# Semaine 9 : *Espaces Vectoriels*

*Mercredi le 21 Janvier 2004*

**Exercice 1:**

Soit $E = \mathbb{K}_3[X]$, $F = \{P \in E \text{ tel que } P(0) = P(1) = P(2) = 0\}$, $G = \{P \in E \text{ tel que } P(1) = P(2) = P(3) = 0\}$, et $H = \{P \in E \text{ tel que } P(X) = P(-X)\}$.

1. Montrer que $F \oplus G = \{P \in E \text{ tel que } P(1) = P(2) = 0\}$.
2. Montrer que $F \oplus G \oplus H = E$.

---

**Exercice 2:**

Soient $p, q$ deux projections sur un même sev $H$ et de directions $F$,$G$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est encore une projection sur $H$.

---

**Exercice 3:**

On considère les vecteurs de $\mathbb{K}^3$ : $\vec{a} = (1,2,1)$, $\vec{b} = (1,3,2)$, $\vec{c} = (1,1,0)$, $\vec{d} = (3,8,5)$. Soient $F = \text{vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et $G = \text{vect}(\vec{c}, \vec{d})$. Montrer que $F = G$ .

---

**Exercice 4:**

Dans $\mathbb{K}^3$ on considère les formes linéaires : $f_1(\vec{x}) = x + y - z$, $f_2(\vec{x}) = x - y + z$, $f_3(\vec{x}) = x + y + z$.

1. Montrer que $(f_1, f_2, f_3)$ est une base de $(\mathbb{K}^3)^*$.
2. Trouver la base duale.

---

**Exercice 5:**

Dans $\mathbb{R}^4$, trouver le rang de la famille de vecteurs :

$\vec{a} = (3,2,1,0)$, $\vec{b} = (2,3,4,5)$, $\vec{c} = (0,1,2,3)$, $\vec{d} = (1,2,1,2)$, $\vec{e} = (0,-1,2,1)$.

---

**Exercice 6:**

Soient $E, F$ deux espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

1. Montrer que $f$ est injective si et seulement si $f$ transforme toute famille libre de $E$ en une famille libre de $F$.
2. Montrer que $f$ est surjective si et seulement s'il existe une famille génératrice de $E$ transformée par $f$ en une famille génératrice de $F$.

---

*FIN*



Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc