Semaines 5-6 : *Programme du 1er Trimestre*

les Mercredi 3 et 10 Décembre 2003

Exercice 1:

1. En utilisant $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$$

2. Soient $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$ deux rationnels avec $a, c \in \mathbb{Z}$, et $b, d \in \mathbb{N}^*$.Prouver que tout rationnel s'écrit : $x = \dfrac{ma+nc}{mb+nd}$ avec $m, n \in \mathbb{Z}$, et $mb+nd \neq 0$.Etudier l'unicité d'une telle écriture.
3. Montrer que $\dfrac{ma+nc}{mb+nd}$ est compris entre $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{c}{d}$ si et seulement si m et n ont même signe.

Exercice 2:

1. Soient a, b, c trois réels.Ecrire sous forme de produit l'expression :

$$\cos(a+b+c) + \cos a + \cos b + \cos c\ .$$

2. On pose : $u_0 = 1, u_n = 1 + \frac{nu_{n-1}}{2n+1}$ .Montrer que : $1 \leqslant u_n \leqslant \frac{2n+3}{n+2}$, en déduire $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$
3. Montrer que $u_n = \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2k+1)!}{2^k(k!)^2}\right)$, en déduire un equivalent simple de $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2k+1)!}{2^k(k!)^2}$.

Exercice 3:

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un ensemble de cardinal n. Exprimer en fonction de n le nombre

$$N = \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} (X)\ ,$$

c'est-à-dire la somme des cardinaux de toutes les parties de E.

2. On pose $x = \dfrac{p}{q}$, $y = \dfrac{p'}{q'}$ (formes irréductibles), $d = pq' \wedge p'q, pq' = ad, p'q = bd$ .Montrer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que : $p = m^a$, $p' = m^b$, $q = n^a$ et $q' = n^b$.
3. En déduire : $b - a = m^{b-a} - n^{b-a}$.Montrer que $b - a \leq 1$ et conclure.

Exercice 4:

1. Soit b un entier naturel, soit n un entier naturel non nul. En procédant par récurrence, developper le produit :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1+b^{2^k}) = (1+b)(1+b^2)(1+b^4)(1+b^8)\cdots(1+b^{2^{n-1}})\ .$$

2. En déduire la décomposition en facteurs premiers du nombre $N = 11111111$.
3. Soit $(K,+,.)$ un coprs et $f : K \longrightarrow K$ morphisme pour les deux lois, montrer qu'il est injectif

---

Exercice 5:

1. Vérifier que $10^6 \equiv 17$.Montrer que $\sum_{k=1}^{10} 10^{10^k} \equiv 57$.
2. On considére l'échiquier infini qu l'on remplit ainsi :

$$A(0,n) = n+1; A(n+1,0) = A(n,1); A(n+1,m+1) = A(n, A(n+1,m)) \quad \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2$$

   Calculer $A(4,4)$.

3. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,on pose : $f(x) = ax + b + d, u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ .Montrer que u_n est bien définie .Soient l_1, l_2 les solutions de l'équation $f(x) = x$ et $v_n = \frac{u_n - l_1}{u_n - l_2}$, montrer que v_n est une suite géometrique en déduire sa limite puis celle de u_n .

Exercice 6:

1. Quel est le dernier chiffre de $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$?
2. Soit p premier .Montrer que $p | \mathrm{C}_p^k \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant p$.
3. En déduire que $\varphi : x \longmapsto x^p$ est un morphisme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour les lois + et x .

Exercice 7:

1. Soient $x, y \in \mathbb{N}$, $y \geq 3$. Montrer par récurrence sur y que : $3^x \equiv 12^y \iff 2^{y-2} \mid x$ .Trouver tous les couples d'entiers $x, y \in \mathbb{N}$ tels que $3^x = 2^y + 1$.
2. On pose $\frac{v_n = \sum_{k=1}^{n} k!}{n!}$ .Montrer que : $1 \leqslant v_n \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+2}{n(n+1)}$ .En deduire la limite de v_n .
3. Soient $(a,b,z) \in \mathbb{C}^3$ tels que : $a \neq b; |a| = |b| = 1$ .Montrer que $\frac{z + ab\bar{z} - a - b}{a - b} \in i\mathbb{R}$

Exercice 8:

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ par 11.
2. On pose $u_0 = a \in]0,1[, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ .Montrer que u_n est bien définie croissante majorée par 1 puis en déduire sa limite l .
3. On pose $\theta_n = Arccos(u_n)$, exprimer θ_n en fonction de n, θ .En déduire que : $l - u_n \sim \frac{Arccos^2(u_0)}{2^{2n-1}}$

Exercice 9:

1. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $a \equiv b \quad [n] \Longrightarrow a^n \equiv b^n \quad [n^2]$.
2. Comparer les suites : $n^{\ln^2(n)}, n^{2\ln(n)}, \ln(n)^{n\ln(n)}, (n\ln(n))^n$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ .Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(z-1-i)^n = (z-1+i)^n$.

Exercice 10:

1. Soit $a \in \mathbb{N}$ premier à 10. Montrer que $a^4 \equiv 1 \quad [10]$.Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, $a^{4\times 10^k} \equiv 1 \quad [10^{k+1}]$.
2. En déduire que il existe un nombre $x \in \mathbb{N}$ tel que x^3 se termine par 123456789 en base 10.
3. Montrer que les suites : $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2}, v_n = u_n + \frac{1}{3n^2}$ sont adjacentes .

Exercice 11:

1. Soient $d, m \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécéssaire et suffisante sur d et m pour qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = d$ et $a \vee b = m$.
2. Donner un équivalent simple de : $x_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} k^k$
3. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ .Déterminer le lieu des points $M(z)$ tels que $za \neq 1; |\frac{z-a}{1-\bar{a}z}| = 1$ .Etudier le cas $|a| = 1$.

Exercice 12:

1. Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{2^n} - 1$ est 2^{n+2}.
2. Donner un équivalent simple de : x_n l'unique racine dans [0,1] de l'équation :$x^n + nx - 1 = 0$.
3. Montrer que : $\forall n \geqslant 2 : \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k = n(n-1)2^{n-2}$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc