Semaine 23 : *Géometrie euclidienne*

Mercredi 16 Juin 2004

Exercice 1:

1. *Fonction numérique de Leibniz* : Soit ABC un triangle équilatéral de côté a.
   Quels sont les points M du plan (ABC) tels que :
   $$MA^2 + a^2 = 2(MB^2 + MC^2)?$$
2. *Cercle circonscrit à un triangle :* Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit.
   Soit M un point du plan de coordonnées barycentriques (x, y, z) dans le repère affine (ABC).
   Montrer que :
   $$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow xAM^2 + yBM^2 + zCM^2 = 0 \Leftrightarrow xyAB^2 + xzAC^2 + yzBC^2 = 0.$$

Exercice 2:

1. *Cercle stable par une application affine :* Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O, r)$ un cercle du plan et f une application affine telle que $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
   Montrer que f est une isométrie de point fixe O.
2. *Point équidistant d'une famille de droites :* Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.
   Montrer qu'il existe un point Ω équidistant de toutes les droites D_λ.

Exercice 3:

Bissectrice de deux droites : Soient D, D' deux droites distinctes sécantes en O.
On note $\mathcal{H} = \{M \text{ tq } d(M, D) = d(M, D')\}$.

1. Montrer que $\mathcal{H}$ est la réunion de deux droites perpendiculaires. (appelées bissectrices de (D, D')).
2. Soit s une symétrie orthogonale telle que $s(D) = D'$. Montrer que l'axe de s est l'une des droites de $\mathcal{H}$.
3. Soit $\mathcal{C}$ un cercle du plan tangent à D. Montrer que $\mathcal{C}$ est tangent à D et à D' si et seulement si son centre appartient à $\mathcal{H}$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc