Seamine 16 : *Calcul matriciel*

Mercredi 14 Avril 2004

Exercice 1:

Matrices centrosymétriques : Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est centro-symétrique si pour tous i, j : $a_{n+1-i,n+1-j} = a_{ij}$.

1. Donner un exemple de matrice centrosymétrique pour $n = 3$.
2. Montrer que si A et B sont centro-symétriques, il en est de même de AB.

Exercice 2:

1. Montrer que $\mathcal{C} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \right\}$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $\mathcal{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \right\}$ est un corps non commutatif. (Quaternions)

Exercice 3:

Homographies : Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on note

$$f_M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \cup \{\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{array} .$$

Montrer que $f : M \longrightarrow f_M$ est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?

Exercice 4:

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $U, V \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = U + V$.

Exercice 5:

1. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'application $\phi_P : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \longmapsto & P^{-1}MP \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbre.
2. Soit $\phi : A = (a_{ij}) \longmapsto A' = (a_{n+1-i,n+1-j})$.
   (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) Trouver une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $\phi = \phi_P$.

FIN