

## 1.8 Intégration sur un segment

**Propriétés 1.8.1** – Linéarité de l'intégrale. L'application  $\mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b], E) \rightarrow E, f \mapsto \int_{[a,b]} f$  est linéaire.

- L'intégrale d'une fonction positive est positive.
- L'intégrale d'une fonction  $\mathcal{C}^0$  est nulle ssi la fonction est nulle (donc  $\|f\|_1 = \int_{[a,b]} f^2(t)dt$  est une norme sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ ).
- Relation de Chasles.  $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ .
- Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b], E)$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ; alors  $u \circ f$  est  $\mathcal{C}_{\text{mx}}^0$  et  $\int_{[a,b]} u \circ f = u(\int_{[a,b]} f)$ .

**THÉORÈME 1.8.2**

Soit  $(f_n) \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b], E)^{\mathbb{N}}$  une suite de fonction convergent uniformément vers une fonction  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b], E)$ . Alors la suite des intégrales est convergente et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .

**Proposition 1.8.3 (Normes)** – Norme de la convergence en moyenne. L'application  $\|\cdot\|_1 : \mathcal{C}^0([a, b], E) \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto \int_{[a,b]} \|f\|$  est une norme.

- Norme de la convergence en moyenne quadratique. L'application  $\|\cdot\|_2 : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}_+, f \mapsto (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2}$  est une norme.

**Proposition 1.8.4 (Inégalités)**

- Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Alors  $|\int_{[a,b]} \bar{f}g| \leq (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2} (\int_{[a,b]} |g|^2)^{1/2}$

- Minkowski. Avec les mêmes hypothèses, on a :  $(\int_{[a,b]} |f+g|^2)^{1/2} \leq (\int_{[a,b]} |f|^2)^{1/2} + (\int_{[a,b]} |g|^2)^{1/2}$

**THÉORÈME 1.8.5 (SOMMES DE RIEMANN)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([a, b], E)$  (NB : je note  $p(\sigma)$  le pas de la subdivision  $\sigma$ ).  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$  tq  $\forall \sigma = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$  avec  $a_0 = a, a_n = b, \forall \xi = (\xi_p) \in \mathbb{R}^n, \xi_i \in [a_i, a_{i+1}], p(\sigma) \leq \alpha \implies \left\| \int_{[a,b]} f - \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(\xi_i) \right\| \leq \varepsilon$

**1.9 Dérivation et intégration**

**Définition 1.9.1** On appelle primitive d'une fonction  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, E)$  toute fonction  $g$  continue,  $\mathcal{C}_{\text{mx}}^1$  tq en tout point où  $g$  est continue,  $g'(x) = f(x)$ .

**THÉORÈME 1.9.2 (THÉORÈME FONDAMENTAL)**

Soit  $f : I \rightarrow E$  continue (resp.  $\mathcal{C}_{\text{mx}}^0$ ) et  $a \in I$ . La fonction définie par  $g(x) = \int_a^x f(t)dt$  qui est  $\mathcal{C}^1$  (resp.  $\mathcal{C}_{\text{mx}}^1$ ) est l'unique primitive de  $f$  s'annulant en  $a$ . On en déduit que deux primitives diffèrent d'une constante.

- Proposition 1.9.3** - Changement de variable. Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, E)$ , et  $\phi \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], I)$  une fonction strictement monotone. Alors  $\int_{\alpha}^{\beta} \phi'(t) f(\phi(t)) dt = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx$ .
- Intégration par partie. Soit  $B : E \times F \rightarrow G$  (trois evn de dim finie) une application bilinéaire, et soient  $f : [a, b] \rightarrow E, g : [a, b] \rightarrow F$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a :  $\int_a^b B(f'(t), g(t)) dt = [B(f(t), g(t))]_a^b - \int_a^b B(f(t), g'(t)) dt$ .
  - Inégalité de la moyenne.  $f : [a, b] \rightarrow E$  continue de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]a, b[$  tq  $\|f'(t)\| \leq \lambda$  alors  $\forall x, y \in ]a, b[, \|f(x) - f(y)\| \leq \lambda|x - y|$ .

**Proposition 1.9.4 (Taylor)**

- Formule de Taylor-Lagrange. Soit  $f : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $\mathcal{C}_{\text{mx}}^{k+1}$  sur  $I$ . Pour  $a, b \in I$ , on a l'égalité suivante :  $f(b) = \sum_{l=0}^k \frac{(b-a)^l}{l!} f^{(l)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$ .
- Inégalité de Taylor-Lagrange. Avec les mêmes hypothèses, et en notant  $M = \sup_{[a,b]} \|f^{(k+1)}(t)\|$ , on a :  $\left\| f(b) - \sum_{l=0}^k \frac{(b-a)^l}{l!} f^{(l)}(a) \right\| \leq \frac{|b-a|^{k+1}}{(k+1)!} M$ .
- Formule de Taylor-Young. Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et  $a \in I$ . Alors  $f$  admet un d.l à l'ordre  $k$  en  $a$  donné par :  $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^k$ .

**THÉORÈME 1.9.5 (PRIMITIVE D'UNE SUITE DE FONCTION)**

Soit  $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, E)^{\mathbb{N}}, a \in I$ . Soit  $(h_n)$  la suite des primitives des  $f_n$  s'annulant en  $a$ . Si  $(f_n)$  cvs vers  $f$ , la cv étant uniforme sur tout segment inclus dans  $I$  ( $f$  est donc continue), alors la suite  $(h_n)$  cvs vers la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ , la cv étant uniforme sur tout segment inclus dans  $I$ .

**THÉORÈME 1.9.6 (DÉRIVÉE D'UNE SUITE DE FONCTION)**

Soit  $(f_n) \in \mathcal{C}^1(I, E)^{\mathbb{N}}$ . On suppose  $(f_n)$  cvs vers  $f$  et  $(f_n')$  cvs vers  $g$ , la cv étant uniforme sur tout segment inclus dans  $I$ . Alors  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  et sa dérivée est  $g$ .

**THÉORÈME 1.9.7 (DÉRIVÉES D'UNE SUITE DE FONCTION)**

Soit  $(f_n) \in \mathcal{C}^k(I, E)^{\mathbb{N}}$ . On suppose que  $\forall 0 \leq l \leq k, (f_n^{(l)})$  cvs, et que  $f^{(k)}$  cvu sur tout segment inclus dans  $I$ . Si on note  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  et  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}$ , alors  $f$  est  $\mathcal{C}^k$  et  $f^{(k)} = g$ .

**Proposition 1.9.8** Soit  $(A, \|\cdot\|)$  une algèbre normée complète et  $a \in A$ . Soit  $\phi_a(t) = \exp(ta)$ .  $\phi_a$  est  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, A)$  et  $\phi_a^{(k)} = a^k \phi_a(t)$ .

**THÉORÈME 1.9.9 (CONTINUITÉ SOUS LE SIGNE SOMME)**

Soit  $A \subseteq E$  evn de dimension finie et  $f \in \mathcal{C}^0(A \times [a, b], E)$ . Alors  $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$  est continue sur  $A$ .

**THÉORÈME 1.9.10 (DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(I \times [a, b], E)$  telle que pour  $i \leq k, \frac{\partial^i f}{\partial x^i}$  existe et soit continue sur  $I \times [a, b]$ . Alors la fonction  $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  et pour  $i \leq k, g^{(i)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t) dt$ .

**Proposition 1.9.11 (Formule de Fubini)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0([c, d] \times [a, b], E)$ . Alors  $\int_c^d \int_a^b f(x, t) dt dx = \int_a^b \int_c^d f(x, t) dx dt$ .

**1.10 Intégration sur un intervalle quelconque**

**Déf. et prop. 1.10.1 (Intégrales impropres sur  $\mathbb{R}_+$ )**

- Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, \mathbb{R}_+)$ .  $f$  est intégrable sur  $I$  ssi existe  $(J_n) \in \mathcal{P}(I)^{\mathbb{N}}$  une suite croissante de segments tq  $\cup_n J_n = I$  telle que  $(\int_{J_n} f)$  est majorée (on parle de suite de segments convenable pour  $I$ ); on note alors  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{J_n} f$ .
- Soient  $f, g \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, \mathbb{R}_+)$  tq  $f \leq g$ . Alors si  $g$  est intégrable,  $f$  l'est.
- Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b[, \mathbb{R}_+)$ .  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$  si la fonction  $x < b \rightarrow \int_{[a,x]} f$  a une limite en  $b$ .

**Déf. et prop. 1.10.2 (Intégrales impropres sur  $\mathbb{K}$ )**

- Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, \mathbb{K})$ . On dit que  $f$  est intégrable sur  $I$  ssi  $|f|$  est intégrable sur  $I$ .
- Si  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, \mathbb{K})$ , alors pour toute suite de segments  $(J_n)$  convenable pour  $I$ , la suite  $(\int_{J_n} f)$  est convergente et sa limite ne dépend pas de  $(J_n)$ : on l'appelle intégrale sur  $I$  de  $f$ .
- Théorème de comparaison. Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, \mathbb{K})$  et  $\phi \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, \mathbb{R}_+)$  tq  $\forall x \in I, |f(x)| \leq \phi(x)$ . Alors si  $\phi$  est intégrable sur  $I, f$  l'est et :  $|\int_I f| \leq \int_I \phi$ .

**THÉORÈME 1.10.3 (COMPARAISON ASYMPTOTIQUE)**

- Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b[, \mathbb{K})$  et  $\phi \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b[, \mathbb{R}_+)$  intégrable. Si  $f = O_b(\phi)$  alors  $f$  est intégrable sur  $[a, b[$ .
- Soient  $\phi, \psi \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b[, \mathbb{R}_+)$ . Si  $\psi$  est intégrable sur  $[a, b[$  et  $\phi = O_b(\psi)$  (resp  $\phi \sim_b \psi, \phi = o_b(\psi)$ ), alors  $\phi$  est intégrable et  $\int_a^b \phi(t) dt = O_b(\int_a^b \psi(t) dt)$  (resp  $\sim_b, o_b$ ).
- Soient  $\phi, \psi \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0([a, b[, \mathbb{R}_+)$ . Si  $\psi$  n'est pas intégrable sur  $[a, b[$  et  $\phi \sim_b \psi$  (resp  $\phi = O_b(\psi), \text{ resp } \phi = o_b(\psi)$ ), alors  $\phi$  n'est pas intégrable et  $\int_a^x \phi(t) dt \sim_b \int_a^x \psi(t) dt$  (resp  $O_b, o_b$ ).

**THÉORÈME 1.10.4**

Soit  $I$  un intervalle borné; soit  $(f_n) \in \mathcal{C}^0(I, E)^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions intégrables sur  $I$ , qui cvu vers  $f$ . Alors  $f$  est continue, intégrable sur  $I$ , la suite  $(f_n)$  converge en moyenne vers  $f$  et  $\int_I f_n \rightarrow \int_I f$ .

**Proposition 1.10.5 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

Soient  $f, g \in \mathcal{C}_{\text{mx}}^0(I, \mathbb{K})$  de carré intégrable. Alors  $\overline{fg}$  est intégrable et on a :  $|\int_I \overline{fg}| \leq (\int_I |f|^2)^{1/2} (\int_I |g|^2)^{1/2}$ .

**THÉORÈME 1.10.6 (CONVERGENCE MONOTONE)**

Soit  $(f_n) \in \mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$  une suite croissante de fonctions intégrables sur  $I$  et simplement convergentes vers une fonction  $f$  supposée  $\mathcal{C}_{\max}^0$ . Alors  $f$  est intégrable sur  $I$  ssi la suite  $(\int_I f_n)$  est majorée et dans ce cas  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ .

**THÉORÈME 1.10.7 (CONVERGENCE DOMINÉE)**

Soit  $(f_n) \in \mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$  une suite de fonctions intégrables sur  $I$  et simplement convergentes vers une fonction  $f$  supposée  $\mathcal{C}_{\max}^0$ . S'il existe  $\phi \in \mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{R}_+)$  intégrable et telle que  $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times I, |f_n(t)| \leq \phi(t)$ , alors  $f$  est intégrable sur  $I$  et  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ .

**THÉORÈME 1.10.8 (CONTINUITÉ SOUS LE SIGNE SOMME)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(A \times I, \mathbb{K})$  telle que  $\forall x \in A$  la fonction  $t \mapsto f(x, t)$  soit intégrable sur  $I$ . On pose  $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ . En supposant de plus que  $\forall K \subseteq A$  compact il existe  $\phi_K \in \mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{R}_+)$  intégrable sur  $I$  tq  $\forall (x, t) \in K \times I, |f(x, t)| \leq \phi_K(t)$ . Alors  $g$  est continue sur  $A$ .

**THÉORÈME 1.10.9 (DÉRIVATION SOUS LE SIGNE SOMME)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^0(A \times I, \mathbb{K})$  une fonction admettant une dérivée partielle par rapport à  $x$  continue sur  $A \times I$ , telle que  $\forall x \in A$  les fonctions  $t \mapsto f(x, t)$  et  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  soient intégrables sur  $I$ . On pose  $g(x) = \int_I f(x, t) dt$ . On suppose qu'en outre,  $\forall K \subseteq A$  compact il existe  $\phi_K \in \mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{R}_+)$  intégrable sur  $I$  tq  $\forall (x, t) \in K \times I, |f(x, t)| + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi_K(t)$ . Alors  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $A$  et de plus  $g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ .

**Déf. et prop. 1.10.10 (Fonction Gamma)**

On définit  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  pour  $x > 0$ . Cette fonction est  $\mathcal{C}^\infty$  et convexe sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On a en outre  $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  et pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma(n+1) = n!$ .

**1.11 Séries de fonctions****Déf. et prop. 1.11.1 (Convergence normale)**

- Une série de fonctions bornée  $\sum f_n$  est dite normalement convergente si la série  $\sum_n \|f_n\|_\infty$  est convergente.
- $\sum f_n$  est normalement convergente sur  $A$  ssi il existe une suite  $(\alpha_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall x \in A, \|f_n(x)\| \leq \alpha_n$  et  $\sum \alpha_n$  est convergente.
- Convergence normale  $\implies$  convergence uniforme  $\implies$  convergence simple.

**THÉORÈME 1.11.2 (CONTINUITÉ DE LA LIMITE)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues convergeant uniformément sur  $A$  vers  $f$  (resp. cvs sur  $A$  avec convergence uniforme sur tout segment contenu dans  $A$  si  $A \subseteq \mathbb{R}$ ) alors  $f$  est continue sur  $A$ .

**THÉORÈME 1.11.3 (INTERVERSION DES LIMITES)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions convergeant uniformément sur  $A$  vers  $f$ , et soit  $a \in \bar{A}$ . On suppose que  $\forall n, \lim_{x \rightarrow a} f_n = l_n$  (la limite existe); alors  $\sum l_n$  converge,  $f$  a une limite en  $a$ , et  $\sum_{n=0}^\infty \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^\infty f_n(x)$ .

**THÉORÈME 1.11.4 (INTERVERSION DES SIGNES SOMME)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions  $\mathcal{C}_{\max}^0([a, b], E)$  qui cvs vers  $f \in \mathcal{C}_{\max}^0([a, b], E)$  alors la série  $\sum_n \int_a^b f_n(x) dx$  est convergente vers  $\int_a^b f(x) dx$ .

**THÉORÈME 1.11.5 (PRIMITIVATION)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues sur un intervalle  $I$  non trivial et  $a \in I$ . On note  $h_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$  la primitive de  $f_n$  s'annulant en  $a$ . En supposant que  $\sum f_n$  a pour limite

simple  $f$ , la convergence étant uniforme sur tout segment  $\subseteq I$ , alors la série de fonctions  $\sum_n h_n$  cvs sur  $I$  vers  $h = \int_a^x f(t) dt$  la primitive de  $f$  s'annulant en  $a$ , la convergence étant uniforme sur tout segment  $\subseteq I$ .

**THÉORÈME 1.11.6 (DÉRIVATION)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , convergent simplement vers  $f$  sur un  $I$ . On suppose que  $\sum f'_n$  cvs vers  $g$  sur  $I$ , avec cvu sur tout segment  $\subseteq I$ . Alors  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  est  $f' = g$ .

**THÉORÈME 1.11.7 (CONVERGENCE MONOTONE)**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions  $\mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{R}_+)$  intégrables sur  $I$  et simplement convergente vers  $f \in \mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{R}_+)$ . La fonction  $f$  est intégrable ssi la série  $\sum_n \int_I f_n$  est convergente (ie majorée) et dans ce cas  $\int_I f = \sum_{n=0}^\infty \int_I f_n$ .

**THÉORÈME 1.11.8**

Soit  $\sum f_n$  une suite de fonctions  $\mathcal{C}_{\max}^0(I, \mathbb{R})$  intégrables sur  $I$ , simplement convergente vers  $f$  supposée  $\mathcal{C}_{\max}^0$ . Alors si  $\sum_n \int_I |f_n|$  est convergente,  $f$  est intégrable et on a  $\|f\|_1 \leq \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_1$  ainsi que  $\int_I f = \sum_{n=0}^\infty \int_I f_n$ .

**1.12 Séries entières**

**Proposition 1.12.1 (Lemme d'Abel)** Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière et  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$  tq la suite  $a_n \rho^n$  soit bornée. Alors  $\forall z \in \mathbb{K}$  tq  $|z| < \rho$ , la série  $\sum_n a_n z^n$  est absolument convergente.

**Déf. et prop. 1.12.2 (Rayon de convergence)**

- Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière. Il existe un unique élément de  $\bar{\mathbb{R}}$  noté  $R$ , appelé rayon de convergence de la série entière et ayant la propriété :  $\forall z \in \mathbb{K}, |z| < R \implies \sum a_n z^n$  est abs. cv. et  $\forall z \in \mathbb{K}, |z| > R \implies \sum a_n z^n$  diverge.
- Règle de d'Alembert : Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ . Alors si  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  alors le rayon de convergence de la série vaut  $1/l$ .

**Proposition 1.12.3 (Continuité)** - Soit  $\sum_n a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . Alors il y a convergence normale donc uniforme sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence.

- On note  $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$  pour  $|z| < R$ . Alors  $f$  est continue sur le disque de convergence.

**Propriétés 1.12.4 (Opérations élémentaires)**

- Soient  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  deux séries entières de rayon de convergence  $R$  et  $R'$ . Alors  $\sum (a_n + b_n) z^n$  a un rayon de convergence  $\geq \min\{R, R'\}$  avec égalité si  $R \neq R'$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ .  $\sum \lambda a_n z^n$  a un rayon de convergence égal à  $R$ .
- Le produit de Cauchy  $\sum_n (\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}) z^n$  des séries entières a un rayon de convergence  $\geq \min\{R, R'\}$ .

**Déf. et prop. 1.12.5 (Série dérivée, primitive)**

- Soit  $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$  une série entière.
- On appelle série dérivée la série  $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$  et série primitive une série de la forme  $\alpha + \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$  ( $\alpha \in \mathbb{K}$ ).
- Ces deux séries ont le même rayon de convergence que la série entière initiale.

### THÉORÈME 1.12.6 (PRIMITIVATION)

Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On note  $f(t)$  sa somme sur  $] -R; R[$ . La série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$  a pour rayon de convergence  $R$  et la somme de cette série est la primitive de  $f$  sur  $] -R, R[$  s'annulant en 0.

### THÉORÈME 1.12.7 (DÉRIVATION)

Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$  une série entière de rayon de convergence  $R > 0$ , et  $f$  sa somme sur  $] -R; R[$ . Alors  $f$  est  $C^\infty$  ( $] -R, R[, \mathbb{K}$ ) et la dérivée  $k$ ème de  $f$  vérifie  $\forall k \geq 1, \forall t \in ] -R, R[, f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n t^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} t^n$ .

### Déf. et prop. 1.12.8 (Développement en séries entières)

- Une fonction  $f$  est dit développable en série entière s'il existe  $r > 0$  tel qu'il existe une série entière de rayon de convergence  $R \geq r$  dont la somme coïncide avec  $f$  sur  $] -r, r[$ .
- Si  $f$  est développable en série entière sur  $] -r, r[$  alors elle est  $C^\infty$  ( $] -r, r[, \mathbb{K}$ ).
- Il y a unicité du développement en série entière de  $f$ .

### THÉORÈME 1.12.9

Soit  $f \in C^\infty$  ( $] -r, r[, \mathbb{K}$ ) est développable en série entière sur  $] -r; r[$  ssi  $\forall x \in ] -r, r[, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0$ .

## 1.13 Séries de Fourier

### Déf. et prop. 1.13.1 (Coefficients de Fourier)

- Dans la suite on note  $E$  l'ev des fonctions  $C_{\text{mx}}^0$   $2\pi$ -périodiques.
- On pose  $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} f(t) \exp(-int) dt$   
 $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$   
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = 1/\pi \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt$
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$   
 $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$
- Pour  $n \in \mathbb{Z}$  l'application  $c_n$  est linéaire.
- $f \in E \implies \bar{f} \in E$  et  $c_n(\bar{f}) = c_{-n}(f)$
- Pour  $f$  paire,  $b_n(f) = 0$ , pour  $f$  impaire,  $a_n(f) = 0$ .
- Pour  $f \in E$  et  $a \in \mathbb{R}, c_n(f+a) = \exp(ina)c_n(f)$ .

### Proposition 1.13.2 (Coefficients de la dérivée)

Soit  $f \in C_{\text{mx}}^1$ , continue et  $2\pi$ -périodique. Alors  $c_n(f') = inc_n(f)$ . Pour  $f \in C_{\text{mx}}^{k-1}$ ,  $C_{\text{mx}}^k$ ,  $2\pi$ -périodique,  $c_n(f^{(k)}) = (in)^k c_n(f)$ .

### THÉORÈME 1.13.3 (RIEMAN-LEBESGUE)

Soit  $f \in E$  alors  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0$ . Pour  $f \in C_{\text{mx}}^{k-1}$ ,  $C_{\text{mx}}^k$ ,  $2\pi$ -périodique,  $c_n(f) = o(1/n^k)$ .

### Déf. et prop. 1.13.4 (Produit scalaire)

- On note  $D \subset C_{\text{mx}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  les fonctions  $2\pi$ -périodiques telles que  $\forall (f, x) \in D \times \mathbb{R}, \lim_{y \rightarrow x, y < x} f(y)$  (resp.  $y > x$ ) existe et est noté  $f(x_-)$  (resp.  $f(x_+)$ ) et  $f(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$ .
- $E$  est un sev de  $D$ .
- Pour  $(f, g) \in D^2$  on pose  $\langle f|g \rangle = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} \bar{f}g$ . ( $D, \langle \cdot | \cdot \rangle$ ) est un préhilbertien. On note  $\|\cdot\|_2$  la norme associée (attention au facteur  $1/(2\pi)$  par rapport à la norme 2 classique).
- La famille des  $e_n = t \mapsto \exp(int)$  est orthonormée et pour  $f \in D, c_n(f) = \langle f|e_n \rangle$ .
- Avec  $P_p = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ , on définit  $S_p(f) = \sum_{n=-p}^p c_n e_n = \text{proj}_{P_p}(f)$ .
- Inégalité de Bessel :  $\forall p \in \mathbb{N}, \|S_p(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$ .

### THÉORÈME 1.13.5 (CV EN MOYENNE QUADRATIQUE)

Soit  $f \in D$ ; alors  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f - S_p(f)\|_2 = 0$ .

### THÉORÈME 1.13.6 (BESSEL-PARSEVAL)

Soit  $f \in D$ ; alors  $\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ . En corollaire on a l'injectivité de la fonction  $D \rightarrow \ell^2, f \mapsto (c_n(f))$ .

### THÉORÈME 1.13.7 (CONVERGENCE NORMALE)

Soit  $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_{\text{mx}}^1$  et  $2\pi$ -périodique; alors la famille  $(c_n(f))$  est sommable et la série de Fourier de  $f$  converge normalement vers  $f$ .

### THÉORÈME 1.13.8 (DIRICHLET)

Soit  $f \in C_{\text{mx}}^1$   $2\pi$ -périodique; alors la série de Fourier de  $f$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers  $\frac{1}{2}(f(x_+) + f(x_-))$ .

## 1.14 Systèmes différentiels

Dans cette section,  $E$  est un ev de dimension  $n, \Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$  et  $f : \Omega \rightarrow E$ .

**Définitions 1.14.1** - Résoudre le système (E)  $x' = f(t, x)$  c'est trouver les couples  $(I, \phi)$  avec  $\phi \in \mathcal{D}(I, R)$  tels que  $\forall t \in I, \phi'(t) = f(t, \phi(t))$ .

- Une solution  $(I, \phi)$  de (E) est prolongeable s'il existe une solution  $(I', \psi)$  de (E) telle que  $I \subseteq I'$  et  $\psi|_I = \phi$ . Une solution non prolongeable strictement est dite maximale.

### Proposition 1.14.2 (Equation différentielle autonome)

Si  $f$  ne dépend pas du temps, l'ensemble des solutions de (E) est invariant par translation, ie. en notant  $\psi_\alpha : t \mapsto t + \alpha$ , si  $(I, \phi)$  est solution alors  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (\psi_{-\alpha}(I), \phi \circ \psi_\alpha)$  est solution de (E).

### THÉORÈME 1.14.3 (SOLUTION DE $X' = AX$ )

Pour tout  $(t_0, X_0)$  il existe une unique solution maximale au système différentiel  $X' = AX$  ( $A \in M_n(\mathbb{K})$ ); elle est définie sur tout  $\mathbb{R}$  et  $X(t) = \exp((t - t_0)A)X_0$ .

**Corollaire 1.14.4** L'ensemble des solutions de  $X' = AX$  définies sur  $\mathbb{R}$  est un sev de  $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$  de dimension  $n$ .

## 1.15 Équations différentielles

### Proposition 1.15.1 (Prolongement)

Soit  $(E) : x' = f(t, x), f \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ , et  $(I, \phi)$  une solution de  $E$ , avec  $I = ]a, b[$ . Si  $\phi$  a une limite finie en  $a$ , on peut prolonger  $\phi$  en une solution de  $E$  sur  $[a, b[$ .

### Proposition 1.15.2 (Diminution de l'ordre)

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E^2, g \in C^0(\Omega, E)$ . On considère  $(E) : x'' = g(t, x, x')$ . Pour  $I$  intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ , on note  $Sol(E, I) = \{\phi \in \mathcal{D}^2(I, R) | \phi \text{ solution de } E\}$ . On pose  $f : \Omega \rightarrow E, (t, x, x') \mapsto x'$ , et  $(S_E) : (x', y') = (f, g)(t, x, y)$ . Alors l'application  $Sol(S_E, I) \rightarrow Sol(E, I), (\phi, \psi) \mapsto \phi$  est bien définie et bijective.

### THÉORÈME 1.15.3 (CAUCHY-LIPSCHITZ)

On considère  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E, f \in C^1(\Omega, E)$  et  $(E) : x' = f(t, x)$ . Pour tout  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , il existe  $\alpha > 0$  tel qu'une solution à  $(E)$  vérifiant  $\phi(t_0) = x_0$  existe sur  $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$  et qu'elle soit unique.

**Corollaire 1.15.4** Si  $f$  est  $C^1$ , toute solution maximale a un intervalle de définition ouvert.

**Corollaire 1.15.5 (HP)** Dans les hypothèses du théorème, deux solutions  $(I, \phi)$  et  $(I, \psi)$  de  $(E) : x' = f(t, x)$  coïncidant en un point sont égales.

**THÉORÈME 1.15.6 (CAUCHY-LIPSCHITZ GLOBAL)**  
Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R} \times E$ ,  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, E)$ ,  $(E) : x' = f(t, x)$  et  $(t_0, x_0) \in \Omega$ . Alors il existe une unique solution au problème de Cauchy.

Dans la suite, on s'intéresse aux *équations différentielles linéaires* :  $E$  désigne un evn de dimension finie,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $(a, b) \in F(I, E) \times F(I, \mathcal{L}(E))$ ,  $(E) : x' = [a(t)](x) + b(t)$  et  $(H) : x' = [a(t)](x)$ .

**Proposition 1.15.7** Soit  $J$  un intervalle contenu dans  $I$ .  $Sol(H, J)$  est un sev de  $F(J, E)$ .  $Sol(E, J)$  est un sous espace affine de  $F(J, E)$  et pour  $\phi \in Sol(E, J)$ , on a  $Sol(E, J) = \phi + Sol(H, J)$ .

**THÉORÈME 1.15.8 (CAUCHY)**  
Si  $(a, b)$  sont continues sur  $I$ , pour  $(t_0, x_0) \in I \times E$ , il existe une unique solution  $\phi$  définie sur  $I$  telle que  $\phi(t_0) = x_0$ . Autrement dit,  $E$  et  $Sol(I, E)$  sont isomorphes par  $Sol(I, E) \rightarrow E, x \rightarrow x(t_0)$  pour un  $t_0$  quelconque dans  $I$ .

Désormais,  $E = \mathbb{R}^n$ , et  $(A, B) \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ .

**Déf. et prop. 1.15.9 (Wronskien)**

- On appelle système fondamental de solutions de  $(E)$  toute base de l'espace vectoriel  $Sol(I, E)$ .
- Soit  $(X_i) \in (\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n))^n$  solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On appelle wronskien de  $(X_i)$  le déterminant  $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$ .
- Soient  $(X_1, \dots, X_n) \in Sol(I, E)^n$ . Alors  $X_1, \dots, X_n$  est un système fondamental de solution  $\iff \exists t \in I$  tq  $W(t) \neq 0$ .
- Dans le cas où  $E = \mathbb{R}$  et où  $(E)$  est une équation différentielle linéaire d'ordre  $p$ , on passe à une équation différentielle  $(E_1)$  d'ordre 1 avec  $E_1 = \mathbb{R}^p$  comme dans 1.15.2 et on a alors, avec  $(v_1, \dots, v_p) \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})^p$  une famille de solutions de  $(E)$ ,

$$W(v_1, \dots, v_p)(t) = \det \begin{pmatrix} v_1(t) & \dots & v_p(t) \\ \vdots & v_j^{(i)} & \vdots \\ v_1^{(p)}(t) & \dots & v_p^{(p)}(t) \end{pmatrix}$$

**1.16 Calcul différentiel**

**Déf. et prop. 1.16.1 (Différentiabilité)**

- Soit  $E$  un evn,  $U$  un ouvert de  $E$ ,  $f : U \rightarrow F$  et  $a \in U$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  s'il existe  $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$  tq  $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ .  $u$  est appelée application linéaire tangente.
- Il existe au plus une application linéaire tangente à  $f$  en  $a$ , qu'on appelle différentielle de  $f$  en  $a$  et qu'on note  $df(a)$ .
- Lorsque  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ , on dit qu'elle est différentiable sur  $U$ , et l'application  $U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F), x \mapsto df(x)$  est appelée application différentielle de  $f$ .
- La différentiabilité implique la continuité.

**Déf. et prop. 1.16.2 (Dérivées partielles)**

- Soit  $h \in E$ ; par définition d'un ouvert, si  $a \in U$ , il existe  $r$  tel que  $I_r = ]a - r \times h; a + r \times h[ \subseteq U$ . Si  $\phi_{a,h} : ]-r, r[ \rightarrow E, t \mapsto f(a + th)$  est dérivable en 0, on dit que  $f$  a une dérivée suivant  $h$  en  $a$ , qu'on note  $D_h f(a) = \frac{\partial f}{\partial h}(a) = \phi'_{a,h}(0)$ .

- On appelle dérivées partielles de  $f$  en  $a$  les dérivées en  $a$  selon les vecteurs  $(e_1, \dots, e_p)$  (qui forment une base de  $E$ ).
- Si  $f : U \rightarrow F$  est différentiable en  $a$  alors  $f$  est dérivable selon tout vecteur en  $a$  et pour  $h \in E, df(a)(h) = D_h f(a)$ .

**Définition 1.16.3** On dit que  $f$  est continûment différentiable (ou  $\mathcal{C}^1$ ) sur  $U$  lorsque  $f$  est différentiable en tout point selon tout vecteur et que pour tout  $h \in U$ , l'application  $D_h f$  est continue.

**THÉORÈME 1.16.4 (FONDAMENTAL)**  
Soient  $f : U \rightarrow F, (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ . Si  $f$  a en tout point de  $U$  des dérivées partielles et que les fonctions  $D_{e_i} f$  sont continues sur  $U$  alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Proposition 1.16.5 (HP)**  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U \iff (f$  est différentiable sur  $U$  et l'application  $x \mapsto df(x)$  est continue).

**Propriétés 1.16.6** - Soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, V)$  ( $V \subseteq F$  un sev de dim finie), et  $g \in \mathcal{C}^1(V, G)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{C}^1(U, G)$  et  $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$

- En particulier, si  $U = I$  un intervalle de  $\mathbb{R}, d(f \circ \phi)(x) = df(\phi(x)) \circ \phi'(x)$ .
- $\mathcal{C}^1(U, F)$  est un sev de  $F^U$ .
- Soit  $f \in F(U, F), (v_1, \dots, v_n)$  une base de  $F$ . On pose  $f_i = v_i^* \circ f$ , de sorte que  $f(x) = \sum_i f_i(x)v_i$ . Alors :  $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$  ssi  $\forall i, f_i \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ . Si c'est le cas,  $D_h f_i(x) = v_i^* \circ D_h f(x)$  et  $df_i(x)(h) = v_i^* \circ df(x)(h)$ .
- Cas  $F = \mathbb{R}. \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  est une sous algèbre de  $F(U, \mathbb{R})$  et on a, pour  $(f, g) \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}), d(f \times g)(x)(h) = df(x)(h) \times g(x) + f(x) \times dg(x)(h)$ . De plus si  $g$  est non nulle sur  $U, f/g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$  et  $d(f/g)(x)(h) = g(x)^{-2}(df(x)(h) \times g(x) - f(x) \times dg(x)(h))$ .

**Déf. et prop. 1.16.7 (Jacobi)**

- Soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$  et  $(V_i)$  (resp.  $(W_j)$ ) une base de  $E$  (resp.  $F$ ). On note  $J_f(x) = \text{mat}_{V,W} df(x)$ .

$$j_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(x) \\ \vdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(x) \end{pmatrix}$$

- Lorsque  $E = F$  la matrice jacobienne est carrée, son déterminant, appelé jacobien de  $f$  est noté  $J_f(x)$ .
- Composition.  $j_{g \circ f}(x) = j_g(f(x)) \cdot j_f(x)$ . C'est à dire :  $D_j(g \circ f)_i(x) = \sum_{k=1}^n D_k g_i(f(x)) \cdot D_j f_k(x)$ .

**Déf. et prop. 1.16.8 (Difféomorphismes)**

- Soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, V)$  ( $V$  ouvert de  $F$ ). Si  $f$  est bijective et que  $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, U), f$  est un difféomorphisme de  $U$  sur  $V$ .
- Si  $f : U \rightarrow V$  est un difféomorphisme alors  $\forall x \in U, df(x)$  est un isomorphisme.
- En particulier, ceci impose  $\dim E = \dim F$ . On a alors  $J_f(x) \neq 0$ .

**THÉORÈME 1.16.9 (CARAC. DES DIFFÉOMORPHISMES)**  
Soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$  ( $U$  ouvert de  $E$ ) injective. Alors  $f(U)$  est ouvert et  $f$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$  ssi  $\forall x \in U, df(x)$  est un isomorphisme (ie  $\dim F = \dim E$  et  $0 \notin J_f(U)$ ).

**Déf. et prop. 1.16.10 (Classe  $\mathcal{C}^k$ )**

- $f \in \mathcal{C}^1(U, F)$  est dite de classe  $\mathcal{C}^2$  si  $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, D_j f \in \mathcal{C}^1(U, F)$ .
- Théorème de Schwarz : pour  $f \in \mathcal{C}^2(U, F), D_i D_j f = D_j D_i f$ .
- Une fonction  $f \in \mathcal{C}^{k-1}(U, F)$  dont les dérivées partielles d'ordre  $k - 1$  sont  $\mathcal{C}^1$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$ .
- Si  $g \in \mathcal{C}^k(U, V), f \in \mathcal{C}^k(V, F)$  alors  $f \circ g \in \mathcal{C}^k(U, F)$ .
- Théorème de Schwarz généralisé : les  $D_j$  commutent sur  $\mathcal{C}^k$ .
- On appelle  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme une bijection  $\mathcal{C}^k$  dont la réciproque est aussi  $\mathcal{C}^k$ .

**THÉORÈME 1.16.11 (CARAC.  $\mathcal{C}^k$ -DIFFÉOMORPHISMES)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^k(U, F)$ .  $f$  est un  $\mathcal{C}^k$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$  ssi elle est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $f(U)$ .

**Déf. et prop. 1.16.12 (Gradient)**

- Soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ . Pour  $x \in U$ , il existe un unique vecteur de  $E$  appelé gradient et noté  $\overrightarrow{\text{grad}} f(x)$  ou  $\nabla f(x)$  tel que  $\forall h \in E, df(x)(h) = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(x) | h \rangle$ .
- Soit  $e = (e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $E$ . Alors pour  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}), \nabla f(x) = \sum_{j=1}^p D_j f(x) e_j$ .

**Proposition 1.16.13 (Inégalité de la moyenne)**

Etant donné  $U$  un ouvert connexe de  $E$ , et  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ , on a  $\forall (a, b) \in U^2, |f(a) - f(b)| \leq \sup_{[0,1]} |df(a + t(b - a))(b - a)|$

En particulier, si on suppose  $U$  est connexe (voire même connexe par arc) et  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ , alors  $f$  est constante ssi  $df(U) = \{0\}$ .

**THÉORÈME 1.16.14**

Soit  $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}), U$  ouvert de  $E$ . Si  $f$  a un extrémum local en  $x \in U$  alors  $x$  est un point critique (ie  $df(x) = 0$ ).

**Proposition 1.16.15 (Taylor-Young)** Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}), U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $a \in U$ . Alors

$$f(a+h) - f(a) - df(a)(h) - \frac{1}{2!} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} D_i D_j f(a) h_i h_j = o(\|h\|^2)$$

**THÉORÈME 1.16.16 (C.S. D'EXTRÊMUM)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $a$  un point critique de  $f$ . La formule de Taylor-Young donne :  $f(a+h) = f(a) + Q(h) + o(\|h\|^2)$  où  $Q(h) = \sum_i h_i^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{i < j} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ .

Si  $Q$  est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative) alors  $f$  admet un minimum (resp. un maximum) relatif en  $a$ .

**Corollaire 1.16.17 (C.S. d'extrémum en dimension 2)**

Soit  $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}) U$  ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $a$  un point critique de  $f$ . On note  $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f(a), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f(a), t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(a)$ . Si  $rt - s^2 > 0, f$  a un extrémum local en  $a$  (minimum local si  $r > 0$  maximum local sinon). Si  $rt - s^2 < 0, f$  n'a pas d'extrémum local en  $a$ .

## 2 Algèbre

### 2.1 Arithmétique

**Déf. et prop. 2.1.1 (Idéaux)** - Un idéal d'un anneau commutatif  $A$  est un sous groupe de  $(A, +)$  stable par multiplication par tout élément de  $A$ .

- L'image réciproque d'un idéal par un morphisme d'anneau est un idéal. En particulier, le noyau d'un morphisme d'anneau est un idéal (en fait, tous les idéaux sont de cette forme).
- Une intersection - finie ou infinie - d'idéaux est un idéal.
- Soient  $i, j$  deux idéaux. On note  $i + j = \{x + y | (x, y) \in i \times j\}$ ; c'est un idéal. On définit ainsi par récurrence la somme de  $n$  idéaux.

**Déf. et prop. 2.1.2 (Idéaux d'un anneau principal)**

- On dit d'un anneau  $A$  qu'il est principal si tous ses idéaux sont de la forme  $xA$  (avec  $x \in A$ ).  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{K}[X]$  sont principaux, c'est à dire que tout idéal de  $\mathbb{Z}$  (resp.  $\mathbb{K}[X]$ ) est de la forme  $n\mathbb{Z}$  (resp.  $P \times \mathbb{K}[X]$ ).
- Soit  $A$  intègre,  $x \neq 0$  et  $y \in A$ .  $(x | y \text{ et } y | x) \iff \exists u$  inversible,  $y = ux$ ;  $y$  et  $x$  sont dits associés. (Remarque que  $x | y \iff x \in yA \iff xA \subseteq yA$ . La proposition exprime que si  $xA = yA, y = ux$  avec  $u$  inversible).

**Définition 2.1.3 (Pgcd, ppcm)**

- La relation  $a \diamond b \iff a$  est associé à  $b$  est une relation d'équivalence, dont l'ensemble des classes est noté  $A/\diamond$ . J'appelle fonction de normalisation une application  $N : A/\diamond \rightarrow A$  telle que  $N(ab) = N(a)N(b)$  et  $N(1) = 1$ . (Attention cette appellation est personnelle!).
- Soit  $A$  un anneau principal,  $N$  une normalisation, et  $a_1, \dots, a_n \in A$ . On note  $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = N(\delta)$  où  $\delta$  est tel que  $\delta A = \sum_{i=1}^n a_i A$ . On note  $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n) = N(\delta)$  où  $\delta$  est tel que  $\delta A = \bigcap_{i=1}^n a_i A$ .
- Plus concrètement,  $\mathbb{Z}$  peut être muni de la normalisation  $N(x) = |x|$ ; pour  $\mathbb{K}[X]$ , on peut choisir  $N(P) = P/a_n$  (où  $a_n$  est le coefficient dominant de  $P$ ). On retrouve alors les définitions de ppcm et pgcd habituelles.

**Propriétés 2.1.4** Dans la suite,  $A$  est un anneau principal muni d'une normalisation.

- Théorème de Bézout :  $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = 1 \iff$  il existe  $v_1, \dots, v_n$  tel que  $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 1$ .
- Si  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  et  $\forall i \neq j, \text{pgcd}(a_i, a_j) = 1$ , alors,  $\text{ppcm}(a_1, \dots, a_n) = N(a_1 \dots a_n)$ .
- Lemme de Gauss : si  $a | bc$  et  $\text{pgcd}(a, b) = 1$ , alors  $a | c$ .
- Si  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, c) = 1$  alors  $\text{pgcd}(a, bc) = 1$ .

**Déf. et prop. 2.1.5 (Anneau quotient)**

- Soit  $A$  un anneau commutatif,  $i$  un idéal de  $A$ . Alors la relation  $a \equiv b \iff a - b \in i$  ( $a, b \in A$ ) est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont de la forme  $\bar{a} = a + i$  (où  $a \in A$ ) et leur ensemble muni des lois  $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$  et  $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \times b}$  est aussi un anneau.
- La surjection canonique  $\Pi : A \rightarrow A/i, a \mapsto \bar{a}$  est un morphisme d'anneau.

**Exemple 2.1.6** En prenant  $A = \mathbb{Z}$  et  $i = n\mathbb{Z}$  on construit l'anneau des entiers modulo  $n, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . On peut mettre cette ensemble en bijection avec  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , avec les règles de calcul modulo  $n$ .

**Propriétés 2.1.7** - Pour  $m \in \mathbb{Z}, \bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est inversible ssi  $m \wedge n = 1$ . On déduit de cela que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un corps ssi  $n$  est premier.

- Théorème Wilson :  $n$  est premier ssi  $(n - 1)! \equiv -1[n]$ .
- Lemme chinois : pour  $(m, n) \in \mathbb{Z}$ , premiers entre eux,  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ . Autrement dit un système de congruence  $x \equiv a [n], x \equiv b [m]$  a au moins une solution, et si on en connaît une les autres sont de la forme  $x + mnk$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

- Indicateur d'Euler : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\phi(n)$  le nombre d'éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Si  $m \wedge n = 1$ ,  $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ .

**Remarque 2.1.8** La première propriété énoncée vaut aussi pour  $\mathbb{K}[X] : \mathbb{K}[X]/(P)$  est un corps ssi  $P$  est irréductible. Sa dimension comme  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est  $\deg P$ . L'application  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}[X]/(P), a \mapsto \bar{a}$  est un morphisme injectif de corps, et le polynôme  $\bar{P}$  a une racine dans  $\mathbb{K}[X]/(P)$  (c'est  $\bar{X}$ ). Ainsi, par récurrence, pour  $P \in \mathbb{K}[X]$ , il existe une extension de corps dans laquelle  $P$  est scindé.

## 2.2 Groupes

**THÉORÈME 2.2.1 (ISOMORPHISME)**

Soient  $G$  et  $H$  des groupes, et  $\phi$  un morphisme de  $G$  dans  $H$ . Alors  $\text{Im } \phi \simeq G / \text{Ker } \phi$ .

**Déf. et prop. 2.2.2 (Ordre d'un élément)**

- Soit  $G$  un groupe et  $a \in G$ . L'application  $\gamma_a : \mathbb{Z} \rightarrow G, k \mapsto a^k$  est un morphisme de groupe. On note  $\text{gr}(a) = \text{Im } \gamma_a$  le sous groupe engendré par  $a$ .
- Par théorème d'isomorphisme, soit  $\text{gr}(a)$  est fini d'ordre  $n$ , et isomorphe à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , soit il est infini isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .
- Un groupe  $G$  est dit monogène s'il est égal à  $\text{gr}(a)$  pour un certain  $a \in G$ . S'il est fini, il est dit cyclique. Le point précédent montre qu'un groupe monogène est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  ou à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Définition 2.2.3 (Groupe engendré)**

Soit  $G$  un groupe, et  $A \subseteq G$ . L'intersection des sous-groupes de  $G$  contenant  $A$  est appelé sous groupe engendré par  $A$  noté  $\text{gr}(A)$ ; c'est un sous groupe de  $G$  contenant  $A$ .

$\text{gr}(A)$  est aussi l'ensemble de produits finis d'éléments de  $A$  ou d'inverses d'éléments de  $A$ .

**THÉORÈME 2.2.4 (LAGRANGE)**

L'ordre de tout sous groupe d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. En particulier l'ordre de tout élément divise l'ordre du groupe, ie  $\forall a \in G, a^{\text{Card } G} = e$ .

**Corollaire 2.2.5 (Petit théorème de Fermat)**

Si  $p$  est premier,  $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \bar{a}^{p-1} = \bar{1}$ . (le groupe multiplicatif  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  est d'ordre  $p-1$ ).

**Déf. et prop. 2.2.6 (Action de groupe)**

- On appelle action (ou opération) de groupe toute application  $G \times X \rightarrow X, (g, x) \mapsto g \cdot x$  telle que  $\forall (g, h, x) \in G^2 \times X, g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$  et  $\forall x \in X, e \cdot x = x$ .
- Soit  $G$  un groupe opérant sur  $X$ . L'application  $\sigma(g) : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$  est une permutation de  $X$ . L'application  $\sigma$  est un morphisme de  $G$  dans le groupe symétrique  $\mathfrak{S}(X)$ .
- La relation  $x \sim y \iff \exists g \in G, x = g \cdot y$  est une relation d'équivalence. La classe de  $x$ , notée  $G_x$  est appelée orbite de  $x$ .
- L'ensemble  $S_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  pour  $x \in X$  est appelé stabilisateur de  $x$ . C'est un sous groupe de  $G$  et on a  $\text{Card } G = \text{Card } G_x \text{ Card } S_x$ .

**THÉORÈME 2.2.7 (ÉQUATION AUX CLASSES)**

Soit  $G$  un groupe fini opérant sur un ensemble fini  $X$ . Soit  $\Theta$  une partie contenant un représentant de chaque orbite. Alors :  $\text{Card } X = \sum_{x \in \Theta} \frac{\text{Card } G}{\text{Card } S_x}$

## 2.3 Algèbre générale

**Déf. et prop. 2.3.1 (Caract. d'un anneau comm.)**

- Soit  $A$  un anneau commutatif. L'application  $\mathbb{Z} \rightarrow A, k \mapsto k \cdot 1$  est le seul morphisme de  $\mathbb{Z}$  dans  $A$ ; son noyau est de la forme  $n\mathbb{Z}$  pour un unique  $n \in \mathbb{N}$  appelé caractéristique de  $A$ .
- La caractéristique d'un anneau intègre est soit 0 soit un nombre premier.

**Déf. et prop. 2.3.2 (Polynômes annulateurs)**

- Soit  $A$  une  $K$ -algèbre non nulle et  $a \in A$ . L'application  $\phi_a : \mathbb{K}[X] \rightarrow A, \sum_i b_i X^i \mapsto \sum_i b_i a^i$  est un morphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbre. Son image est notée  $\mathbb{K}[a]$ ; son noyau est l'ensemble des polynômes annulateurs de  $A$  qui forme un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ . Quand  $\text{Ker } \phi_a$  est non nul, on appelle polynôme minimal de  $A$  et on note  $\pi_a$  son unique générateur unitaire.
- Il existe un polynôme annulateur non nul de  $a$  de degré  $\leq n \iff (e, a, \dots, a^n)$  est liée. Si  $\pi_a$  existe, en notant  $n = \deg \pi_a$ , la famille  $(e, a, \dots, a^{n-1})$  est une base de  $\mathbb{K}[a]$ .
- Si  $P$  annule  $a$ , est irréductible et unitaire, alors  $P = \pi_a$ .
- Réciproquement si  $A$  est intègre,  $\pi_a$  est irréductible.
- Supposons  $\dim \mathbb{K}[a] < +\infty$ . Alors :  $P(a)$  est inversible  $\iff P \wedge \pi_a = 1$  et dans ce cas  $P(a)^{-1} \in \mathbb{K}[a]$ .
- En combinant les deux résultats précédents, on montre que si  $A$  est intègre et si  $\dim \mathbb{K}[a] < +\infty$  alors  $\mathbb{K}[a]$  est un corps.

## 2.4 Réduction des endomorphismes

**THÉORÈME 2.4.1 (DÉCOMPOSITION DES NOYAUX)**

Soient  $(P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^n$  premiers entre eux deux à deux,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\text{Ker}(\prod_{i=1}^n P_i)(u) = \bigoplus_{i=1}^n \text{Ker } P_i(u)$

**Déf. et prop. 2.4.2** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

- $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre de  $u$  ssi  $u - \lambda Id$  n'est pas injectif, c'est à dire qu'il existe  $x \in E \setminus \{0\}$  tq  $u(x) = \lambda x$ .  $x$  est appelé vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . On note  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda Id)$  l'espace propre associé à la vp  $\lambda$  (cet espace est stable par  $u$ ). L'ensemble des valeurs propres de  $u$  est noté  $\text{Sp } u$ .
- Si  $\lambda$  est vp de  $u$  associée à  $x$ ,  $\lambda^n$  est vp de  $u^n$  associée à  $x$ . Plus généralement, pour  $P \in \mathbb{K}[X], P(\lambda)$  est vp de  $P(u)$  associée à  $x$ .
- Toute racine du polynôme minimal est valeur propre de  $u$ . Réciproquement, si  $\lambda \in \text{Sp } u$  et  $P(u) = 0$ , alors  $P(\lambda) = 0$ .
- Soit  $a \in GL(E)$ .  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  si  $\lambda \in \text{Sp}(aua^{-1})$ .  $E_\lambda(aua^{-1}) = a(E_\lambda(u))$ .

**Proposition 2.4.3 (Polynôme caractéristique)**

- $\lambda \in \mathbb{K}$  est vp de  $u \in \mathcal{L}(E)$  ssi  $\det(u - \lambda Id) = 0$ .
- La fonction  $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \lambda \mapsto \det(u - \lambda Id)$  est polynomiale en  $\lambda$  de degré  $n$ . Le coefficient de  $\lambda^n$  est  $(-1)^n$ , celui de  $\lambda^{n-1}$  est  $(-1)^{n-1} \text{tr } u$  et le terme constant est  $\det u$ .
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

**Propriétés 2.4.4** - On note  $m_\lambda$  l'ordre de multiplicité

- de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_u$ . On a  $\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$ .
- Lorsque  $\chi_u$  est scindé, les relations entre coefficients et racines donnent  $\text{tr } u = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda \lambda$  et  $\det u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda}$ .

- Si les  $E_i$  sont des espaces stables par  $u$  tels que  $\bigoplus_{i=1}^r E_i = E$  alors  $\chi_u(X) = \prod_{i=1}^r \chi_{u_i}(X)$  en notant  $u_i \in \mathcal{L}(E_i)$  la restriction de  $u$  à  $E_i$ .

### THÉORÈME 2.4.5 (CAYLEY-HAMILTON)

Le polynôme caractéristique de  $u \in \mathcal{L}(E)$  est annulateur de  $u$ .

**Proposition 2.4.6 (Diagonalisation)** Les assertions suivantes sont équivalentes ( $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ ) :

- (i)  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable.
- (ii) il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .
- (iii)  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$ .
- (iv) il existe une décomposition de  $E$  en somme directe de sev stables par  $u$  sur chacun desquels  $u$  induit une homothétie.
- (v)  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = n$ .
- (vi)  $\chi_u$  est scindé et  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$ .
- (vii) il existe un polynôme annulateur de  $u$  scindé et à racines simples.

**Proposition 2.4.7 (Trigonalisation)**  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable si et seulement si  $\chi_u(X)$  est scindé ssi il existe un polynôme annulateur scindé. En particulier, toute matrice à coefficients dans un corps algébriquement clot ( $\mathbb{C}$  par exemple) est trigonalisable.

## 2.5 Formes quadratiques

Dans toute la suite, on suppose que  $\mathbb{K}$  est un corps de caractéristique différente de 2.

### Déf. et prop. 2.5.1

- Une forme bilinéaire est une application  $\phi : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  (où  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -ev) telle que  $\forall (x, y) \in E \times F$ , les applications  $\phi_x : y \mapsto \phi(x, y)$  et  $\phi_y : x \mapsto \phi(x, y)$  soient linéaires. Dans la suite,  $E = F$ .
- Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ; soient  $x, y \in E$  et  $X, Y$  les vecteurs coordonnées associés dans  $B$ . Alors  $\phi(x, y) = {}^t XMY$  avec  $M = (\phi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . En particulier,  $q(x) = {}^t XMX$ .
- L'application qui associe à une forme bilinéaire sa matrice dans une base donnée est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
- Une forme quadratique est une application du type  $q : E \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $x \mapsto \phi(x, x)$  où  $\phi$  est une forme bilinéaire symétrique.  $\phi$  est appelée forme polaire associée à  $q$ .
- On appelle matrice de  $q$  la matrice de sa forme polaire; on appelle rang de  $q$  le rang de cette matrice.

**Propriétés 2.5.2 (Polarisation)** Étant donnée une forme quadratique  $q$ , l'application définie par  $\phi(x, y) = \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$  est une application bilinéaire symétrique telle que  $\phi(x, x) = q(x)$ .

**Proposition 2.5.3 (Isomorphismes)** L'application qui à une forme bilinéaire symétrique  $\phi$  associe la forme quadratique  $q : x \mapsto \phi(x, x)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

### THÉORÈME 2.5.4 (LOI D'INERTIE DE SYLVESTER)

Pour toute décomposition d'une forme quadratique de la forme  $q(x) = \sum_{i=1}^r |g_i(x)|^2 - \sum_{j=1}^s |f_j(x)|^2$ , où les  $(g_i), (f_j)$

sont des formes linéaires linéairement indépendantes, les entiers  $(r, s)$  sont égaux, et on appelle signature de  $q$  le couple  $(r, s)$ . On a alors  $r + s = \text{rg } q$ .

### THÉORÈME 2.5.5 (INÉGALITÉ DE SCHWARZ)

Si  $q$  est une forme quadratique positive (ie.  $q(x) \geq 0$  pour tout  $x$ ), alors  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $|\phi(x, y)|^2 \leq q(x)q(y)$ .

## 2.6 Espaces préhilbertiens

Dans la suite,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.6.1 (Produit scalaire)** On appelle produit scalaire sur  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev une application  $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  linéaire à droite (ie.  $\forall x \in E$ ,  $\phi_x : y \mapsto \phi(x, y)$  est linéaire), à symétrie hilbertienne ( $\phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$ ) et telle que  $\forall x \in E$ ,  $x \neq 0 \mapsto \phi(x, x) > 0$ .

**Proposition 2.6.2 (Inégalités)** Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un préhilbertien, on note  $\|x\| = \langle x|x \rangle^{1/2}$ .

- Cauchy-Schwarz :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .
- Minkowski :  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ; corollaire :  $\|\cdot\|$  est une norme.

**Proposition 2.6.3** Pour  $x \in E$ , on pose  $\phi_x(y) = \langle x|y \rangle$ , c'est une forme bilinéaire continue. On a alors :  $\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x|y \rangle|$ , et donc  $\forall u \in \mathcal{L}_c(E)$ ,  $\|u\| = \sup_{\|y\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |\langle u(x)|y \rangle|$ .

**Propriétés 2.6.4 (Égalités)** Identités de polarisation :

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} : \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x|y \rangle$$

$$4\langle x|y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} : \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \times \text{Re}\langle x|y \rangle$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \times \text{Re}\langle x|y \rangle$$

$$4\langle x|y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2$$

$$\text{Identité du parallélogramme : } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

### Déf. et prop. 2.6.5 (Orthogonalité)

- Une famille  $(e_i) \in \mathbb{R}^I$  orthogonale (ie.  $\forall (i, j) \in I^2$ ,  $i \neq j \implies \langle e_i|e_j \rangle = 0$ ) ne contenant pas le vecteur nul est libre.
- Orthogonal d'une partie :  $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x|y \rangle = 0\} = \bigcap_{x \in A} \ker \phi_x$
- Deux sev orthogonaux sont en somme directe.
- $F, G$  deux sev de  $E$ . Si  $F \oplus G = E$ ,  $F$  et  $G$  sont supplémentaires orthogonaux ssi  $G \subseteq F^\perp$  (ssi  $F \subseteq G^\perp$ ) et alors  $F = (F^\perp)^\perp$

### THÉORÈME 2.6.6 (ORTHOGONALISATION DE GRAM-SCHMIDT)

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille libre d'un espace préhilbertien. Il existe une famille  $(y_1, \dots, y_n)$  orthonormale tq  $\forall 1 \leq k \leq n$ ,  $\text{vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{vect}(y_1, \dots, y_k)$ . (Autrement dit : pour toute famille libre il existe une famille orthonormale de même drapreau)

### Proposition 2.6.7 (Orthogonalité en dim. finie)

Soit  $E$  un préhilbertien de dimension finie.

- $E$  admet une base orthonormale.
- Toute famille orthonormale de  $E$  peut être complétée en une base orthonormale.
- Soit  $F$  un sev de  $E$ .  $E = F \oplus F^\perp$ .

### Proposition 2.6.8 (En dimension quelconque)

- Soit  $F$  un sev de  $E$  de dimension finie, alors  $E = F \oplus F^\perp$ .

- Soit  $F$  un sev de  $E$  de dimension finie,  $(e_1, \dots, e_r)$  une base de  $F$ , et  $p_F$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors  $p_F(x) = \sum_{i=1}^r \langle e_i | x \rangle e_i$ .
- Corollaire : inégalité de Bessel :  $\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^r |\langle e_i | x \rangle|^2$ .

#### THÉORÈME 2.6.9

Soit  $F$  un sev de dimension finie de  $E$  un préhilbertien et  $x \in E$ . Alors la fonction  $y \rightarrow \|x - y\|$  pour  $y \in F$  admet un minimum atteint en un unique point de  $F$  à savoir  $y = p_F(x)$  on a alors  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ , et  $\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2$ .

#### THÉORÈME 2.6.10

Soit  $E$  un espace euclidien ou hermitien. L'application  $f : E \rightarrow E^*$ ,  $x \mapsto \phi_x$  est un isomorphisme d'espace vectoriels. Toute forme linéaire se met donc sous la forme  $y \mapsto \langle a | y \rangle$  pour un unique  $a$ .

**Déf. et prop. 2.6.11 (Adjoint)**  $E$  est un espace euclidien ou hermitien.

- $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\exists ! u^* \in \mathcal{L}(E)$  tq  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $\langle u^*(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$  : c'est l'adjoint de  $u$ .
- L'application  $f : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ ,  $u \mapsto u^*$  est un automorphisme involutif (ie  $f^2 = Id$ ) de  $\mathcal{L}(E)$ .
- Un sev  $F$  est stable par  $u$  ssi  $F^\perp$  est stable par  $u^*$
- $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im} u)^\perp$ ;  $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker} u)^\perp$ .
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $B$  une base orthonormée de  $E$  alors  $\text{mat}_E(u^*) = {}^t \overline{(\text{mat}_E(u))}$ .
- De ceci on tire :  $\text{rg} u = \text{rg} u^*$  et  $\det u = \overline{\det u^*}$ .

**Déf. et prop. 2.6.12 (Endomorphismes autoadjoints)**

Soit  $E$  euclidien.

- Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  tq  $u = u^*$  est dit symétrique.
- Soit  $B$  une base orthonormée de  $E$ . Alors  $u$  est symétrique ssi  $\text{mat}_B(u)$  est symétrique.
- Un endomorphisme symétrique réel est diagonalisable dans une base orthonormale.
- Toute matrice symétrique à valeurs réelles s'écrit  $M = {}^t P D P$  où  $D$  est diagonale et  $P$  est une matrice orthogonale.
- Pour un endomorphisme symétrique on a :  $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle u(x) | x \rangle| = \max_{\lambda \in \text{Sp} u} |\lambda|$  (rayon spectral de  $u$ ).

**Déf. et prop. 2.6.13 (Positivité, définition)**

- Un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$  est dit positif (resp. défini positif) si  $\forall x \in E$ ,  $x \neq 0 \mapsto \langle u(x) | x \rangle \geq 0$  (resp.  $> 0$ ).
- $E$  étant Euclidien, soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  (resp.  $\in GL(E)$ ). Alors  $u^*u$  et  $uu^*$  sont des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs).
- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est positif (resp. défini positif), alors  $\text{Sp} u \subseteq \mathbb{R}_+$  (resp.  $\subseteq \mathbb{R}_+^*$ ).
- Réciproquement, si  $u$  est symétrique, il est positif si et seulement si  $\text{Sp} u \subseteq \mathbb{R}_+$ .

**Remarque 2.6.14 (HP)** Tout endomorphisme symétrique positif est de la forme  $u^*u$ .

**Proposition 2.6.15 (Endomorphisme orthogonal)**

Soit  $u$  un endomorphisme d'un espace euclidien. On dit qu'il est orthogonal s'il vérifie l'une des cinq assertions suivantes, qui sont équivalentes :

- (i)  $\forall (x, y) \in E^2$ ,  $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$  (conservation du produit scalaire).

- (ii)  $\forall x \in E$ ,  $\|u(x)\| = \|x\|$  (conservation de la norme).
- (iii)  $u$  est inversible et  $u^{-1} = u^*$ .
- (iv)  $u$  transforme toute base orthonormée en une base orthonormée.
- (v) dans toute base orthonormée  $B$ ,  $A = \text{mat}_B(u)$  vérifie  ${}^t A A = I_n$ .

**Proposition 2.6.16 (Matrices orthogonales)**

Une matrice est dite orthogonale si elle vérifie l'une des assertions suivantes, qui sont équivalentes :

- (i)  $A \in M_n(\mathbb{R})$  a pour endomorphisme canoniquement associé un automorphisme orthogonal.
- (ii) Les vecteurs colonnes de  $A$  forment une famille orthonormale de  $\mathbb{R}^n$
- (iii) Les vecteurs lignes de  $A$  forment une famille orthonormale de  $\mathbb{R}^n$
- (iv)  ${}^t A A = A {}^t A = I_n$ .

**Proposition 2.6.17** - Si  $B$  et  $B'$  sont deux bases orthonormées, la matrice de passage  $P_{BB'}$  est orthogonale.

- Soit  $B$  une base orthonormée de  $E$ .  $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$  est orthonormée ssi  $\text{mat}_B(e'_1, \dots, e'_n)$  est orthogonale.

### 3 Formulaire

#### 3.1 Trigonométrie

Addition, duplication :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) &= \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \\ \tan(a+b) &= (\tan(a) + \tan(b))/(1 - \tan(a)\tan(b)) \\ \tan(a-b) &= (\tan(a) - \tan(b))/(1 + \tan(a)\tan(b)) \\ \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) \\ &= 2\cos^2(a) - 1 \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

Transformation tangente :  $t = \tan(x/2)$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= 2t/(1+t^2); \quad \cos(x) = (1-t^2)/(1+t^2) \\ \tan(x) &= 2t/(1-t^2) \end{aligned}$$

Transformation de somme en produit :

$$\begin{aligned} \sin(a) + \sin(b) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin(a) - \sin(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) + \cos(b) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos(a) - \cos(b) &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

Dérivées des fonctions réciproques :

$$\begin{aligned} (\arcsin)'(x) &= 1/\sqrt{1-x^2} \\ (\arccos)'(x) &= -1/\sqrt{1-x^2} \\ (\arctan)'(x) &= 1/(1+x^2) \end{aligned}$$

Divers :

$$\begin{aligned} \arctan(x) + \arctan(1/x) &= \operatorname{sgn}(x) \times \pi/2 \\ \arcsin(x) + \arccos(x) &= \pi/2 \end{aligned}$$

#### 3.2 Trigonométrie hyperbolique

Addition, duplication :

$$\begin{aligned} \cosh(a+b) &= \cosh(a)\cosh(b) + \sinh(a)\sinh(b) \\ \sinh(a+b) &= \cosh(a)\sinh(b) + \sinh(a)\cosh(b) \\ \cosh(2a) &= 2\cosh^2(a) - 1 \\ \sinh(2a) &= 2\sinh(a)\cosh(a) \end{aligned}$$

Transformation tangente :  $t = \tanh(x/2)$

$$\cosh(x) = \frac{1+t^2}{1-t^2}; \quad \sinh(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

#### 3.3 Intégrales et primitives

##### Proposition 3.3.1 (Changements de variable)

- Règle de Bioche.  $f(x) = F(\cos(x), \sin(x))$ . Si  $f$  paire, on prend  $u = \cos(x)$ ; si  $f$  est impaire,  $u = \sin(x)$ ; si  $f$   $T$ -périodique,  $u = \tan(\pi x/T)$ ; sinon  $u = \tan(x/2)$ .
- Fractions rationnelles de fonctions hyperboliques : le plus simple est souvent de prendre  $u = \exp(x)$ .

- Intégrales abéliennes.  $f(x) = F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})$ , on prend

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

##### Proposition 3.3.2 (Fractions rationnelles)

On veut trouver une primitive de  $F \in \mathbb{R}(X)$ .  $F$  peut s'écrire comme somme d'un polynôme et de morceaux de la forme :  $\frac{1}{x-\alpha}$ ,  $\frac{1}{(x-\alpha)^n}$ ,  $\frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b}$  et  $\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^n}$ .

Pour intégrer ces morceaux on utilise les relations suivantes :  $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$ ;  $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n} = \frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1}$ . Pour calculer  $\int \frac{\alpha x+\beta}{x^2+ax+b} dx$  on se ramène aux deux intégrales connues :  $\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b} dx = \ln|x^2+ax+b|$  et  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ . Pour intégrer  $\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+ax+b)^n} dx$  on se ramène à deux intégrales du type :  $\int \frac{2x+a}{(x^2+ax+b)^n} dx = \frac{(x^2+ax+b)^{-n+1}}{-n+1}$  et  $I_n = \int \frac{du}{(u^2+1)^n}$  qu'on calcule en intégrant par partie et en trouvant une formule de récurrence.

#### 3.4 Développements limités

#### 3.5 Séries entières

## 4 Démonstrations

**Démonstration (Point fixe, 1.4.9)** La fonction  $x \in A \mapsto \phi(x) = \|f(x) - x\|$  est continue, prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et l'ensemble de départ est compact donc elle atteint son minimum  $m = \phi(x_0)$ . Si on suppose  $m > 0$ , ie  $f(x_0) \neq x_0$ , alors par hypothèse,  $\phi(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| < \|f(x_0) - x_0\| = m$ ; ceci contredit la minimalité de  $m$  donc il existe  $x$  tq  $f(x) = x$ . Si  $y$  est tel que  $f(y) = y \neq x$  alors  $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$ ; ceci est absurde donc le point fixe est unique. La convergence de la suite vers le pointt fixe se montre facilement en utilisant  $\phi(u_n)$ .

**Démonstration (Darboux, 1.5.6)** Soit  $F : (x, y) \mapsto (f(x) - f(y))/(x - y)$ , et soit  $A = \{(x, y) \mid x > y\}$ . L'ensemble  $\Gamma = F(A) = \{(f(x) - f(y))/(x - y) \mid (x, y) \in [a, b]^2, x > y\}$  est connexe comme image d'un connexe (A est même convexe) par une fonction continue. Il est évident que  $\Gamma \subseteq f'([a, b])$ , en appliquant le théorème des accroissements finis. Et d'autre part, si on note  $x_n = x + (b - x)/n$ ,  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  avec  $y_n = (f(x_n) - f(x))/(x_n - x) \in \Gamma$ . Donc  $\Gamma \subseteq f'([a, b]) \subseteq \bar{\Gamma}$ . Comme  $\Gamma$  est connexe, ceci implique par théorème que  $f'([a, b])$  est connexe, sachant que les connexes de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles, on obtient le théorème.

**Démonstration (Raab-Duhamel, 1.6.5)** Notons  $v_n = \ln(u_n/n^\alpha)$ . On montre que  $v_{n+1} - v_n = O(1/n^2)$  donc la série  $\sum v_{n+1} - v_n$  a une limite, donc  $v_n$  a une limite, qu'on note  $l$ . Alors  $e^{v_n} = u_n/n^\alpha \rightarrow e^l > 0$  d'où le résultat.