Semaine 14 : *Matrices*

Mercredi le 17 Mars 2004

Exercice 1:

Soit $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est *en damier* si $a_{ij} = 0$ pour $j - i$ impair. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices $n \times n$ en damier.

1. Donner un exemple pour $n{=}3$.
2. Montrer que $\mathcal{D}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Quelle est sa dimension ?

Exercice 2:

$$\text{Soit } \mathcal{D} = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } \forall\, i, j,\ a_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall\, i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}.$$

1. Donner un exemple pour $n{=}3$.
2. Montrer que $\mathcal{D}$,dit ensemble des *Matrices stochastiques* est stable par multiplication.
3. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{D}$ inversibles telles que $A^{-1} \in \mathcal{D}$.

Exercice 3:

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *centro-symétrique* si pour tous i, j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$.

1. Donner un exemple pour $n{=}3$.
2. Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB.

Exercice 4:

$$\text{On note : } U = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A} = \{aU + bI_n,\ a, b \in \mathbb{R}\} \quad (n \geq 2).$$

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $M = aU + bI_n \in \mathcal{A}$. Montrer que M possède un inverse dans $\mathcal{A}$ si et seulement si $b(b + na) \neq 0$, et le cas échéant, donner M^{-1}.
3. Montrer que si $b(b + na) = 0$, alors M n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Trouver les matrices $M \in \mathcal{A}$ vérifiant : $M^n = I$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc