Semaine 17 : *Intégration sur un segment*

Mercredi 21 Avril 2004

Exercice 1:

Densité des fonctions en escalier : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour toute fonction $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en escalier, $\displaystyle\int_{t=a}^{b} f(t)g(t)\,\text{ṭ} = 0$. Démontrer que $f = 0$.

Exercice 2:

Formule de la moyenne généralisée : Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, f positive.

1. Démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)g(t)\,\text{ṭ} = g(c)\int_{a}^{b} f(t)\,\text{ṭ}$.
2. Si f ne s'annule pas, montrer que $c \in]a,b[$.
3. Application : Soit f continue au voisinage de 0. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^2}\int_{0}^{x} tf(t)\,\text{ṭ}$.

Exercice 3:

Inégalité de Jensen : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue convexe. Démontrer que $\displaystyle g\left(\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(t)\,\text{ṭ}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} g(f(t))\,\text{ṭ}$.

Exercice 4:

On pose pout tout $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle I_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$ *Integrales de Wallis* et on se propose démontrer le résultat suivant : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *formule de Stirling :*

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.
2. Calculer I_{2n} et I_{2n+1}.
3. Montrer que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$, en déduire que : $I_n \sim In+1$.
4. Calculer le produit $I_{2n}I_{2n+1}$, en déduire un équivalent simple de I_{2n} .
5. On pose pout tout $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$, montrer que $\ln\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right) \sim -\frac{1}{12n^2}$.
6. En deduire que α_n converge , on notera α sa limite sans chercher à la calculer .
7. Exprimer $\frac{\alpha_n^2}{\alpha_{2n}}$ en fonction de n et I_{2n}.
8. En deduire α puis que : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ *formule de Stirling.*
9. En deduire $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc