Semaine 21 : *Espaces vectoriels euclidiens*

Mercredi 02 Juin 2004

Exercice 1:

1. Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$: $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.
   Déterminer λ pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaître alors f.
2. Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires :
   (a) $E = \mathbb{R}^2$, $(x, x') \mid (y, y') = axy + bxy' + cx'y + dx'y'$ (étudier $(1, t) \mid (1, t),\ t \in \mathbb{R}$).
   (b) $E = \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mid (y_1, \dots, y_n) = a \sum\limits_i x_i y_i + b \sum\limits_{i \neq j} x_i y_j$
   $\Big($ On montrera que $(\sum x_i)^2 \leq n \sum x_i^2\Big)$.
   (c) $E = \mathbb{R}_n[X]$, $(P \mid Q) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

Exercice 2:

1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, avec a, b, c, d non tous nuls. Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \perp G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

Exercice 3:

1. Soient F, G deux sous-espaces de E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales de bases F et G. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.
2. Base de Schmidt : Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour le produit scalaire :
$$(P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

Exercice 4:

1. Soit E espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$ et $f^2 = -\mathrm{id}$. Montrer que f est orthogonal.
2. Base de Schmidt : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire : $(P \mid Q) = \sum\limits_{i=0}^{4} P(i)Q(i)$. Chercher une base orthonormée de E.

FIN