High Tech Prépas, Rabat

Résumé de cours: *Structures alg£briques*

28 février 2010

Blague du jour :
Dans une deux-chevaux il y a quatre ingénieurs : un Mécanicien, un électronicien, un Chimiste et un Informaticien. Tout coup la voiture s'arrête et le moteur s'teint.
Le Mécanicien dit : Je le savais, c'est un problème de transmission.
- Mais non, dit l'ingénieur chimiste, c'est la faute des acides de la batterie !
- À mon avis c'est le circuit électronique qui ne marche plus ! dit l'électronicien.
L'Informaticien en dernier : ... et si on essayait de fermer toutes les fenêtres, de sortir, et redémarrer nouveau ?

Mathématicien du jour *Abel*
Niels Henrik Abel (1802-1829) est un mathématicien norvégien. Il est connu pour ses travaux en analyse mathématique sur la semi-convergence des séries numériques, des suites et séries de fonctions, les critères de convergence d'intégrale généralisée, sur la notion d'intégrale elliptique ; en algèbre, sur la résolution des équations. Il est l'origine de la notion de nombre algébrique (solution d'une équation polynomiale coefficients rationnels). Il fréquenta de grands mathématiciens tels Gauss, Cauchy, Jacobi, Legendre,... Il mourra, pauvre et très jeune (27 ans) suite une tuberculose. Le prénom d'Abel est celui d'un des fils de Ève et Adam.

1 Lois de composition interne :

Définition 1 .
Une L.C.I sur un ensemble E, est au fait une application $f: \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ *, on note $x*y$ ou $x.y$ ou même xy au lieu de $f(x,y)$.*

Vocabulaire.
– Une L.C.I définie sur E est *associative* si et seulement si $\forall (x,y,z)\in E^3$ on a : $(x.y).z = x.(y.z)$.
– Une L.C.I définie sur E est *commutative* si et seulement si $\forall (x,y)\in E^2$ on a : $x.y = y.x$.
– Un élément e est dit *neutre* pour une L.C.I définie sur E si et seulement si $\forall x\in E$ on a : $x.e = e.x = e$. Notez bien qu'une L.C.I admet un seul ou aucun élément neutre.
– - Si une L.C.I admet un élément neutre, e, dans ce cas tout élément $x\in E$ est dit *inversible* lorsqu'il existe un élément $x'\in E$ tel que $x.x' = x'.x = e$. Dans une telle situation le x' est unique, on le note par x^{-1} et s'appelle l'inverse de x.
– Si deux éléments x et y sont inversibles pour une L.C.I définie sur E, alors $x.y$ est inversible avec $(x.y)^{-1} = y^{-1}.x^{-1}$.

2 Les groupes.

Définition 2 .
Un ensemble G muni d'une L.C.I est dit un groupe si et seulement si . est associative, admet un élément neutre, not en gnral e_G et tout élément de G est inversible pour cette loi.

2.1 Sous-groupes.

Définition 3 .
Une partie H d'un sous groupe $(G, .)$ est dite sous-groupe de G si et seulement si H est aussi un groupe pour la même L.C.I.

Remarque 1 .
En pratique, pour montrer qu'une partie H d'un sous groupe $(G, .)$ est dite sous-groupe de G il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} e_G \in H \\ \forall (x,y) \in H^2 \text{ on a : } x.y^{-1} \in H \end{cases}$$

2.2 Morphismes de groupes.

Définition 4 .
Une application f entre deux groupes $(G, .)$ et $(G', *)$ est dite morphisme si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad f(x.y) = f(x) * f(y)$$

Exemple.
l'exponentielle définit un morphisme de groupes de (،+) vers (أ$*_+, \times$), alors que le logarithme l'est de (أ$*_+, \times$) vers (،+).

Remarque 2 .
Si f un morphisme de groupes entre $(G, .)$ et $(G', *)$, alors :

$$\begin{array}{ll} f(e_G) = e_{G'} & \\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1} & \forall x \in G \\ f(x^n) = f(x)^n & \forall x \in G, \forall n \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Vocabulaire.
Soit f un morphisme de groupes entre $(G, .)$ et $(G', *)$.
- On dit que f est un isomorphisme *si et seulement si* f bijective.
- On dit que f est un endomorphisme de G *si et seulement si* $G = G'$.
- On dit que f est un automorphisme de G *si et seulement si* $G = G'$ et f bijective.

2.3 Noyau et image d'un morphisme de groupes.

Définition 5 . *Soit f un morphisme de groupes entre $(G, .)$ et $(G', *)$. On appelle :*
- *Noyau de f, le sous-groupe de G, not $\ker f$ défini par :*

$$\ker f = \{x \in G \text{ tel que } f(x) = e_{G'}\}$$

- *Image de f, le sous-groupe de G', not $Im(f)$ défini par :*

$$Im(f) = \{y \in G' \text{ tel que } \exists x \in G : \quad y = f(x)\}$$

Propriétés.
Soit f un morphisme de groupes entre $(G, .)$ et $(G', *)$, alors :
– f est surjective *si et seulement* si $\mathrm{Im}(f) = G'$.
– f est injective *si et seulement* si $\ker(f) = \{e_G\}$.

Remarque 3 .
En pratique pour montrer qu'un morphisme de groupes f entre $(G, .)$ et $(G', *)$ est injective, il suffit de montrer que :
$$\forall x \in G : f(x) = e_{G'} \Rightarrow x = e_G$$

3 Anneaux et corps.

Dans toute cette partie, A est un ensemble muni de deux L.C.I $+$ et ., on a les définitions suivantes :
– . est distributive par rapport $+$ *si et seulement si* :
$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad : x.(y + z) = x.y + x.z \text{ et } (y + z).x = y.x + z.x$$
– On dit que $(A, +, .)$ est un anneau si et seulement si :
$$\begin{cases} (A, +) \text{ groupe ablien } (+ \text{ est commutatif}) \\ . \text{ est distributive par rapport } + \\ . \text{ admet un élément neutre qu'on notera } 1_A \end{cases}$$
L'élément neutre de A pour la 1 ère loi $+$ est en général not 0_A.
– Si $(A, +, .)$ est un anneau, une partie B de A est dite sous-anneau de A si elle vérifie :
$$\begin{cases} 0_A \in B \\ \forall (x, y) \in B^2 \text{ on a } x - y \in B \text{ et } x.y \in B \end{cases}$$
– On dit que $(A, +, .)$ est corps si et seulement si :
$$\begin{cases} (A, +, .) \text{ anneau commutatif } (. \text{ est commutatif}) \\ 0_A \neq 1_A \\ \text{Tout élément de A différent de } 0_A \\ \text{ est inversible pour la 2ème loi .} \end{cases}$$
– Si $(A, +, .)$ est un corps, une partie B de A est dite sous-corps de A si elle vérifie :
$$\begin{cases} 0_A \in B \\ \forall (x, y) \in B^2 \text{ on a } x - y \in B \text{ et } x.y^{-1} \in B \end{cases}$$
Dans tout la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$, et en général sauf mention du contraire, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$ et E un ensemble non vide.

4 Espaces vectoriels et application linéaires :

4.1 Loi de composition externe :

Définition 6 *Une LCE sur E base dans $\mathbb{K}$ est la donne d'une application :*
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array} .$$

4.2 Structure d'espace vectoriel :

Définition 7 *E sera dit un $\mathbb{K}$- espace vectoriel s'il est muni d'une LCI + et d'une LCE . base dans $\mathbb{K}$ et qui vérifient les axiomes suivants :*

1) *$(E,+)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera not dorénavant par 0_E.*
$\forall(x,y)\in E^2, \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ on a les propriétés suivantes :

2) $(\alpha+\beta).x=\alpha.x+\beta.x.$

3) $\alpha.(x+y)=\alpha.x+\alpha.y.$

4) $\alpha(\beta.x)=(\alpha\beta).x.$

5) $1.x=x.$

Dans toute la suite du chapitre E est muni d'une structure d'un $\mathbb{K}$- espace vectoriel ,

4.3 Règles de calcul :

Proposition 1 *$\forall x\in E,\forall\alpha\in\mathbb{K}$ on a les règles de calculs suivants :*

1) $0.x=0_E.$

2) $\alpha.0_E=0_E.$

3) $(-\alpha).x=\alpha.(-x)=-(\alpha.x).$

4.4 Structure de sous-espace vectoriel :

Définition 8 *Une partie F de E est dite sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :*

1) $0_E\in F.$

2) *$\forall(x,y)\in E^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}$ on a : $x+\lambda y\in F$, autrement dit F est stable pour les deux lois, interne et externe.*

Remarque :
Tout sous-espace vectoriel de E est lui même un espace vectoriel , et tout espace vectoriel inclus dans E est un sous-espace vectoriel de E, ainsi pour mon montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel , il est judicieux de montrer que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

4.5 Structure d'algèbre :

Définition 9 *On appelle algèbre sur $\mathbb{K}$, tout ensemble A muni de deux LCI $+,\times$ et d'une LCE,., telle que :*

1) *$(A,+,.)$ soit un $\mathbb{K}$- espace vectoriel*

2) *$(A,+,\times)$ soit un anneau.*

3) *$\forall(x,y)\in A^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}$, on a : $\lambda.(x\times y)=(\lambda.x)\times y=x\times(\lambda.y)$*

Définition 10 *Une partie F sera dite sous-algèbre de E si elle vérifie les propriétés suivantes :*

1) $0_E\in F.$

2) *$\forall(x,y)\in E^2,\forall\lambda\in\mathbb{K}$ on a : $x+\lambda y\in F$ et $x\times y\in F$, autrement dit F est stable pour les deux lois internes et celle externe.*

4.6 Applications linaires

Définition 11 *Soit F un autre $\mathbb{K}$- espace vectoriel et $u : E \to F$, on dira que u est linaire si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \text{ on a : } u(x+\lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Vocabulaire et notations :

- L'ensemble des applications linaires de E vers F se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.
- Une application linaire est dite endomorphisme lorsque l'ensemble d'arrive est inclus dans celui de départ. L'ensemble des endomorphismes de E se note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite isomorphisme lorsqu'elle est bijective. L'ensemble des isomorphismes de E vers F se note $\mathcal{I}som_{\mathbb{K}}(E)$.
- Elle sera dite automorphisme lorsqu'elle est bijective et lorsque l'ensemble d'arrive est inclus dans celui de départ. L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E)$.

Proposition 2 *Soit $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$, On a les propriétés suivantes :*

1) $u(0_E) = 0_F$.

2) *L'image directe et celle réciproque d'un sous-espace vectoriel est aussi un sous-espace vectoriel .*

3) $\ker u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}$ *est un sous-espace vectoriel de E, on l'appelle noyau de u.*

4) *u est injective si et seulement si* $\ker u = \{0_E\}$.

5) *$Imu = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, on l'appelle image de u.*

6) *u est surjective si et seulement si $Imu = F$.*

7) $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F),+,.)$ *est un $\mathbb{K}$- espace vectoriel ,en particulier la somme de deux applications linaires est aussi linaire.*

8) *La compose de deux applications linaires est aussi linaire, en particulier $(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E),+,.,\circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.*

9) *La réciproque d'un isomorphisme est aussi un isomorphisme, en particulier $(\mathcal{G}l_{\mathbb{K}}(E),\circ)$ est un groupe, on l'appelle le groupe linaire de E.*

Fin
à la prochaine