

# Semaine 1 : Nombres Complexes

*Jeudi le 23 Octobre 2003*

## Exercice 1:

Soit  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  trois points non alignés  $\Omega(\omega)$  le point intersection des médiatrices de  $[A, B]$  et  $[B, C]$

1. Exprimer  $\omega$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$
  2. En déduire que  $\Omega$  appartient à la 3<sup>ème</sup> médiatrice et que  $c$  est le centre du cercle circonscrit du triangle  $ABC$
  3. On note  $D_1$  la droite parallèle à  $(BC)$  qui passe par  $A$ ,  $D_2$  celle parallèle à  $(CA)$  qui passe par  $B$  et  $D_3$  celle parallèle à  $(AB)$  qui passe par  $C$ ,  $D_1 \cap D_2 = \{C_1\}$ ,  $D_1 \cap D_3 = \{B_1\}$ ,  $D_3 \cap D_2 = \{A_1\}$  faire un dessin puis montrer que  $A$  est le milieu de  $[B_1, C_1]$
  4. En déduire que les hauteurs du triangle  $(ABC)$  se coupent en un point appelé orthocentre
  5. Exprimer cet orthocentre en fonction de  $a, b, c$
- 

## Exercice 2:

*Construction du polygone régulier à l'aide de la règle et du compas* : On pose  $w = e^{2i\frac{\pi}{5}}$ ,  $a = w + w^4$ ,  $b = w^2 + w^3$

1. Montrer que  $1 + a + b = 0$  en déduire que  $a$  et  $b$  sont les solutions de l'équation  $x^2 + x - 1 = 0$ .
  2. Donner  $a$  en fonction de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$ , puis en déduire la valeur de  $\cos(\frac{2\pi}{5})$
  3. On note par  $(A_i)_{1 \leq i \leq 4}$  les points d'affixes  $(w^i)_{1 \leq i \leq 4}$  et  $H$  le point d'intersection de la droite  $(A_1 A_4)$  avec l'axe  $(ox)$  montrer que  $\overline{OH} = \frac{a}{2}$
  4. On note par  $M$  le point d'abscisse positive, point d'intersection de l'axe  $(ox)$  avec le cercle de centre  $C(-\frac{1}{2})$  passant par  $B(i)$  montrer que  $\overline{OM} = a$  et que  $H$  est le milieu de  $[O, M]$
  5. En déduire une construction du pentagone régulier à l'aide de la règle et le compas
- 

## Exercice 3:

1. Montrer que, pour tout nombre complexe  $z$  de module autre que 1 et tout entier naturel  $n$ , on a :  $\left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$
  2. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$ .
- 

## Exercice 4:

1. Déterminer tous les  $z \in \mathbb{C}$  dont les racines cubiques  $z_1, z_2, z_3$  vérifient l'équation :  $z_1 - z_2 = \frac{1}{z_3}$ .

2. *Equation Complexe d'un cercle* : Montrer que l'équation complexe de cercle  $C(\Omega(\omega), R)$  s'écrit sous la forme  $z\bar{z} + \bar{A}z + A\bar{z} + \alpha = 0$  où  $A \in \mathbb{C}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ , exprimer  $A$  et  $\alpha$  en fonction de  $\omega$  et  $R$ .
- 

### Exercice 5:

Soient  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $C(c)$  trois points non alignés

1. Si on note par  $M$  le milieu de  $[B, C]$  montrer que :  $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$  (*Théorème de la médiane*)
  2.  $\frac{|a-b|}{\sin(\widehat{C})} = \frac{|b-c|}{\sin(\widehat{A})} = \frac{|c-a|}{\sin(\widehat{B})}$  (*loi des sinus*)
- 

### Exercice 6:

1. On considère quatre nombres réels  $a, b, c$  et  $d$  non nuls tels que  $b$  et  $d$  soient de même signe, et  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . Montrer que le rapport  $\frac{az+b}{cz+d}$  est un nombre réel strictement positif, indépendant du choix d'un nombre complexe  $z$  tel que  $cz+d$  soit non nul.
  2. *Théorème de l'angle au centre* : Soient  $A(a), B(b), C(c)$  trois points distincts d'un cercle  $C(\Omega(\omega), R)$ , montrer que  $\widehat{B\Omega C} = 2 \widehat{BAC}$ .
- 

FIN

© : [www.chez.com/myismail](http://www.chez.com/myismail)

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc