Semaine 2 : *Structures*

Mercredi le 29 Octobre 2003

Exercice 1:

1. $\left(a^5 = b^4 = e, ab = ba^3\right) \Longrightarrow \left(a^2b = ba, ab^3 = b^3a^2\right)$.
2. Soit H,K deux sous-groupes d'un groupe *(G,.)* .Montrer que :

$$H \cup K \text{ sous groupe de G} \Longrightarrow \text{H}\subset K \quad ou \quad K \subset H \ .$$

.

Exercice 2:

1. $\left(b^6 = e, ab = b^4a\right) \Longrightarrow \left(b^3 = e, ab = ba\right)$.
2. Soit *(G,.)* un groupe on note par $\Lambda ut(G)$ l'ensemble des automorphismes de G
   (a) Montrer que : $(\Lambda ut(G), o)$ est un groupe .
   (b) $\forall a \in G$ on définit l'application φ_a par :
   $$\begin{aligned} \varphi_a : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto a^{-1}.x.a \end{aligned}$$
   Montrer que l'application : $\varphi : a \longmapsto \varphi_a$ est un morphisme de groupes de *(G,.)* vers $(\Lambda ut(G), o)$ .Est-il injectif ?Surjectif ?

Exercice 3:

1. $\left(a^5 = e, aba^{-1} = b^2\right) \Longrightarrow b^{31} = e$
2. Soient *(G,.)*,*(G',*)* deux groupes et E un ensemble non vide quelconque.
   (a) $\forall (f,g) \in \eth(E,G), \forall x \in E$ on pose $f\Diamond g(x) = f(x).g(x)$.Montrer qu'on definit ainsi sur $\eth(E,G)$ une LCI qui le munit d'une structure de groupe.
   (b) Dire comment on peut aussi munir $\eth(E,G')$ d'une structure de groupe ,la LCI sera toujours notée $\Diamond$
   (c) Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.Montrer que l'application :
   $$\begin{aligned} \varphi : \eth(E,G) &\longrightarrow \eth(E,G') \\ g &\longmapsto fog \end{aligned}$$
   est un morphisme de groupe .

Exercice 4:

1. $(ab)^{-1} = a^{-1}b, (ba)^{-1} = b^{-1}a \Longrightarrow \left(a^2 = b^2, a^2b^2 = e\right)$
2. Soient *(G,.)*,*(G',*)* deux groupes et E un ensemble non vide quelconque.

(a) $\forall (f,g) \in \eth(E,G), \forall x \in E$ on pose $f \Diamond g(x) = f(x).g(x)$.Montrer qu'on definit ainsi sur $\eth(E,G)$ une LCI qui le munit d'une structure de groupe.

(b) Dire comment on peut aussi munir $\eth(E,G')$ d'une structure de groupe ,la LCI sera toujours notée $\Diamond$

(c) Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.Montrer que l'application :

$$\varphi : \eth(G,G') \longrightarrow \eth(G,G)$$
$$g \longmapsto gof$$

est un morphisme de groupe .

Exercice 5:

1. $\left(a^{-1}ba = b^{-1}, b^{-1}ab = a^{-1}\right) \Longrightarrow a^4 = b^4 = e$
2. Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif on dit qu'un élément $x \in A$ est nilpotent ssi :

$$\exists n \in \mathbb{N}^* : x^n = 0_A$$

Montrer que dans ce cas $1_A - x$ est inversible et exprimer son inverse en fonction des puissances de x

---

Exercice 6:

1. $\left((aba) = b^3, b^5 = e\right) \Longrightarrow \left(ab = ba, a^2 = b^2\right)$
2. Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif $\forall (x,n) \in A$ x $\mathbb{N}^*$ on pose :

$$x^{(0)} = 1_A, x^{(1)} = x, x^{(2)} = x(x-1_A).., x^{(n)} = x(x-1_A)(x-(n-1)1_A)$$

Montrer que :

$$\forall (x,y) \in A\text{x}A \text{ on a } :(x+y)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{(n-k)} y^{(k)}.$$

Rappel : Dans un anneau A pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n1_A = \underbrace{1_A + 1_A + ... + 1_A}_{n \quad fois}$

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc