CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Coniques*

4 janvier 2009

Citation du jour
"L'enseignement est le meilleur moyen d'apprendre, j'en suis toujours convaincu ; en communiquant nos connaissances nous continuons à découvrir et à apprendre. En outre, cette activité nous oblige chaque fois à une nouvelle formulation de ce que nous désirons exprimer, nous force à de nouveaux essais, à la recherche constante de nouvelles méthodes. Les liens permanents avec la jeunesse nous aident à rester jeunes d'esprit, nous rendent capables de nous étonner constamment."

Erno Rubik

mathématicien du jour ***Kepler***
Johannes Kepler (1571-1630), est mathématicien, philosophe de la nature, astrologe et astronome allemand célèbre pour avoir étudié l'hypothèse héliocentrique (*la Terre tourne autour du Soleil*) de Nicolas Copernic, et surtout pour avoir découvert que les planètes ne tournent pas en cercle parfait autour du Soleil mais en suivant des ellipses.
Il a découvert les relations mathématiques (dites Lois de Kepler) qui régissent les mouvements des planètes sur leur orbite. Ces relations furent plus tard exploitées par Isaac Newton pour élaborer la théorie de la gravitation universelle. Toutefois, Kepler expliquait les mouvements des planètes non pas par la gravité mais par le magnétisme.
Il a enfin accordé une attention majeure à l'optique en étudiant par exemple la nature de la lumière, la chambre obscure, les miroirs (plans et courbes), les lentilles ou la réfraction.

1 Équation implicite.

Définition 1 **Une conique[a] est définie par une équation de type**

$$\mathcal{C}: \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

[a]Une conique est l'intersection d'un cône avec un plan.

Proposition 1.1 ***On pose*** $\Delta = ac - b^2$.

- ***Si*** $\Delta > 0$***, alors*** $\mathcal{C}$ ***est une ellipse ou l'ensemble vide.***
- ***Si*** $\Delta = 0$***, alors*** $\mathcal{C}$ ***est une parabole, une droite, la réunion de deux droites parallèles ou l'ensemble vide.***
- ***Si*** $\Delta < 0$***, alors*** $\mathcal{C}$ ***est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.***

Équation des tangentes.

Corollaire 1.1 ***Soit*** $\mathcal{C}$ ***une conique définie par une équation de type*** $ax^2+2bxy+cy^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$***. Alors l'équation de la tangente en tout point*** $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ ***est donnée par la formule suivante dite de dédoublement***

$$axx_0 + b(xy_0 + yx_0) + cyy_0 + \frac{\alpha}{2}(x + x_0) + \frac{\beta}{2}(y + y_0) + \gamma = 0$$

Corollaire 1.2 ***.***

- ***Soit*** $\mathcal{C}$ ***une ellipse définie par une équation de type*** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$***. Alors l'équation de la tangente en tout point*** $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ ***est donnée par la formule suivante :***

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- ***Soit*** $\mathcal{C}$ ***une hyperbole définie par une équation de type*** $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$***. Alors l'équation de la tangente en tout point*** $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ ***est donnée par la formule suivante :***

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

- ***Soit*** $\mathcal{C}$ ***une parabole définie par une équation de type*** $y^2 = 2px$***. Alors l'équation de la tangente en tout point*** $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ ***est donnée par la formule suivante :***

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

2 Définitions géomètriques.

Définition 2 (Définition monofocale) Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$ et e un réel strictement positif. On appelle conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M du plan tels que :

$$MF = ed(M, \mathcal{D})$$

- **Si $e < 1$, on parle d'ellipse.**
- **Si $e = 1$, on parle de parabole.**
- **Si $e > 1$, on parle d'hyperbole.**

Définition 3 (Définition bifocale) Soit F_1 et F_2 deux points distincts du plan et a est un réel strictement positif,
- **L'ensemble d'équation $MF_1 + MF_2 = 2a$ est l'ellipse de foyers F_1 et F_2.**
- **L'ensemble d'équation $\|MF_1 - MF_2\| = 2a$ est une hyperbole de foyers F_1 et F_2.**

Définition 4 (Équation polaire.) Soit $\mathcal{C}$ une conique d'excentricité e, de foyer O, elle est définie alors par une équation polaire de type

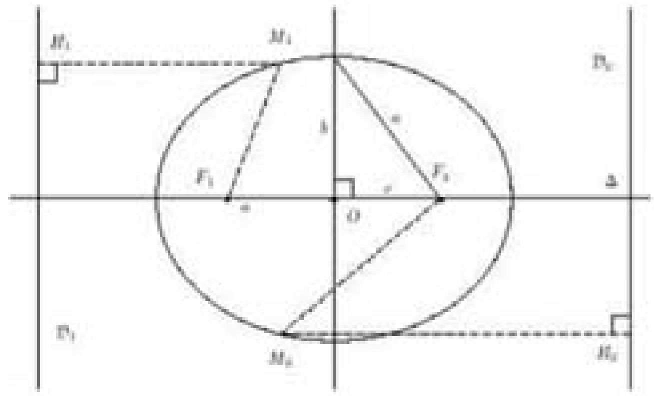
$$\rho(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$$

3 Propriétés géomètriques.

3.1 Ellipse ($e < 1$).

Propriétés

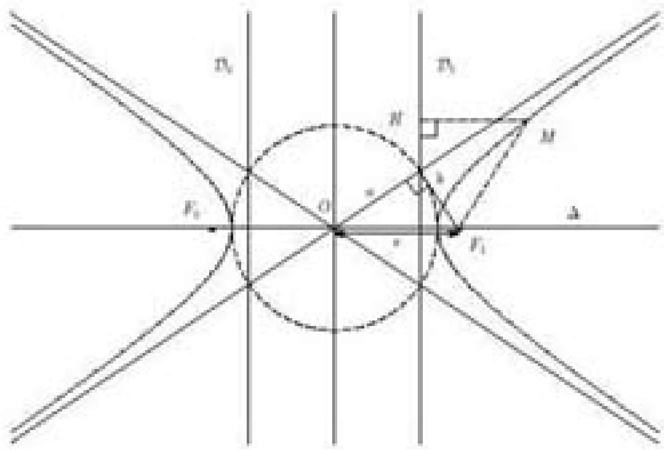
- **Équation réduite :** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$**, avec** $a \geq b$.
- **Paramètres :** $c^2 = a^2 - b^e$
  $c = ea$
  $p = \dfrac{b^2}{a}$
  $h = d(F_1, D_1) = \dfrac{b^2}{c}$
  $p = eh$
- **Foyers : de coordonnés** $(-c, 0)$ **et** $(c, 0)$.
- **Directrice : d'équation** $x = -c + h$.
- **Équation cartésienne :** $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$



3.2 Hyperbole ($e > 1$).

Propriétés

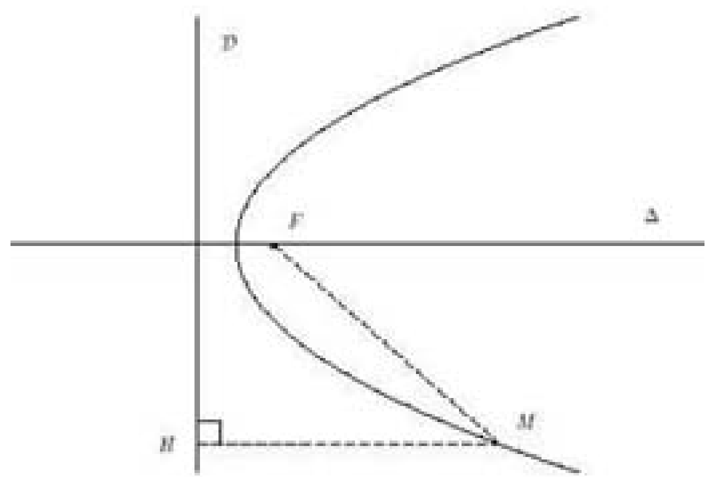
- **Équation réduite :** $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$**, avec** $a \geq b$.
- **Paramètres :** $c^2 = a^2 + b^e$
  $c = ea$
  $p = \dfrac{b^2}{a}$
  $h = d(F_1, D_1) = \dfrac{b^2}{c}$
  $p = eh$
- **Foyers : de coordonnés** $(-c, 0)$ **et** $(c, 0)$.
- **Directrice : d'équation** $x = -c + h$.
- **Équation cartésienne :** $\begin{cases} \\ x(t) = a\mathrm{ch}t \\ y(t) = b\mathrm{sh}t \end{cases}$



3.3 Parabole ($e = 1$).

Propriétés

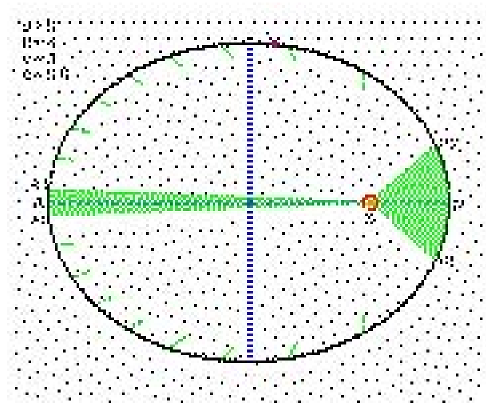
- **Équation réduite :** $y^2 = 2px$.
- **Équation cartésienne :** $\begin{cases} \\ x(t) = 2pt^2 \\ y(t) = 2pt \end{cases}$



4 Lois de Kepler

1) *Loi des orbites* : Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le soleil est un foyer.

2) *Loi des aires* :
Si S est le Soleil et M une position quelconque d'une planète, alors l'aire balayée par le segment $[S, M]$ entre deux positions C et D est égale à l'aire balayée par ce segment entre deux positions E et F si la durée qui sépare les positions C et D est égale à la durée qui sépare les positions E et F. La vitesse d'une planète devient donc plus grande lorsque la planète se rapproche du soleil. Elle est maximale au voisinage du rayon le plus court (*périhélie*), et minimale au voisinage du rayon le plus grand (*aphélie*).
De cette deuxième loi, on déduit que la force exercée sur la planète est constamment dirigée vers le soleil.



3) *Loi des périodes* : Le carré de la période sidérale (temps entre deux passages successifs devant une étoile lointaine) est directement proportionnel au cube du demi-grand axe de la trajectoire elliptique de l'objet
Les lois de la gravitation universelle énoncées par Isaac Newton permettent de déterminer cette constante en fonction de la constante de gravitation et masse du Soleil.
De cette troisième loi, on déduit qu'il existe un facteur constant entre la force exercée et la masse de la planète considérée, qui est la constante de gravitation universelle, ou constante gravitationnelle.
Cette formule permet de calculer les différents paramètres d'une trajectoire elliptique à partir de très peu d'informations. En effet la connaissance de trois positions datées permettaient de tracer toute la trajectoire du mouvement.

Complèment : *Forme newtonienne de la troisième loi de Kepler*
Newton établit la formule suivante :

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

T : la période de l'objet
a : le demi grand axe de la trajectoire elliptique
G : la constante de la gravitaion universelle
M : la masse de l'objet au centre

L'exemple le plus spectaculaire de l'application de cette loi fut celui des irrégularités d'Uranus qui permit la « découverte » de Neptune.
Les lois de Kepler ne sont pas seulement applicables aux planètes mais à chaque fois qu'une masse se trouve en orbite autour d'une autre masse. C'est le cas, par exemple, de la Lune et de la Terre ou d'un satellite en orbite autour de celle-ci.
Cette loi n'est cependant applicable que pour des masses importantes suffisamment éloignées. Ainsi, pour le déplacement d'un électron autour du noyau d'un atome, on entre dans le domaine de la physique quantique, qui n'obéit pas aux mêmes lois (celui-ci est beaucoup plus influencé par l'attraction électrostatique que par les forces gravitationnelles qui jouent un rôle négligeable).

Fin.