CPGE My Youssef, Rabat

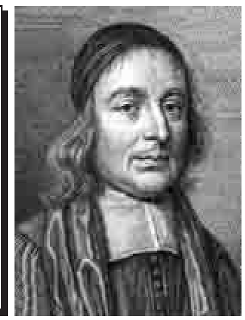
بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Intégration sur un segment*

25 avril 2009

Mathématicien du jour ***Wallis***
John Wallis (1616-1703), est un mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society. Ses travaux concernent principalement le calcul différentiel et intégral. On lui doit le symbole de l'infini ∞.



Blague du jour :
- Quel sont les deux animaux les plus intelligents ? - Le Cerf et le Veau (cerveau)
- C'est un chien qui rencontre un crocodile. Le crocodile dit au chien : Salut, sac à puces ! Et le chien lui répond : Salut, sac à main !
- C'est deux chiens qui discutent. C'est quoi ton nom... ? C'est ché... Ché ? C'est plutot bizarre... Ben pourtant, mon maître me dit tout le temps "Va, cher Ché !".

1 Fonctions en escaliers

1.1 Subdivision d'un segment

Définition 1 On appelle subdivision de $[a,b]$ toute suite finie strictement croissante $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ tel que $x_0 = a, x_n = b$.
On dit que $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si elle existe une subdivision de $[a,b]$, dite adaptée à φ, tel que φ est constante sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extremités à gauche et à droite.
L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 2 Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier, et $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ, et λ_i la constante prise par φ sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ alors la somme
$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x_{i+1} - x_i)$ ne dépond pa du choix de σ on l'appelle alors l'intégrale de φ sur $[a,b]$
et on la note par $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ ou bien $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt$

2 Fonctions continues par morceaux

2.1 Approximation d'une fonction continue par morceaux à l'aide de fonctions en escaliers

Définition 3 On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement si elle existe une subdivision de $[a,b]$, dite adaptée à f, tel que f est continue sur chacun des intervalles ouverts de cette subdivision et admet des limites finies en leurs extremités.
L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Théoréme 1 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, alors $\forall \varepsilon > 0$ ils existent φ et ψ en escalier sur $[a,b]$ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.

2.2 Propriétés de l'intégrale

- **Linéaire :** $\displaystyle\int_{[a,b]} f + \lambda g = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$.
- **Positif :** $f \geq 0 \Longrightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- **Croissant :** $f \leq g \Longrightarrow \displaystyle\int_{[a,b]} f \leq 0 \int_{[a,b]}$.
- **Relation de CHASLES.** $\displaystyle\int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f = \int_{[a,c]}$.
- $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- $\displaystyle\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]} |f| \int_{[a,b]} |g|$. **Inégalité de la moyenne.**

2.3 Cas des fonctions continues

Théoréme 2 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue positive, alors :
$\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0 \Longrightarrow f = 0$ **sur** $[a,b]$.

Théoréme 3 Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues, alors

$$\left(\int_{[a,b]} fg\right) \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{[a,b]} g^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \textbf{Inégalité de Cauchy–Scwarz}.$$

Avec égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.

3 Primitive d'une fonction continue

Définition 4 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on appelle primitive de f sur $[a,b]$ toute fonction F de classe C^1 sur $[a,b]$ telle que $F' = f$.

Théoréme 4 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue alors l'application F définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f et tout autre primitive G de f s'obtient à l'aide de la formule $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt + G(a)$.

Corollaire 1 ***Soit*** $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ***de classe*** C^1 ***alors :***
$\displaystyle\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ ***noté souvent*** $[f]_a^b$.

Corollaire 2 ***Soit*** $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ***de classe*** C^1 ***alors :***
$\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$ ***Intégration par parties.***

Corollaire 3 ***Soit*** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ***continue et*** $\varphi : [a, b] \to R$ ***de classe*** C^1 ***alors***
$\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du$, ***en posant le changement de variable*** $u = \varphi(t)$.

Formules de Taylor : On suppose que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **de classe** C^{n+1}**, on a les résultats suivants :**

– **Formule de Taylor avec reste intégral :** $\displaystyle f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$

– **Inégalite de Taylor-Lagrange :** $\displaystyle\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[a,b]} \left| f^{(n+1)} \right|$.

4 Calcul approché d'intégrales

4.1 Sommes de Riemman

Théoréme 5 **Soit** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue, alors** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$

Intéprétation. En posant $\displaystyle R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$**, appelée somme de Riemman, on a alors** $\displaystyle R_n(f) = \int_a^b \varphi(t)dt$**, avec** φ **en escalier sur** $[a, b]$ **égale à** $\displaystyle f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ **sur chaque intervalle** $\displaystyle\left]a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right[$ **ainsi on approche** $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **à l'aide de celui d'une fonction en escalier qui est somme de surfaces de rectangles.**

Remarques.

Le théorème s'écrit encore : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$ **ou encore** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)dt$. **Le cas le plus pratique est** $a = 0, b = 1$**, le théorème s'écrit alors :** $\displaystyle\lim_{n\to+1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)dt$**, qu'on peut lire ainsi *la moyenne de Césaro (arithmétique)* converge vers l'intégrale.**

4.2 Méthode des trapézes

Le principe est d'approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **à l'aide de** $\displaystyle T_n(f) = \int_a^b \varphi(t)dt$ **où** φ **affine par morceaux sur** $[a, b]$ **qui coincide (interpolle) avec aux extremités** $\displaystyle x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ **avec** $0 \leq k \leq n$**. On a alors le résultat suivant :**

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **de classe** C^2**, alors** $\displaystyle\left| T_n(f) - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f)$ **où**

$\displaystyle T_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$ **et** $\displaystyle x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \forall 0 \leq k \leq n$ **avec** $\displaystyle M_2(f) = \sup_{[a,b]} |f''|$.

Fin
à la prochaine