Principaux théorèmes

1. **Formule de Fubini**
   Soit $[a, b]$ et $[c, d]$ deux segments de $\mathbb{R}$, f est une fonction continue de $[a, b] \times [c, d]$ dans $\mathbb{C}$. Alors :
   $$\int_a^b (\int_c^d f(x,t)dt)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,t)dx)dt$$
2. **Formule de Green-Riemann**
   Soit K un compact élémentaire du plan, dont la frontière est un arc Γ, orienté dans le sens trigonométrique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit P et Q deux applications de classe $\mathscr{C}^1$ d'un ouvert U contenant K dans $\mathbb{R}$.
   $$\int \int_\Gamma (P(x,y)dx + Q(x,y)dy) = \int \int_K [\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)]dxdy$$
3. **Formule de Leibniz**
   Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^k$ sur I, la fonction produit fg est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et :
   $$\forall p \in [1, k], \quad (fg^{(p)}) = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} f^{(j)} g^{(p-j)}$$
4. **Formule de Parseval**
   Soit f une application de $\mathscr{C}_{2\pi}$, alors :
   $$(||f||_2)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = |\frac{a_0(f)}{2}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2]$$
5. **Formule de Stirling**
   $$p! \sim \sqrt{2p\pi} (\frac{p}{e})^p$$
6. **Formule de Taylor avec reste intégral**
   Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ par morceaux sur I. Alors :
   $$\forall (a,b) \in I^2, \quad f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$
7. **Formule de Taylor-Young**
   Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans E. Alors, f admet en tout point a de I un développement limité d'ordre n donné par :
   $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$$
8. **Formule du binôme généralisé**
   Pour tout réel α, la fonction $x \mapsto (+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$. Son développement est donné par :
   $$\forall x \in]-1, 1[, \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

9. **Inégalité de Bessel**
Soit $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien complexe et F un sous-espace de E de dimension infinie. Si $(e_1, ..., e_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in E, \qquad \sum_{i=1}^{p} |(e_i|x)|^2 \leq ||x||^2$$

10. **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

L'égalité à lieu si, et seulement si, la famille (x,y) est liée :

$$x = 0_E \qquad ou \qquad (\exists k \in \mathbb{C}, \quad y = kx)$$

11. **Inégalité de la moyenne**
Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux de $[a,b]$ dans E. Alors :

$$||\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f|| \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} ||f|| \leq ||f||_\infty$$

12. **Inégalité de Minkowski**
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \sqrt{\varphi(x+y,x+y)} \leq \sqrt{\varphi(x,x)} + \sqrt{\varphi(y,y)}$$

L'égalité à lieu si, et seulement si, la famille (x,y) est positivement liée :

$$x = 0_E \qquad ou \qquad (\exists k \in \mathbb{R}^+, \quad y = kx)$$

13. **Inégalité de Taylor-Lagrange**
Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ par morceaux sur I et $||\ ||$ une norme sur E. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \quad ||f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)|| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup ||f^{(n+1)}||$$

14. **Lemme d'Abel**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et z_0 un nombre complexe non nul. Si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

15. **Petit théorème de Fermat**
Pour tout entier naturel k et tout entier p premier non diviseur de k, on a :

$$k^{p-1} \equiv 1 \ [p]$$

16. **Règle de d'Alembert**
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière vérifiant les hypothèses suivantes :
- pour tout entier n, $a_n \neq 0$
- la suite $(|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)$ tend vers un élément L de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

Alors le rayon de convergence R de la série entière est :
⋆ $\frac{1}{L}$ si $L \in \mathbb{R}_+^*$
⋆ $+\infty$ si $L = 0$
⋆ 0 si $L = +\infty$

17. **Théorème de Bézout**
Soit m et n deux entiers non nuls. Ces deux nombres sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que
$$mu + nv = 1$$

18. **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
De toute suite bornée de réels ou de complexes, on peut extraire une suite convergente.

19. **Théorème de Cauchy-Lipschitz**
Soit U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$, F une application de U, dans E, de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, et l'équation différentielle $x' = F(x,t)$.
- Les solutions maximales de l'équation différentielle sont définies sur des intervalles ouverts.
- Pour tout (t_0, x_0) de U, il existe une solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = x_0$.
- Les graphes (Γ_φ) de l'ensemble des solutions maximales forment une partition de U. Ces graphes sont appelés les courbes intégrales maximales.
- Toute solution est restriction d'une et une seule solution maximale.

20. **Théorème de Cayley-Hamilton**
Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u :
$$P_u(u) = 0$$
Cela revient à dire que le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique de u.

21. **Théorème de Césaro**
Soit une suite u de limite l. La suite v de terme général
$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k$$
est convergente de limite l.

22. **Théorème chinois**
Soit n et p deux entiers naturels premiers entre eux. Le système d'équations :
$$\begin{cases} x \equiv a \ [n] \\ x \equiv b \ [p] \end{cases}$$

d'inconnue x, où a et b sont des entiers, admet au moins une solution c dans $\mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est :

$$\{c + knp, \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

23. **Théorème de continuité d'une fonction définie par une intégrale**
Soit $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- f est continue par rapport à la première variable x.
- f est continue par morceaux par rapport à la seconde variable t.
- il existe φ dans $\mathscr{I}(I, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I \qquad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors :
- pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est intégrable sur I.
- la fonction F, définie sur A par $F(x) = \int_I f(x,t)dt$, est continue sur A.

24. **Théorème de convergence dominée de Lebesgue**
Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ telle ques :
- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonctions f continue par morceaux sur I.
- il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que, pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse dite de domination)

Alors :
- Les applications f_n et f sont intégrables sur I.
- La suite numérique $(\int_I f_n)$ converge vers $\int_I f$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \to +\infty} f_n = \int_I f$$

25. **Théorème de décomposition des noyaux**
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et u un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Alors :

$$Ker\ A(u) \bigoplus Ker\ B(u) = Ker\ AB(u)$$

26. **Théorème de dérivabilité d'une fonction définie par intégrale**
Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $A \times I$ dans $\mathbb{K}$. On suppose que :
- pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
- f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$, par rapport à la première composante.
- cette dérivée partielle est continue par rapport à la première variable x, et continue par morceaux par rapport à la seconde t.
- il existe une fonction φ de $\mathscr{I}(I, \mathbb{R}^+)$ telle que :

$$\forall (x,t) \in A \times I, \qquad |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction F, définie sur A par $F(x) = \int_I f(x,t)dt$, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, et, pour tout c de A :

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

27. **Théorème de Dirichlet**
Si f est une fonction 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est la fonction f_r régularisée de f.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$$

28. **Théorème de Gauss**
Soit a, b et c trois entiers non nuls.

$$(a \wedge b = 1 \quad et \quad a|(bc)) \Rightarrow a|c$$

29. **Théorème de Heine**
Soit A une partie compacte de E et f une application continue de A dans F, alors f est uniformément continue sur A.

30. **Théorème de Lagrange**
L'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre de ce groupe.

31. **Théorème de Poincaré**
Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^p$. Toute forme différentielle fermée sur U est exacte sur U.

32. **Théorème de Pythagore**
Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien complexe et $||\ ||$ la norme associée.

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad x \perp y \Rightarrow ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \Leftrightarrow (x|y) \in i\mathbb{R}$$

33. **Théorème de Rouché-Fontené**
Les solutions d'un système compatible sont celles de l'un quelconque de ses systèmes d'équations principales.

34. **Théorème de Schwarz**
Soit f une application de classe $\mathscr{C}^2$ de U, ouvert non vide de E, dans F, alors :

$$\forall a \in U, \quad \forall (i,j) \in [1,p]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

35. **Théorème de Stone-Weierstrass**
Toute fonction à valeurs complexes, continue sur un compact $[a,b]$, peut être approchée uniformément sur $[a,b]$ par des fonctions polynomiales sur $[a,b]$.

36. **Théorème de Weierstrass**
Toute fonction à valeurs complexes, continue et périodique sur $\mathbb{R}$, est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

37. **Théorème des valeurs intermédiaires**
Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application continue d'une partie A de E, connexe par arcs, dans $\mathbb{R}$. Alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

38. **Théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions**
Soit (u_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ et telle que :
- pour tout n, u_n est intégrable sur I.
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa fonction somme, S, est continue par morceaux sur I.
- la série numérique $\sum(\int_I |u_n(t)|dt)$ converge.

Alors :
- S est intégrable sur I, et

$$\int_I S = \int_I (\sum_0^\infty u_n) = \sum_0^\infty (\int_I u_n)$$

39. **Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions**
Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(A, F)$ et a adhérent à A. Si :
- la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A vers S.
- chaque fonction u_n admet une limite b_n en a.

Alors :
- la série $\sum b_n$ converge vers un élément b de F.
- la fonction somme S admet en a la limite b.

$$\lim_{x \to a} (\sum_{n=0}^\infty u_n(x)) = \sum_{n=0}^\infty (\lim_{x \to a} u_n(x))$$

40. **Théorème spécial des séries alternées**
Soit $\sum u_n$ une série de réels alternée telle que la suite $(|u_n|)$ tende vers 0 en décroissant. Alors la série $\sum u_n$ converge.