MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

1 Équation implicite.

Définition 1.1. ***Une conique[1] est définie par une équation de type***

$$\mathcal{C}: \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Proposition 1.1. ***On pose*** $\Delta = ac - b^2$.

- ***Si*** $\Delta > 0$, ***alors*** $\mathcal{C}$ ***est une ellipse ou l'ensemble vide.***
- ***Si*** $\Delta = 0$, ***alors*** $\mathcal{C}$ ***est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.***
- ***Si*** $\Delta < 0$, ***alors*** $\mathcal{C}$ ***est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.***

Théorème 1.1. ***Théorème des fonctions implicites.***
Soit $\mathcal{O}$ ***ouvert de*** $\mathbb{R}^2, f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***et*** $(\gamma) = \{(x,y) \in \mathcal{O}$ ***tel que*** $f(x,y) = 0\}$ ***et*** $(x_0, y_0) \in (\gamma)$ ***fixé tel que*** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, ***alors*** $\exists I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ ***et*** $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***tels que :***

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0) = y_0 \\ &f(x,\varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Corollaire 1.1. ***Soit*** $\mathcal{O}$ ***ouvert de*** $\mathbb{R}^2, f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ ***de classe*** $\mathcal{C}^1$ ***et*** $(\gamma) = \{(x,y) \in \mathcal{O}$ ***tel que*** $f(x,y) = 0\}$ ***et*** $(x_0, y_0) \in (\gamma)$ ***fixé tel que*** $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$, ***alors la tangente à*** (γ) ***au point*** (x_0, y_0) ***a pour équation :***

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$$

En particuliér, la normale à la courbe en ce point est dirigé par le vecteur $\overrightarrow{grad} f(x_0, y_0)$.

Application aux coniques.

Corollaire 1.2. ***Soit*** $\mathcal{C}$ ***une conique définie par une équation de type*** $ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$. ***Alors l'équation de la tangente en tout point*** $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ ***est donnée par la formule suivante dite de dédoublement***

$$axx_0 + b(xy_0 + yx_0) + cyy_0 + \frac{\alpha}{2}(x + x_0) + \frac{\beta}{2}(y + y_0) + \gamma = 0$$

Corollaire 1.3. .

- ***Soit** $\mathcal{C}$ **une ellipse définie par une équation de type** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **Alors l'équation de la tangente en tout point** $(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$ **est donnée par la formule suivante :***

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

- ***Soit** $\mathcal{C}$ **une hyperbole définie par une équation de type** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. **Alors l'équation de la tangente en tout point** $(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$ **est donnée par la formule suivante :***

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

- ***Soit** $\mathcal{C}$ **une parabole définie par une équation de type** $y^2=2px$. **Alors l'équation de la tangente en tout point** $(x_0,y_0)\in\mathcal{C}$ **est donnée par la formule suivante :***

$$yy_0=p(x+x_0)$$

2 Définitions géomètriques.

Définition 2.1. ***(Définition monofocale) Soit** $\mathcal{D}$ **une droite du plan,** F **un point n'appartenant pas à** $\mathcal{D}$ **et** e **un réel strictement positif. On appelle conique de directrice** $\mathcal{D}$**, de foyer** F **et d'excentricité** e **l'ensemble** $\mathcal{C}$ **des points** M **du plan tels que :***

$$MF=ed(M,\mathcal{D})$$

- ***Si** $e<1$**, on parle d'ellipse.***
- ***Si** $e=1$**, on parle de parabole.***
- ***Si** $e>1$**, on parle d'hyperbole.***

Définition 2.2. ***(Définition bifocale) Soit** F_1 **et** F_2 **deux points distincts du plan et** a **est un réel strictement positif,***

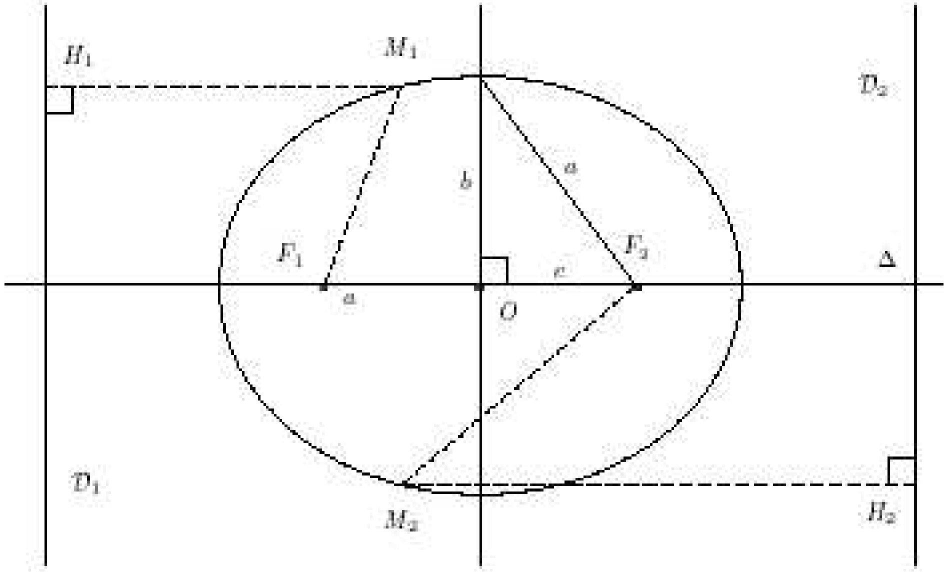
- ***L'ensemble d'équation** $MF_1+MF_2=2a$ **est l'ellipse de foyers** F_1 **et** F_2.*
- ***L'ensemble d'équation** $\|MF_1-MF_2\|=2a$ **est une hyperbole de foyers** F_1 **et** F_2.*

Définition 2.3. ***(Équation polaire.) Soit** $\mathcal{C}$ **une conique d'excentricité** e**, de foyer** O**, elle est définie alors par une équation polaire de type***

$$\rho(\theta)=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

3 Propriétés géomètriques.

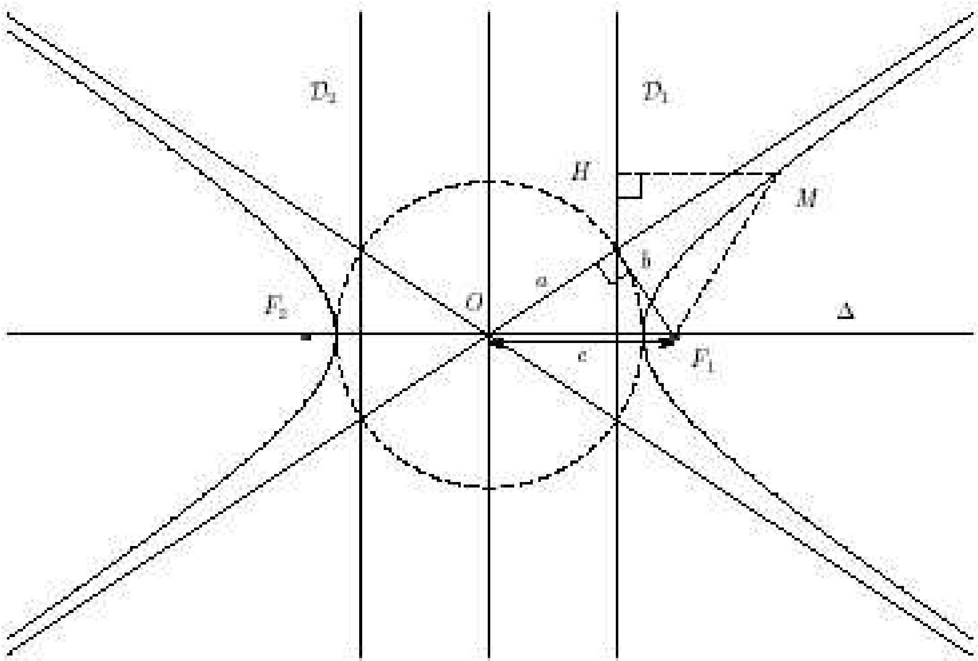
3.1 Ellipse(e¡1).



Propriétés

- **Équation réduite :** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$**, avec** $a \geq b$**.**
- **Paramètres :** $c^2=a^2-b^e, c=ea, p=\dfrac{b^2}{a}, h=d(F_1,D_1)=\dfrac{b^2}{c}, p=eh$
- **Foyers : de coordonnés** $(-c,0)$ **et** $(c,0)$**.**
- **Directrice : d'équation** $x=-c+h$**.**
- **Équation cartésienne :** $x(t)=a\cos t$
  $y(t)=b\sin t$

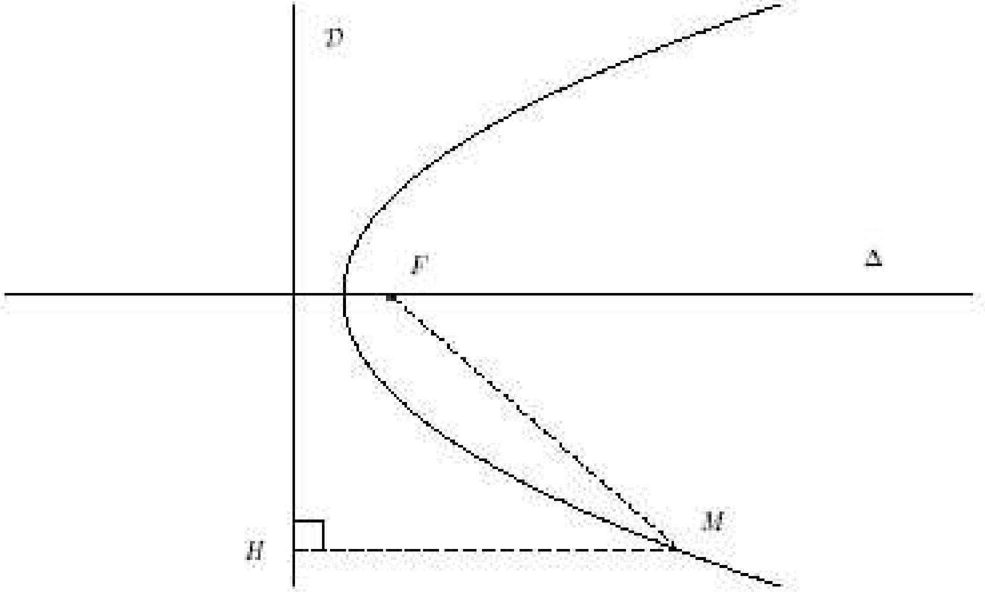
3.2 Hyperbole(e¿1).



Propriétés

- **Équation réduite :** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$**, avec** $a \geq b$**.**
- **Paramètres :** $c^2=a^2+b^e, c=ea, p=\dfrac{b^2}{a}, h=d(F_1,D_1)=\dfrac{b^2}{c}, p=eh$
- **Foyers : de coordonnés** $(-c,0)$ **et** $(c,0)$**.**
- **Directrice : d'équation** $x=-c+h$**.**
- **Équation cartésienne :** $x(t)=a\mathrm{ch}t$
  $y(t)=b\mathrm{sh}t$

3.3 Parabole(e=1).



Propriétés

- **Équation réduite :** $y^2 = 2px$.
- **Équation cartésienne :** $\begin{array}{l} x(t) = 2pt^2 \\ y(t) = 2pt \end{array}$

$\boxed{\text{Fin.}}$