Semaine 10 : *Espaces Vectoriels*

Mercredi le 11 Février 2004

Exercice 1:

Soit $E = \mathbb{K}^3$, $F = \{X = (x, y, z) \text{ tq } x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{vect}\big(U = (1, 1, 1)\big)$.

1. Vérifier que $F \oplus G = E$.
2. Soit s la symétrie de base F de direction G et $X = (x, y, z)$. Déterminer $s(X)$.

Exercice 2:

Soient F_1, F_2, F_3 trois sev de E. Montrer que $F_1 + F_2 + F_3$ est directe si et seulement si : $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}$ et $(F_1 + F_2) \cap F_3 = \{\vec{0}\}$.

Généraliser.

Exercice 3:

Soient F, G, F', G' des sev d'un ev E.

Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $\big(F + (G \cap F')\big) \cap \big(F + (G \cap G')\big) = F$.

Exercice 4:

Dans $\mathbb{K}^3$ on considère les formes linéaires :

$f_1(\vec{x}) = x + 2y + 3z,\ f_2(\vec{x}) = 2x + 3y + 4z,\ f_3(\vec{x}) = 3x + 4y + 6z.$

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

Exercice 5:

Soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ des éléments de $[0, 1]$ et F l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues dont la restriction à chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ est affine.

Montrer que F est de dimension finie et trouver une base de F.

Exercice 6:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = id_E$.

1. Montrer que $\mathbb{K}er(f - id_E) \oplus \Im m(f - id_E) = E$.
2. Montrer que $\mathbb{K}er(f - id_E) = \Im m(f^2 + f + id_E)$ et $\Im m(f - id_E) = \mathbb{K}er(f^2 + f + id_E)$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc