# Résumé de cours : *Espaces Vectoriels.*

**Maths-PCSI**
**Mr Mamouni** : *myismail@altern.org*



*Lundi 27 Mars 2006.*

# Table des matières

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$, et en général sauf mention du contraire, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$ et $E$ un ensemble non vide.

# 1 Vocabulaire :

## 1.1 Loi de composition interne :

Une LCE sur $E$ à base dans $\mathbb{K}$ est la donnée d'une applicaltion : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$.

## 1.2 Structure d'espace vectoriel :

$E$ sera dit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel s'il est muni d'une LCI $+$ et d'une LCE . à base dans $\mathbb{K}$ et qui vérifient les axiomes suivants :

**1)** $(E,+)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera noté dorénavant par $0_E$.

**2)** $\forall (x,y)\in E^2, \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ on a les propriétés suivantes :

a) $(\alpha+\beta).x = \alpha.x+\beta.x$.

b) $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y$.

c) $\alpha(\beta.x)=(\alpha\beta).x$.

d) $1.x=x$.

Dans toute la suite du chapitre $E$ est muni d'une structure d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ,

## 1.3 Régles de calcul :

$\forall x\in E, \forall\alpha\in\mathbb{K}$ on a les régles de calculs suivants :

**1)** $0.x=0_E$.

**2)** $\alpha.0_E=0_E$.

**3)** $(-\alpha).x=\alpha.(-x)=-(\alpha.x)$.

## 1.4 Structure de sous-espace vectoriel :

**Définition.**
Une partie $F$ de $E$ est dite sous-espace vectoriel de $E$ *si et seulement si* elle vérifie les deux propriétés suivantes :

**1)** $0_E\in F$.

**2)** $\forall(x,y)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}$ on a : $x+\lambda y\in F$, autrement dit $F$ est stable pour les deux lois, interne et externe.

**Remarque** :
Tout sous-espace vectoriel de $E$ est lui même un espace vectoriel , et tout espace vectoriel inclu dans $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$, ainsi pour mon montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel , il est judicieux de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

## 1.5 Structure d'algèbre :

**Algèbre.**
On dira que $E$ est une algébre sur $\mathbb{K}$, si de plus il est muni d'une 2ème LCI $\times$ telle que $(E,+,\times)$ soit un anneau.
**Sous-algèbre.**
Une partie $F$ sera dite sous-algébre de $E$ si elle vérifie les propriétés suivantes :

**1)** $0_E\in F$.

**2)** $\forall(x,y)\in E^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}$ on a : $x+\lambda y\in F$ et $x\times y\in F$, autrement dit $F$ est stable pour les deux lois internes et celle externe.

## 1.6 Applications linéaires

**Définition.**
Soit $F$ un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u : E\to F$, on dira que $u$ est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall(x,y)\in E^2, \quad \forall\lambda\in\mathbb{K} \text{ on a : } u(x+\lambda y)=u(x)+\lambda u(y)$$

**Vocabulaire et notations :**
- L'ensemble des applications linéaires de $E$ vers $F$ se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.

- Une application linéaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de $E$ se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de $E$ vers $F$ se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrivée est inclu dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de $E$ se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$ .

**Propriétés**.
Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, On a les propriétés suivantes :

**1)** $u(0_E) = 0_F$.

**2)** L'image directe et celle réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel .

**3)** $\operatorname{Ker} u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on l'appelle noyau de $u$.

**4)** $u$ est injective *si et seulement si* $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

**5)** $\operatorname{Im} u = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de $F$, on l'appelle image de $u$.

**6)** $u$ est surjective *si et seulement si* $\operatorname{Im} u = F$.

**7)** $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ,en particulier la somme de deux applications linéaires est aussi linéaire.

**8)** La composée de deux applications linéaires est aussi linéaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

**9)** La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un groupe, on l'appelle *le groupe linéaire de* $E$.

# 2 Projecteurs :

## 2.1 Somme de deux sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel :

Soit $E$ un espace vectoriel , $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriel de $E$, la somme de $F$ et $G$ est le sous-espace vectoriel de $E$ noté $F + G$ défini par $F + G = \{x = x_1 + x_2 \text{ tel que } x_1 \in F, x_2 \in G\}$.
Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que la somme est directe et on la note plutôt par $F \oplus G$.
Si de plus $E = F \oplus G$, on dit que les sous-espace vectoriel $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $E$, et dans ce cas $\forall x \in E, \exists! x_1 \in F$ et $\exists! x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$.

## 2.2 Projection sur sous-espace vectoriel par rapport à un autre :

**Définition** :
Si $E = F \oplus G$, soit $x \in E, x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ tel que $x = x_1 + x_2$. $x_1$ s'appelle la projection de $x$ sur $F$ parallélement à $G$ et se note $p_{F//G}(x)$ et $x_2$ s'appelle la projection de $x$ sur $G$ parallélement à $F$ et se note $p_{G//F}(x)$.
**Propriété** :
Avec les notations précédentes l'application : $p_{F//G} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x_1 = p_{F//G}(x) \end{array}$
est linéaire vérifiant les propriétés suivantes :

**1)** $p^2_{F//G} = p_{F//G}$.

**2)** $\operatorname{Im} p_{F//G} = F, \operatorname{Ker} p_{F//G} = G$ en particulier $\operatorname{Im} p_{F//G}$ et $\operatorname{Ker} p_{F//G}$ sont supplémentaires dans $E$.

## 2.3 Projecteur :

**Définition** :
On appelle projecteur sur $E$, tout endomorphisme, $p$ de $E$ tel que : $p^2 = p$.
**Propriétés** :
Soit $p$ un projecteur de $E$, on a les propriétés suivantes :

**1)** $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$ sont supplémentaires dans $E$.

**2)** $x \in \operatorname{Im} p \Longleftrightarrow p(x) = x$.

**3)** $p$ est la projection sur son image paralélement à son noyau.

**Conclusion** :
Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image paralélement à son noyau.

## 2.4 Symétries.

**Définition** :
On appelle symétrie sur $E$, tout endomorphisme, $s$ de $E$ tel que : $p^2 = id_E$.
**Propriétés** :
Soit $s$ une symétrie de $E$, on a les propriétés suivantes :

**1)** $p = \frac{1}{2}(s + id_E)$ est un projecteur.

**2)** En posant $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$, on a $E = F \oplus G$ avec $s(x) = \begin{cases} x & \forall x \in F \\ -x & \forall x \in G \end{cases}$, on dit alors que $s$ est la symétrie par rapport à $F$ parallélement à $G$.

**3)** Inversement tout projecteur $p$ permet de définir la symétrie $s = 2p - id_E$ sur $\operatorname{Im} p$ parallélement à $\operatorname{Ker} p$.

# 3 Familles génératrices, libres, liées et bases

## 3.1 Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs

**Vocabulaire**.
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , les éléments de $E$ s'appellent des vecteurs et ceux de $\mathbb{K}$ des scalaires.
**Définition**.
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $x \in E, n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1\leq k\leq n} \in E^n$ une famille de vecteurs de $E$. On dira que $x$ est une combiniason linéaires de $x_k$ *si et seulement si*
$\exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
**Propriétés**.

**1)** L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est un sous-espace vectoriel de $E$, qu'on appelle usuellement sous-espace vectoriel engendré par les $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ et qu'on note $\operatorname{Vect}((x_k)_{1\leq k\leq n})$. On démontre que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant la famille $(x_k)_{1\leq k\leq n}$.
Par convention on écrit : $\operatorname{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

**2)** Si on pose : $\mathcal{B}_1 = (x_k)_{1\leq k\leq n}, \mathcal{B}_2 = (y_k)_{1\leq k\leq m}$, alors $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_1) + \operatorname{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

**3)** Si $u : E \to F$ est linéaire, et $\mathcal{B} = ((x_k)_{1\leq k\leq n})$ famille de vecteurs de $E$, et $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors : $u\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$, en particulier $u(\operatorname{Vect}(\mathcal{B})) = \operatorname{Vect}(u(\mathcal{B}))$.

## 3.2 Familles géneratrices

Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrice de $E$ *si et seulement si* tout élément de $E$ s'écrit combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, Autrement dit $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}) = E$.
Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille génératrice de $E$, il suffit de montrer que $\forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$.
**Propriétés**.
Soit $u : E \to F$ linéaire.

**1)** $u\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k u(x_k)$, en particulier deux applications linéaires égales sur une famille génératrice sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.

**2)** Si $\mathcal{B}$ famille génératrice de $E$, alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$, en particulier si $u$ est surjective alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $F$.

**3)** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espace vectoriel de $E$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux familles génératrices de $F$ et $G$ respectivement , alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une famille génératrice de $F + G$.

## 3.3 Familles liée

Une famille est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres.

**Propriétés**.

**1)** Toute famille contenant un élément nul est liée.

**2)** Tout famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.

**3)** Tout famille contenant une famille liée est aussi liée.

**4)** L'image par une application linéaire d'une famille liée est aussi liée.

### 3.4 Familles libre

Une famille sera dite libre lorsqu'elle n'est pas liée, autrement dit aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire des autres. En particulier $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre *si et seulement si* $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0_E \Rightarrow \lambda_k = 0 \quad \forall (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$. Et on peut surtout en conclure que si deux combinisons linéaires d'une famille libre sont égales alors leurs coefficients sont égaux.

**Propriétés**.

**1)** Une famille formée par un seul élément est libre *si et seulement si* cet élément n'est pas nul.

**2)** Une famille formée par deux élémentx est libre *si et seulement si* ces deux éléments ne sont pas proportionnels.

**3)** Tout famille contenue dans une famille libre est aussi libre.

**4)** L'image par une application linéaire injective d'une famille libre est aussi libre.

**5)** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espace vectoriel de $E$ tel que $F \cap G = \{0_E\}$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux familles libres dans $F$ et $G$ respectivement, alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est libre dans $F \oplus G$.

### 3.5 Bases

On appelle base toute famille à la fois libre et génératrice.

**Propriétés :**

**1)** Si $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$ est une base de $E$, alors $\forall x \in E \quad \exists! (\lambda_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$, les coefficients $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ s'appellent coordonnées de $x$ dans la base $\mathcal{B} = (x_k)_{1\leq k\leq n}$.

**2)** L'image par un isomorphisme d'une base de l'espace de départ est une base de l'espace d'arrivée.

**3)** Deux applications linéaires égales sur une base sont égales sur l'espace vectoriel tout entier.

**4)** Si $F$ et $G$ sont deux sous-espace vectoriel de $E$ tel que $F \cap G = \{0_E\}$, $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de $F$ et $G$ respectivement , alors $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $F \oplus G$.

# 4 Espaces vectoriels de dimension finie

## 4.1 Notions préliminaires

**Définition**.
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.

**Théorème 1**. (*Théorème de la base incompléte*)
Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée par des éléments de n'importe quelle famille génératrice finie pour avoir une base.

**Corollaire**.
Tout espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base finie.

**Théorème 2**.
Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , $E$, de dimension finie toutes les bases sont finie et ont même cardinal, leur cardinal commun s'appelle base de $E$ et se note $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

**Théorème 3**.
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, alors toutes les familles libres sont de cardinal inférieur à $n$ et touttes les familles génératrices sont de cardinal supérieur à $n$. En particulier, si $\mathcal{B}$ est une famille d'éléments de $E$ on a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \text{ est une base de } E &\iff \mathcal{B} \text{ est libre de cardinal } n \\ &\iff \mathcal{B} \text{ est génératrice de cardinal } n \end{aligned}$$

### 4.2 Dimensions de quelques espace vectoriel

**Théorème 1**.
Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel , $F$ de $E$ est de dimension finie inférieur à celle de $E$, avec égalité *si et seulement si* $E = F$. Avec la convenion que $\{0_E\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension nulle.

**Théorème 2**.
Si $E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $E \times F$ sont aussi de dimension finie avec l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F)$$

**Corollaire**.
$\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$.

**Théorème 3**.
Soit $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , E, de dimension finie tels que $F \cap G = \{0_E\}$, alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$$

**Corollaire**.
Si $F$ et $G$ sont deux sous-espace vectoriel supplémenataires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , E, de dimension finie alors : $\dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

**Corollaire**. Soit $F$ et $G$ deux sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , E, de dimension finie alors :

$$\dim_{\mathbb{K}}(F + G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) - \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G)$$

## 5 Applications linéaires en dimension finie.

### 5.1 Résultats généraux

**Théorème 1**.
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

**Théorème 2**.
Deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont isomorphe *si et seulement si* ils sont de même dimension.

**Théorème 3**.
Soit $u : E \to F$ linéaire, avec $E$ de dimension finie. Alors :

$$\begin{aligned} u \text{ est un isomorphisme } &\iff u \text{ transforme toute base de E en une base de F} \\ &\iff u \text{ transforme au moins une base de E en une base} \end{aligned}$$

**Théorème 4**.
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies, alors $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ est de dimension finie avec l'égalité : $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E). \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

**Corollaire**.
Si $E$ est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors son espace dual, $E^*$ est aussi de dimension finie avec : $\dim_{\mathbb{K}}(E^*) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

**Corollaire**.
Si $E$ est une $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$ une base de $E$, alors il existe une unique base de $E^*$, notée $\mathcal{B}^* = (e_i^*)_{1\le i\le n}$ et appelée base duale de $\mathcal{B}$ vérifiant la propriétés suivante : $e^*(e_j) \begin{aligned} &= 1 \text{ si } i = j \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$

**Théorème 5**.
Une application linéaire est entiérement déterminée par ses valeurs sur une base de l'ensemble de départ.

### 5.2 Rang d'une application linéaire

**Définition**.
Le rang d'une application linéaire, $u$ est par définition la dimension de son image, on le note $\mathrm{rg}(u)$, autrement dit :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, u$$

**Théorème.** *Formule du rang*
Soit $u : E \to F$ linéaire avec $E$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on a le résultat suivant :

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, u + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}\, u$$

**Corollaire 1**.
Le rang est invariant par composition à gauche ou a droite par un isomorphisme. Autrement dit si $u$ est linéaire et $v$ isomorphisme alors : $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u)$ et $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg}(u)$.
**Corollaire 2**.
Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimensions finies et égales, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u \text{ isomorphisme } &\iff u \text{ injective} \\ &\iff u \text{ injective} \end{aligned}$$

## 5.3 Formes linéaires et hyperplans

**Définition**.
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à $n$, on appelle hyperplan de $E$ tout sous-espace vectoriel de $E$ de dimension $n-1$.
**Propriétés**.

**1)** Soit $E$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi$ une forme linéaire sur $E$ non nulle, alors $\operatorname{Ker}\varphi$ est un hyperplan de $E$, en particulier $\varphi$ est surjective.

**2)** Soit $E$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $H$ un hyperplan de $E$, alors il existe une forme linéaire $\varphi$ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$.

**3)** Soit $E$ $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, deux formes linéaires sur $E$ de même noyau sont proportionnelles.

**4)** Tout hyperplan $H$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $E$ égale à $n$ admet une équation de la forme $H : a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0$ unique à une constante multiplicative prés.

$\boxed{\text{Fin.}}$