Semaine 22 : *Espaces vectoriels euclidiens*

Mercredi 09 Juin 2004

Exercice 1:

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose ${}^tA = A$ et $A^2 = 0$. Montrer que $A = 0$.
2. *Propriétés du produit vectoriel* : Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{t}$ quatre vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \mid (\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} \mid \vec{w})(\vec{v} \mid \vec{t}) - (\vec{u} \mid \vec{t})(\vec{v} \mid \vec{w})$$
$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge (\vec{w} \wedge \vec{t}) = -[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\vec{t} + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}]\vec{w}$$

   Où $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{t}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{t})$ appelé produit mixte.

Exercice 2:

1. $I + a(X^tY - Y^tX)$ *inversible* : Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ indépendantes, $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice $n \times n$ telle que $m_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$. A quelle condition $I + aM$ est-elle inversible ?
2. Soit $\vec{v} \in E \setminus \{\vec{0}\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose pour $\vec{x} \in E$: $f(\vec{x}) = \vec{x} + \lambda(\vec{x} \mid \vec{v})\vec{v}$.
   Déterminer λ pour que $f \in \mathcal{O}(E)$. Reconnaître alors f.

Exercice 3:

Inégalité de Ptolémée : Soit E un espace euclidien.

1. Pour $\vec{x} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on pose $f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$. Montrer que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \frac{\|\vec{x}-\vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
2. Soient $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in E$. Montrer que $\|\vec{a} - \vec{c}\|\,\|\vec{b} - \vec{d}\| \leq \|\vec{a} - \vec{b}\|\,\|\vec{c} - \vec{d}\| + \|\vec{b} - \vec{c}\|\,\|\vec{a} - \vec{d}\|$.
   Indication : se ramener au cas $\vec{a} = \vec{0}$ et utiliser l'application f.

Exercice 4:

Inversion : Soit E un ev euclidien. On pose pour $\vec{x} \neq \vec{0}$: $i(\vec{x}) = \dfrac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^2}$.

1. Montrer que i est une involution ($i^2 = id_E$) et conserve les angles de vecteurs.
2. Vérifier que : $\forall\, \vec{x}, \vec{y} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, $\|i(\vec{x}) - i(\vec{y})\| = \dfrac{\|\vec{x} - \vec{y}\|}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$.
3. Déterminer l'image par i :
   (a) d'un hyperplan affine ne passant pas par $\vec{0}$.
   (b) d'une sphère passant par $\vec{0}$.
   (c) d'une sphère ne passant pas par $\vec{0}$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc