Semaine 2 : *Théorie des ensembles*

Mardi 05 Octobre 2004

Exercice 1:

1. Donner les ensembles $\mathcal{P}(\emptyset), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)), \mathcal{P}\{1\}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1\})$
2. Montrer que la relation définie sur $N^* \times \mathbb{N}^*$ par : $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow (a$ divise c, d divise $b)$ est une relation d'ordre, est-elle totale ou partielle ? Donner tous les majorants et minorants de $(4,12)$.

Exercice 2:

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par : $f(0) = 1 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$ on pose :
$f(0) = 1, f(2n+1) = f(n), f(2n+2) = f(n) + f(n+1)$.

1. Dire pourquoi cette application est bien définie. Donner en particulier $f(n)$ pour $0 \leq n \leq 10$.
2. Montrer que l'application : $\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+^* \\ & n & \longmapsto & f(n)f(n+1) \end{array}$ est bijective.
3. Dire comment on peut construire sur $\mathbb{Q}$ une relation d'ordre et donner les 10 premiers éléments pour cette relation.

Exercice 3:

1. Soit $n \in \mathbb{N}, A = \{k \in \mathbb{N}$ tel que: $\frac{k(k+1)}{2} \leq n\}$ et $s = \max A$. Dire pourquoi s existe.
2. Montrer que $\frac{s(s+1)}{2} \leq n < \frac{(s+1)(s+2)}{2}$.
3. En déduire que l'application : $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a,b) & \longmapsto & a + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} \end{array}$ est bijective.
4. En déduire que la relation définie sur $N^* \times \mathbb{N}^*$ par : $(a,b)\mathcal{R} \Leftrightarrow a + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} \leq c + \frac{(c+d)(c+d+1)}{2}$ est une relation d'ordre, est-elle totale ou partielle ? Donner tous les majorants et minorants de $(4,12)$.
5. Donner les 5 premiers éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour cette relation d'ordre.

FIN

Mamouni My Ismail
CPGE Med V-Casablanca