Semaine 8 : *Fonctions usuelles-convexes*

Mercredi le 14 Janvier 2004

Exercice 1:

1. Soit f continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x) = \int_0^x f$, et l'on suppose que $F(x) = x^2 + o(x)$. Montrer que $f(x) = 2x + o(\sqrt{x})$.
2. Soient $0 < a < b$. Montrer que la fonction $\left\{ \begin{array}{c} f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{array} \right.$ est croissante.

Exercice 2:

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable telle que $f(x) = a + bx + \dfrac{cx^2}{2} + \underset{x \longrightarrow 0}{o}(x^2)$.
   Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = c$
   Indication : encadrer $f'(x)$ par les taux d'accroissements de f entre $x - \varepsilon x$, x et $x + \varepsilon x$.
2. Montrer que : $\forall\, x, y > 0,\ \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^y < e^x < \left(1 + \dfrac{x}{y}\right)^{x+y}$.

Exercice 3:

1. Soit (a_n) une suite bornée de réels. On pose $f(x) = \lim\limits_{N \longrightarrow +\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} \dfrac{|x - a_n|}{3^n}$.
   Montrer que f est bien définie , convexe, et n'est pas dérivable aux points a_n.
2. Montrer que : $\forall\, t > 1,\ \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t < e < \left(1 + \dfrac{1}{t-1}\right)^t$.

Exercice 4:

Caractérisation des fonctions convexes ou concaves par le TAF :Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que :

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < b,\ \exists!\ c \in]a, b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est monotone sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$.
2. En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

Exercice 5:

Pseudo-dérivée seconde : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ D^2 f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \text{existe et soit finie}$$

1. Si f est de classe C^2, calculer $D^2f(x)$.
2. Soit f quelconque et $a < b < c$ tels que $f(a) = f(b) = f(c)$.Montrer qu'il existe $x \in]a, c[$ tel que $D^2f(x) \leqslant 0$.
3. On suppose à présent que : $\forall\ x \in \mathbb{R}, D^2f(x) \geqslant 0$.
   (a) Soient $a < b < c$ et P le polynôme de degré inférieur ou égal à 2 coïncidant avec f aux points a, b, c. Montrer que $P'' \geqslant 0$.
   (b) Calculer P'' en fonction de a, b, c et $f(a), f(b), f(c)$. En déduire que f est convexe.

Exercice 6:

1. *Tangentes passant par un point* : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe dérivable, et $A = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier le nombre maximal de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par A.
2. *Calcul de limite* : Montrer que : $\forall\ x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$.
   En déduire : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

FIN