Semaine 7 : *Fonctions réelles*

Mercredi le 07 Janvier 2004

Exercice 1:

1. Soit $f\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x+1)-f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$.
   (a) Montrer que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{f(n)}{n} = a$.
   (b) Montrer que : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = a$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*, a \neq 1, b \in \mathbb{R}, f \in \wp^1(\mathbb{R})$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(ax+b) = af(x)+b$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = f'\left(a^n x + \dfrac{a^n-1}{a-1} b\right)$.
   (b) En déduire lorsque $a<1$.
   (c) En déduire lorsque $a>1$.

Exercice 2:

1. Soeint : $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que : $f \underset{+\infty}{\backsim} g; \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f = +\infty$ .Montrer que : $ln(f) \underset{+\infty}{\backsim} ln(g)$.
2. On pose $u_0 = a \in]0,1[, u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$ .Montrer que u_n est bien définie croissante majorée par 1 puis en déduire sa limite l .

Exercice 3:

1. Soeint : $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .Montrer les propriétés suivantes :

$$sup(f,g) = f + (g-f)^+; inf(f,g) = g - (g-f)^+; (f+g)^+ \leqslant f^+ + g^+$$

2. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable .Montrer que f' vérifie le *théorème des valeurs intermidiaires* : Soient $a, b \in [0,1], \alpha \in \mathbb{R}$ tels que : $f'(a) < \alpha < f'(b)$ alors $\exists c : f'(c) = \alpha$.
   Indication : On définit g_1, g_2 sur $[a,b]$ par : $g_1(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ si $x \neq a$ et $g_1(a) = f'(a)$ puis $g_2(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ si $x \neq b$ et $g_2(b) = f'(b)$ .Montrer que g_1, g_2 sont continues et qu'elles ont une image commune puis conclure .

Exercice 4:

1. Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que : fof croissante , $fofof$ strictement décroissante .Montrer que f est strictement décroissante .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*; f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que : $f(0) = 0, f(1) = 1$
   (a) Montrer que : $\exists \quad 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$ tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$.
   (b) Montrer que : $\exists \quad 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n < 1$ tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(y_i)} = n$.

Exercice 5:

1. Soit : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $f(\mathbb{Q}) \subset \bar{(}\mathbb{Q}), f(\overline{\mathbb{Q}}) \subset \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) + x \in \overline{\mathbb{Q}}$.
   (b) En déduire que f est constante .
   (c) Dégager une contradiction puis conclure .
2.

Exercice 6:

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ .On dit que f admet une dérivée symetrique en a si $\lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existe et soit finie .
   (a) Montrer que : f dérivable à gauche et à droite en $a \Longrightarrow f$ admet une dérivée symetrique en a .
   (b) Etudier la réciproque .
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln(x)) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc