

RÉSUMÉ DE COURS : *Fonctions convexes.*

MPSI-Maths.

Mr Mamouni : myismail1@menara.ma

Source disponible sur :

©<http://www.chez.com/myismail>

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
وَقُلْ إِعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ
صَدَقَ اللَّهُ الْعَظِيمُ

Dans tout le chapitre on considère $I = [a, b]$ un segment de \mathbb{R} , et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

Définition 1. On dit que f est convexe sur I si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1]$ on a :
 $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

Théorème 1. f est convexe sur I si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*, (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in I^n, \forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in [0, 1]^n$ on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Théorème 2. f est convexe sur I si et seulement si les cordes de f , (segments qui joignent deux points de la courbe de f) sont au dessus de cette courbe.

Autrement dit : $f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \forall x \in [a, b]$.

Théorème 3. f est convexe sur I si et seulement si les pentes des cordes dont on fixe une extrémité sont croissantes.

Autrement dit : La fonction $\varphi_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est croissante.

Théorème 4. Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , alors :
 f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Dans ce cas les tangentes de f sont situées en dessous de sa courbe.
Autrement dit : $f'(a)(x - a) + f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]$.

Théorème 5. Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur I , alors :
 f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.

Fin.