Semaine 19 : *Équations différentielles*

Mercredi 12 Mai 2004

Exercice 1:

1. Résoudre l'équation suivante :$(2+x)y' = 2-y$.
2. *Centrale MP 2000* : Existe-t-il des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2\sqrt{y} = 0$? Que peut-on dire de l'équation : $y'^2 = 4y$?

Exercice 2:

1. Résoudre l'équation suivante : $xy' + y = \cos x$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f''(x) \geq 0$.
   Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

Exercice 3:

1. Résoudre l'équation suivante : $(1+x)y' + y = (1+x)\sin x$.
2. *Chimie P 91* : Résoudre, en utilisant la méthode d'Euler numériquement le système $y' = -y; \quad z' = y - z; \quad y(0) = 1$ et $z(0) = 0$. Prendre $h = 0.1$ et faire un tableau avec 10 valeurs. Faire la résolution analytique.

Exercice 4:

1. Résoudre l'équation suivante : $(x^2 - y^2 - 1)y' = 2xy$; poser $z = \dfrac{y}{x^2 + y^2 - 1}$.
2. *Centrale PC 1997* : Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout x : $f''(x) \geq f(x) + \dfrac{2}{\mathrm{ch}(x)^3}$. Montrer pour tout x : $f(x) \geq \dfrac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)}$.

Exercice 5:

1. Résoudre l'équation suivante : $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.
2. *Étude qualitative* : $y' = x - e^y$. Soit y une solution maximale de l'équation $y' = x - e^y$.
   (a) Montrer que y est décroissante puis croissante.
   (b) Montrer que y est définie jusqu'en $+\infty$ et que sa courbe représentative admet une branche parabolique horizontale.
   (c) Montrer que y est définie à partir de $\alpha < 0$ et que $\lim\limits_{x \longrightarrow \alpha} y(x) = +\infty$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc