High Tech Prépas, Rabat

Résumé de cours: *Fonctions convexes*

9 février 2010

Blague du jour :
Bonjour, vous avez rejoint la messagerie vocale d'aide psychiatrique.
- Si vous tes dépressif, le numéro sur lequel vous appuierez est sans importance, personne ne répondra.
- Si vous êtes un compulsif à la répétition, raccrochez et recomposez.
- Si vous êtes un agressif-passif, mettez-nous en attente.
- Si vous êtes antisocial, arrachez le téléphone du mur.
- Si vous avez des difficultés d'attention, ne vous occupez pas des instructions.

Mathématicien du jour **Taylor**

Brook Taylor (1685-1731) est un éclectique homme de sciences anglais . Il s'intéressa aux mathématiques, à la musique, la peinture et la philosophie. Il ajouta aux mathématiques une nouvelle branche appelée « calcul de différences finies », inventa l'intégration par partie, et découvrit les séries appelées « développement de Taylor ».

Dans tout le chapitre on considère $I = [a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Définition 1 *On dit que f est convexe sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$ on a : $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$.*

Théorème 1 *f est convexe sur I si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (x_i)_{1\leq i\leq n} \in I^n, \quad \forall (\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in [0, 1]^n$ on a : $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$*

Théorème 2 *f est convexe sur I si et seulement si les cordes de f, (segments qui joignent deux points de la courbes de f) sont au dessus de cette courbe. Autrement dit : $f(x) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \forall x \in [a, b]$.*

Théorème 3 *f est convexe sur I si et seulement si les pentes des cordes dont on fixe une extrémité sont croissantes. Autrement dit : La fonction $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante.*

Théorème 4 *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors : f est convexe si et seulement si f' est croissante. Dans ce cas les tangentes de f sont situes en dessous de sa courbe.
Autrement dit : $f'(a)(x - a) + f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$.*

Théorème 5 *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors : f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.*

*Fin
à la prochaine*