Séries
Outils Mathématiques 3 (PCGI 2)

Chapitre 1 : Séries numériques

Définitions et Propositions 1.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée série de terme général u_n et notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et S_n est appelée somme partielle d'ordre n.
On dit que la série $\sum u_n$ converge vers S si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, c'est-à-dire si :

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \ \exists N \ \text{ tel que : } \forall n \geqslant N \ , \ \left| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right| < \varepsilon$$

où $|\quad|$ désigne la valeur absolue si la série est à termes réels et le module si la série est à termes complexes.
Dans ce cas S est appelée somme de la série et notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Sinon, si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, on dit que la série est divergente.

De même on définit la série $\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ comme étant la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, $\forall n \geqslant n_0$.
Deux séries qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes sont de même nature, c'est-à-dire sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes.
Si la série $\sum u_n$ converge vers S, on appelle reste d'ordre n : $R_n = S - S_n$.
Ce reste vérifie : $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1.2

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
Alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Définition et Proposition 1.3

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes dans $\mathbb{K}(= \mathbb{R} \,\text{ou}\, \mathbb{C})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
On définit $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$ comme étant la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$.
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, il en va de même pour $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$;
et dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Aussi, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\sum v_n$ est convergente, $\sum u_n$, $\lambda \sum u_n$ et $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$ sont de même nature.
Mais attention, la somme de deux séries divergentes peut être convergente !

Définition et Proposition 1.4
Soit $\sum z_n$ une série à termes complexes. On note $z_n = a_n + ib_n$ l'écriture algébrique de z_n .
On définit $\overline{\sum z_n}$ comme étant la série de terme général $\overline{z_n} = a_n - ib_n$.
Si $\sum z_n$ converge, il en va de même pour $\overline{\sum z_n}$ et : $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{z_n} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n}$.

Enfin, $\sum z_n$ converge $\iff \sum \overline{z_n}$ converge $\iff \sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.
Et dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Proposition et Définition 1.5
Le terme général d'une série convergente tend vers zéro.
Mais attention, il existe des séries divergentes dont le terme général tend vers zéro !
Lorsque le terme général d'une série ne tend pas vers zéro, on dit que la série diverge grossièrement.

Proposition 1.6
La série géométrique $\sum_{n \geqslant 0} \rho^n , \rho \in \mathbb{K}$, converge si et seulement si $|\rho| < 1$ et dans ce cas la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n = \dfrac{1}{1-\rho}$ et le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho^k = \dfrac{\rho^{n+1}}{1-\rho}$.

Théorèmes 1.7
1. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs, c'est-à-dire $u_n \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\sum u_n$ converge si et seulement si cette suite est majorée.
2. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs vérifiant : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
   Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème 1.8
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs vérifiant $u_n \sim v_n$.
Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Attention, l'hypothèse "à termes réels positifs" est nécessaire pour conclure ; il existe des séries telles que : $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge !

Théorème 1.9
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n}$ existe et vaut ℓ . Alors :
si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge ; si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Ce critère est appelé la règle de Cauchy. Elle ne permet pas de conclure lorsque $\ell = 1$.

Théorème 1.10
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et vaut ℓ. Alors : si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge ; si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Ce critère est appelé la règle de d'Alembert. Elle ne permet pas de conclure lorsque $\ell = 1$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ existe, il en va de même pour $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ et les deux limites sont égales.

Théorème 1.11
Soit $f : [n_0\,,\,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive décroissante.
Alors $\sum\limits_{n\geqslant n_0} f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[n_0\,,\,+\infty[$ et dans ce cas on a :

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \quad \text{et} \quad \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) \leqslant f(n_0) + \int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt\,.$$

Corollaire 1.12
Soit α un réel donné.
La série, dite de Riemann, de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$.

Corollaire 1.13
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge.
2. S'il existe $\alpha \leqslant 1$ et $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $n^\alpha\, u_n \geqslant M$, $\forall n \geqslant n_0$ (ceci est le cas notamment si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha\, u_n = L$ avec $L \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$), alors $\sum u_n$ diverge.

Ce corollaire est appelé "règle $n^\alpha u_n$".

Corollaire 1.14
Soient α et β deux réels donnés. La série, dite de Bertrand, de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\ell n\ n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha < 1$, converge si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$, diverge si $\alpha = 1$ et $\beta \leqslant 1$.

Théorème et Définition 1.15
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes.
On rappelle que $|\lambda|$ désigne le module de λ si λ est complexe et donc la valeur absolue de λ si λ est réel.
Si la série $\sum |u_n|$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et on a : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
Si $\sum |u_n|$ converge, on dit que $\sum u_n$ est absolument convergente.
Et si $\sum u_n$ converge mais que $\sum |u_n|$ diverge, on dit que $\sum u_n$ est semi-convergente.

Définition et Théorème 1.16
La série à termes réels $\sum u_n$ est dite alternée si $u_n \cdot u_{n+1} \leqslant 0$, $\forall n$.
Si $\sum u_n$ est une série alternée et que $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissant vers zéro, alors $\sum u_n$ est convergente et le reste d'ordre n vérifie : $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$.

Théorème 1.17
Soit la série de terme général réel ou complexe $u_n = a_n\, b_n$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) Il existe M tel que : $\forall n \geqslant 0$, $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leqslant M$

(ii) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissant vers zéro.

Alors $\sum u_n$ est convergente. (Ce théorème est appelé le théorème d'Abel.)

C'est le cas, en particulier, pour les séries alternées avec $(|u_n)|)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissant vers zéro ainsi que pour les séries, dites trigonométriques : $\sum(\cos n\theta)v_n$, $\sum(\sin n\theta)v_n$, $\sum(e^{in\theta})v_n$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle décroissant vers zéro et $\theta \neq 2k\pi$.

Définition et Théorème 1.18
Soient une série à termes réels ou complexes $\sum u_n$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels et $\sum v_n$ la série définie par $v_0 = \sum_{k=0}^{p_0} u_k$ et $v_n = \sum_{k=p_{n-1}+1}^{p_n} u_k$, $\forall n \geqslant 1$. On dit qu'on somme par tranches ou par paquets. Alors :

1. $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow \sum v_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
   Attention, $\sum v_n$ converge $\not\Longrightarrow \sum u_n$ converge. Toutefois :
2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $(p_{n+1} - p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et, si elles sont convergentes, ont même somme.
3. Si $u_n \in \mathbb{R}^+$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature et, si elles sont convergentes, ont même somme.

Théorème et Définition 1.19
Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes absolument convergente.

Alors pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

On dit que $\sum u_n$ est commutativement convergente.
On peut donc changer l'ordre des termes puis regrouper par tranches avant de calculer la somme.
Attention, ceci n'est plus vrai pour les séries semi-convergentes.

Définition et Théorème 1.20
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels ou complexes absolument convergentes.

Alors la série de terme général : $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = u_0\, v_n + u_1\, v_{n-1} + \ldots + u_n\, v_0$, appelée produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Attention, il peut arriver que le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes soit divergent.

Chapitre 2 : Suites et séries de fonctions

Définitions 2.1
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.
On dit que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction u sur I si :

$\forall x \in I\,,\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = u(x) \Longleftrightarrow \forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N(x,\varepsilon)$ tel que $\forall n \geqslant N(x,\varepsilon)\,,\ |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$
(où $|v|$ désigne le module de v si $v \in \mathbb{C}$ et donc la valeur absolue de v si $v \in \mathbb{R}$).

On dit que la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction u sur I si :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in I} |u_n(x) - u(x)| = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geqslant N(\varepsilon)\,,\ \forall x \in I\,,\ |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon\,.$
La convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u entraîne bien sûr sa convergence simple. Mais la réciproque est fausse.

Définitions et Proposition 2.2
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que la série de terme général u_n, notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, converge simplement (respectivement uniformément) vers S, notée $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$, sur I si la suite de fonctions $\left(S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (respectivement uniformément) vers la fonction S sur I.

On dit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge normalement sur I s'il existe une série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ convergente vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in I\,,\ |u_n(x)| \leqslant a_n\,.$

La convergence normale de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur I entraîne la convergence uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur I ainsi que la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(x)$ pour tout x de I et, $\forall x \in I\,,\ \left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,.$
Enfin, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
On définit la convergence simple et uniforme sur D de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ainsi que la convergence normale sur D de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ de manière tout à fait analogue.

Définitions 2.3
Soient v une fonction définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, v_1 et v_2 les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par $v_1(x) = Re(v(x))$ et $v_2(x) = Im(v(x))\,,\ \forall x \in I\,.$
On dit que v est continue sur I si v_1 et v_2 sont des fonctions continues sur I.
Dans ce cas, on définit : $\displaystyle\int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b v_1(t)\,dt + i\int_a^b v_2(t)\,dt\,,\ \forall a,b \in I\,.$

On dit que v est dérivable sur I si v_1 et v_2 le sont et on appelle dérivée de v la fonction $v' = v_1' + i\,v_2'$. Si v' est continue sur I, on dit que v est continuement dérivable ou encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Mais on ne parlera pas ici de continuité, dérivée, primitive pour des fonctions à variable complexe et donc la suite de ce chapitre ne concerne que les fonctions à variable réelle.

Théorèmes 2.4

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers la fonction u sur I.
   Alors u est continue sur I.
   Aussi, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u sur I, que les u_n sont continues sur I, mais que u ne l'est pas, on peut en conclure que la convergence n'est pas uniforme sur I.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément vers la fonction u sur I et soient $a \in I$, $b \in I$. Alors :
   la suite $\left(\displaystyle\int_a^x u_n(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (uniformément si I est borné) vers $\displaystyle\int_a^x u(t)\,dt$ sur I, donc :
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b u_n(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} u_n(t)\,dt$ (on peut intervertir la limite et l'intégrale).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction v sur I et qu'il existe $a \in I$ pour lequel $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite α . Alors :
   $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (uniformément si I est borné) vers la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifiant $u(a) = \alpha$ et $u' = v$, donc :
   $\left(\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n\right)' = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u'_n$ (on peut intervertir la limite et la dérivation).

Théorèmes 2.5

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément vers la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur I .
   Alors S est continue sur I .
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément vers la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sur I et soient $a \in I$, $b \in I$. Alors :
   la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_a^x u_n(t)\,dt$ converge (uniformément si I est borné) vers $\displaystyle\int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt$ sur I , donc :
   $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt$ (on peut intervertir l'intégrale et la somme).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u'_n$ converge uniformément vers la fonction $T = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ sur I et qu'il existe $a \in I$ pour lequel la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n(a)$ est convergente de somme α . Alors :
   $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge (uniformément si I est borné) vers la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifiant $S(a) = \alpha$ et $S' = T$, donc :
   $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ (on peut intervertir la dérivation et la somme).

Séries
Outils Mathématiques 3 (PCGI 2)

Chapitre 3 : Séries entières

Définition 3.1
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes,$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $u_n(x) = a_n x^n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $v_n(z) = c_n z^n$.

Les séries de fonctions correspondantes : $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ notées $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ notées $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ sont appelées séries entières, réelles et complexes respectivement.

Plus rarement, on définit des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n x^n$ à variable réelle x et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème et Définition 3.2
Rappelons que si $z \in \mathbb{C}\,, |z|$ désigne le module de z et donc si $x \in \mathbb{R}\,, |x|$ désigne la valeur absolue de x. Notons : $B_o(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| < r\}\,,\, B_f(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| \leqslant r\}\,,\, S(0,r) = \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| = r\}\,,\, \forall r \in \mathbb{R}^+$ et $B_o(0,+\infty) = B_f(0,+\infty) = \mathbb{C}$.

Soit la série entière complexe $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$. Il existe un unique réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
$\forall z \in B_o(0,R)$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ converge absolument et $\forall z \in (B_f(0,R))^c$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ diverge grossièrement.
R est appelé le rayon de convergence et $B_o(0,R)$ le disque de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$.
Si $R \neq +\infty$ et si $z \in S(0,R)$, il peut arriver que $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ diverge, converge simplement ou absolument ; $S(0,R)$ est appelé le cercle d'incertitude.

Enfin, si $R \neq 0\,,\, \sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $B_f(0,\rho)\,,\, \forall \rho \in]0,R[$.

Soit la série entière réelle $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Il existe alors un unique réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :
$\forall x \in]-R\,,R[$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge absolument et $\forall x \in [-R\,,R]^c$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ diverge grossièrement.
R est appelé le rayon de convergence et $]-R\,,R[$ l'intervalle de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$.
Si $R \neq +\infty$ et si $x = -R$ ou si $x = R$, il peut arriver que $\sum a_n x^n$ diverge, converge simplement ou absolument.

Enfin, si $R \neq 0\,,\, \sum a_n x^n$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[-\rho\,,\rho]\,,\, \forall \rho \in]0,R[$.

Remarquons que ce théorème nous donne aussi, après translation, le type des domaines de convergence de séries de la forme $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(z-z_0)^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(x-x_0)^n$.

Théorèmes 3.3
Soit la série entière complexe $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$.

Si les c_n sont non nuls à partir d'un certain rang et si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ existe et vaut $\ell\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, alors le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\ell}$, avec la convention $\dfrac{1}{0}=+\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty}=0$.
De même, si $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_n|}$ existe et vaut ℓ, alors le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ vaut $\dfrac{1}{\ell}$.

Mais, ces limites n'existent pas toujours, comme par exemple pour les séries entières, dites lacunaires, de type : $z^r\sum\limits_{n\geqslant 0}\gamma_n(z^k)^n=\sum\limits_{n\geqslant 0} c_{kn+r}z^{kn+r}$ avec $c_{kn+r}=\gamma_n$.
Dans ce cas, si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{c_{k(n+1)+r}}{c_{kn+r}}\right|$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\gamma_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|c_{kn+r}|}$ existe et vaut ℓ, alors le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_{kn+r}z^{kn+r}$ vaut $\sqrt[k]{\dfrac{1}{\ell}}$.

Et, bien sûr, nous avons les mêmes expressions pour le calcul du rayon de convergence des séries entières réelles.

Théorèmes 3.4
Soient les séries entières complexes $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n$ de rayon de convergence R_c et $\sum\limits_{n\geqslant 0} d_n z^n$ de rayon de convergence R_d et soit $\gamma\in\mathbb{C}^*$. Alors :

1. Le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}z^n$ vaut R_c.
2. Le rayon de convergence de la série entière $\gamma\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n=\sum\limits_{n\geqslant 0}\gamma c_n z^n$ vaut R_c et
   $\forall z\in B_o(0,R_c)\ ,\ \gamma\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\gamma c_n z^n$.
3. Le rayon de convergence R_s de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n+\sum\limits_{n\geqslant 0} d_n z^n=\sum\limits_{n\geqslant 0}(c_n+d_n)z^n$ vérifie :
   $R_s=\min(R_c\,,R_d)$ si $R_c\neq R_d$, et $R_s\geqslant R_c=R_d$ sinon, et
   $\forall z\in B_o(0,\min(R_c\,,R_d))\ ,\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n+\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n z^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(c_n+d_n)z^n$.
4. Le rayon de convergence R_p de la série entière $\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n\geqslant 0} d_n z^n\right)=\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right)z^n$ vérifie :
   $R_p\geqslant\min(R_c\,,R_d)$ et
   $\forall z\in B_o(0,\min(R_c\,,R_d))\ ,\ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} d_n z^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k d_{n-k}\right)z^n$.

Et, bien sûr, nous avons des résultats analogues pour les séries entières réelles (remplacer $B_o(0,R)$ par $]-R\,,R[$).

Dorénavant, nous ne considérons plus que des séries entières réelles dont la somme, définie sur l'intervalle de convergence, est notée f. On peut alors s'intéresser à la primitive et aux dérivées de f. Les résultats obtenus sont aisément transposables à des séries entières à variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{C}$, mais ne le sont pas directement à des séries entières à variable complexe (pour ce, il faudrait développer la théorie des fonctions holomorphes).

Théorèmes 3.5

Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence R non nul et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\forall x \in]-R\,,R[$, sa somme. Alors :

1. f est continue sur $]-R\,,R[$, la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}$, $\forall x \in]-R\,,R[$.
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(]-R\,,R[\,,\mathbb{R})$, les séries entières $\sum_{n\geqslant 1} n\,a_n\,x^{n-1},\ldots,\sum_{n\geqslant k} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_n\,x^{n-k},\ldots$ ont pour rayon de convergence R , $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n\,x^{n-1},\ldots,f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-k+1)\,a_n\,x^{n-k},\ldots,\forall x \in]-R\,,R[\,,\forall k \in \mathbb{N}^* .$$
3. $a_0 = f(0)$ et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Définitions et Théorèmes 3.6

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est développable en série entière en 0 s'il existe une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et un intervalle ouvert J non vide centré en 0 et inclus dans I tels que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\forall x \in J$.
Alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est évidemment non nul, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur J, nécessairement $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est unique et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$, $\forall x \in J$.
$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$ est appelée le développement en série entière ou la série de Taylor de f en 0.

Inversement, soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$ le reste de la formule de Taylor à l'ordre n en 0 de f.
Alors f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert non vide J centré en 0 et inclus dans I sur lequel la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle.
Cette dernière condition est vérifiée s'il existe un intervalle ouvert non vide K centré en 0 et inclus dans I et $\alpha\,,\,\beta \in \mathbb{R}^+$ tels que : $|f^{(n)}(x)| \leqslant \alpha \cdot \beta^n \cdot n!$, $\forall x \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

De même, soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant x_0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est développable en série entière en x_0 si la fonction g définie par $g(y) = f(x_0 + y)$ l'est en 0 et donc si et seulement s'il existe un intervalle ouvert J non vide centré en x_0 et inclus dans I sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$, $\forall x \in J$, c'est-à-dire sur lequel la fonction f est égale à la somme de sa série de Taylor en x_0.

Signalons qu'il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un intervalle centré en un point et non développables en série entière en ce point.

Théorèmes 3.7
Soient f et g deux fonctions développables en séries entières en 0, de développements respectifs $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$.

1. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   $\lambda f + \mu g$ est développable en série entière en 0, de développement $\sum_{n\geqslant 0} (\lambda a_n + \mu b_n) x^n$.
2. $f \cdot g$ est développable en série entière en 0, de développement $\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n\right)$.
3. f' est développable en série entière en 0, de développement $\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n x^{n-1}$, ..., et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ est développable en série entière en 0, de développement $\sum_{n\geqslant k} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n\, x^{n-k}$.
4. $\int_0^x f(t)\, dt$ est développable en série entière en 0, de développement $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Et bien sûr on a des résultats analogues pour les fonctions développables en séries entières en x_0.

Remarque : le troisième théorème est utile pour chercher des solutions d'équations différentielles sous la forme de leur développement en série entière (à rayon de convergence non nul !), ou inversement à trouver le développement en série entière d'une fonction à partir d'une équation différentielle qu'elle vérifie.

Liste 3.8

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , \quad \ell n(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{x^n}{n} \quad , \quad \forall x \in]-1\,,1[$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^* \, , \; (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n}{n!} \quad , \quad \forall x \in]-1\,,1[\,.$$

Et aussi :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \quad , \quad \forall z \in \{z \in \mathbb{C}\, , \, |z| < 1\}\,.$$

Chapitre 4 : Séries de Fourier

Définitions 4.1
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.
On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $f(x+T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$; dans ce cas, on appelle période de f le plus petit réel T vérifiant la propriété ci-dessus, fréquence $\nu = \dfrac{1}{T}$ et pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
On suppose dorénavant f de période T.
On dit que f est continue par morceaux, ou encore $\mathcal{C}^0$ par morceaux, si elle l'est sur $[0, T]$, c'est-à-dire si elle est continue sur cet intervalle sauf éventuellement en un nombre fini de points $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ où elle possède une limite à droite $f(x_i^+)$ et une limite à gauche $f(x_i^-)$.
Et on dit que f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux si elle est continuement dérivable sur $[0, T]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où f ainsi que f' possèdent une limite à droite et une limite à gauche.
Si f est $\mathcal{C}^0$ par morceaux, on définit la régularisée de f, qu'on note $\tilde{f}$, par $\tilde{f}(x) = \dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$,$\forall x \in \mathbb{R}$ (et donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ en tout point où f est continue).

Propositions 4.2
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}, T$-périodique et $\mathcal{C}^0$ par morceaux.
Alors $\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt = \int_a^{a+T} f(t)\, dt\,, \forall a \in \mathbb{R}\,.$
De plus, si f est paire, $\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt = 2\int_0^{T/2} f(t)\, dt$ et si f est impaire, $\displaystyle\int_0^T f(t)\, dt = 0\,.$
Enfin, si f est de période T et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors f' est de période T et $\mathcal{C}^0$ par morceaux.

Définition et Proposition 4.3
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, continues par morceaux, de période T, et soit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.
On définit $\displaystyle < f, g >= \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)}\, g(t)\, dt.$
On note e_n les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de période T, définies par $e_n(x) = e^{i\,n\,\omega\,x}$,$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
Alors : $< e_n, e_m >= \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Et, si on note ϵ_n et η_n les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de période T, définies par $\epsilon_n(x) = \cos n\,\omega x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\eta_n(x) = \sin n\,\omega x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$< \epsilon_n, \eta_m >= 0\ \forall n \in \mathbb{N}\,, \forall m \in \mathbb{N}^*, < \eta_n, \eta_m >= \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = m \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} , < \epsilon_n, \epsilon_m >= \begin{cases} 1 & \text{si } n = m = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = m \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définition et Propositions 4.4
On appelle série trigonométrique toute série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ de la forme :
$\displaystyle\frac{a_0}{2}\,\epsilon_0 + \sum_{n\geqslant 1} (a_n\epsilon_n + b_n\eta_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{K}$, $\omega \in \mathbb{R}^{+*}$ et on la note : $\displaystyle\frac{a_0}{2} + \sum_{n\geqslant 1} (a_n\, \cos n\,\omega x + b_n \sin n\,\omega x).$
Elle peut aussi s'écrire $\displaystyle c_0\, e_0 + \sum_{n\geqslant 1} (c_n\, e_n + c_{-n}\, e_{-n})$ qu'on note : $\displaystyle c_0 + \sum_{n\geqslant 1} (c_n\, e^{i\,n\,\omega x} + c_{-n}\, e^{-i\,n\,\omega x})$ avec :

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i\,c_n - i\,c_{-n} \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} c_n = \dfrac{a_n - i\,b_n}{2} \\ c_{-n} = \dfrac{a_n + i\,b_n}{2} \end{cases} ,\forall n \in \mathbb{N}\ \text{, si on pose } b_0 = 0\,.$$

La série trigonométrique ci-dessus converge normalement et donc uniformément, sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |b_n|$ sont convergentes (ce qui est équivalent à $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |c_n|$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} |c_{-n}|$ le sont).

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux suites de réels décroissant vers 0, alors cette série trigonométrique est convergente, $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{kT = k\,\dfrac{2\pi}{\omega}\,,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$ et uniformément convergente sur tout intervalle fermé inclus dans l'ensemble ci-dessus.

Supposons à présent que $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos n\,\omega x + b_n \sin n\,\omega x) = c_0 + \sum_{n\geqslant 1} (c_n\, e^{i\,n\,\omega x} + c_{-n}\, e^{-i\,n\,\omega x})$ converge uniformément sur $[0,T]$, et donc sur $\mathbb{R}$, et appelons f sa somme.
Alors f est de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ et vérifie : $< e_n, f > = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, e^{-i\,n\,\omega\, t} dt = c_n\,, \forall n\in\mathbb{Z}\,,$
$< \epsilon_n, f > = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\cos n\omega\, t\, dt = \dfrac{a_n}{2}\,, \forall n\in\mathbb{N}\,,\ \ < \eta_n, f > = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\sin n\omega\, t\, dt = \dfrac{b_n}{2}\,, \forall n\in\mathbb{N}^*.$

Définitions et Propositions 4.5
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, de période T, de pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et continue par morceaux.
On appelle coefficients de Fourier de f : $c_n(f) = < e_n, f > = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\, e^{-i\,n\,\omega t} dt\,, \forall n\in\mathbb{Z}\,,$
$a_n(f) = 2 < \epsilon_n, f > = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\cos n\,\omega t\, dt\,, b_n(f) = 2 < \eta_n, f > = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\sin n\,\omega t\, dt\,, \forall n\in\mathbb{N}$
($b_0(f) = 0\,, \forall f$ est uniquement défini pour la commodité de l'écriture).
Ces coefficients vérifient : $\begin{cases} a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \\ b_n(f) = i\,c_n(f) - i\,c_{-n}(f) \end{cases}$ et $\begin{cases} c_n(f) = \dfrac{a_n(f) - i\,b_n(f)}{2} \\ c_{-n}(f) = \dfrac{a_n(f) + i\,b_n(f)}{2} \end{cases}, \forall n\in\mathbb{N}\,.$

On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique :
$\dfrac{a_0(f)}{2} + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} (a_n(f)\cos n\,\omega x + b_n(f)\sin n\,\omega x) = c_0 + \sum_{n\geqslant 1}\left(c_n(f)\, e^{in\omega x} + c_{-n}(f) e^{-in\omega x}\right)\,.$
Si f est paire : $b_n(f) = 0$ et $a_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\,\cos n\,\omega t\,, \forall n\in\mathbb{N}$ et $c_{-n}(f) = c_n(f)\,, \forall n\in\mathbb{Z}\,.$
Si f est impaire : $a_n(f) = 0$ et $b_n(f) = \dfrac{4}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} f(t)\,\sin n\,\omega t\,, \forall n\in\mathbb{N}$ et $c_{-n}(f) = -c_n(f)\,, \forall n\in\mathbb{Z}\,.$
Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$: $a_n(f)\in\mathbb{R}$ et $b_n(f)\in\mathbb{R}\,, \forall n\in\mathbb{N}$ et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}\,, \forall n\in\mathbb{Z}\,.$
Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut définir la série de Fourier de f' et on a :
$a_n(f') = n\,\omega\, b_n(f)$ et $b_n(f') = -n\,\omega\, a_n(f)\,, \forall n\in\mathbb{N}$ et $c_n(f') = i\,n\,\omega\, c_n(f)\,, \forall n\in\mathbb{Z}\,.$

Théorème 4.6
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, T-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux (ou plus généralement $\mathcal{C}^0$ par morceaux et admettant en tout point une dérivée à gauche et à droite).
Alors la série de Fourier de f est convergente et admet pour limite la régularisée de f (voir définitions 4.1).
Enfin, la convergence est uniforme sur tout intervalle fermé sur lequel la régularisée de f est continue.
Ce théorème est appelé le théorème de Dirichlet.

Théorème 4.7
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$, T-périodique et $\mathcal{C}^0$ par morceaux. Alors :
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n(f)|^2\,, \sum_{n\geqslant 1} |b_n(f)|^2\,, \sum_{n\geqslant 0} |c_n(f)|^2\,, \sum_{n\geqslant 1} |c_{-n}(f)|^2$ convergent (rappel : $|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda}, \forall\lambda\in\mathbb{C}$) et :
$$< f, f > = \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = |c_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2).$$
Cette formule s'appelle l'égalité de Parseval-Bessel.