Semaine 3 : *Arithmétique*

Mardi le 11 Novembre 2003

Exercice 1:

1. *Equations à coefficients entiers* :Soient a, b, c trois entiers relatifs. On considère l'équation : $ax + by = c$,dont on recherche les solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
   (a) Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
   (b) Soit (x_0, y_0) une solution du problème de Bézout : $ax_0 + by_0 = d$.
   (c) Déterminer toutes les solutions de $ax + by = c$ en fonction de a, b, c, d, x_0 et y_0.
   (d) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$: $2520x - 3960y = 6480$.
2. Montrer que quelques soient les entiers m et n, le nombre $mn(m^{60} - n^{60})$ est divisible par 56786730.

Exercice 2:

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et m, n premiers entre eux tels que $a^n = b^m$ .Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = c^m$ et $b = c^n$.
2. *Nombre de nombres ne comportant pas 13* .Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.
   (a) Montrer que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.
   (b) Calculer T_n en fonction de n.

Exercice 3:

Congruences simultanées

1. Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ avec $b \wedge b' = 1$ .Montrer que le système : $\begin{array}{ll} x \equiv a & [b] \\ x \equiv a' & [b'] \end{array}$ possède des solutions et qu'elles sont congrues entre elles modulo bb' .Généraliser.
2. *Application* Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces. Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment ; le cuisinier reçoit alors 4 pièces. Dans un

naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces. Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 4:

1. *Décomposition à coefficients positifs* :Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.Montrer que : $\forall\, x \geq ab$, $\exists\, u, v \in \mathbb{N}$ tels que $au + bv = x$.
2. *Sommes de nombres impairs* : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Montrer que si N est la somme de n nombres impairs consécutifs, alors N n'est pas premier.

Exercice 5:

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(n^3 + n) \wedge (2n + 1)$.
2. Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^x 7^y$ se termine par 1 en base 10.

Exercice 6:

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ premier et $n \in \mathbb{N}^*$, $n < p$.Montrer que $\dfrac{(p-1)(p-2)\dots(p-n)}{n!} - (-1)^n$ est un entier divisible par p.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Chercher $(a - b)^3 \wedge (a^3 - b^3)$.

Exercice 7:

1. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$ et $b_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} a_j$.Montrer que : $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) \times \text{ppcm}(b_1, \dots, b_n) = \text{ppcm}(a_1, \dots, a_n) \times \text{pgcd}(b_1, \dots, b_n) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Chercher $(a - b)^3 \wedge (a^3 - b^3)$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc