**CPGE My Youssef, Rabat**

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

# Résumé de cours: *Courbes planes parametrées et polaires*

**4 janvier 2009**

***Devinette***
**Question : Qu'est-ce qu'un ours polaire ?**
**Réponse : Un ours cartésien après un changement de coordonnées.**

**mathématicien du jour** ***Chasles***
**Michel Chasles (1793-1880), mathématicien français, il entre à l'École polytechnique en 1812. Il y devient professeur en 1841. En 1846, une chaire de géométrie supérieure est créée pour lui à la Sorbonne. Il est élu en 1851 membre de l'Académie des sciences.**
**Son nom est attaché à la relation de Chasles mais cette propriété était déjà été utilisée longtemps avant lui. Il a inventé le terme homothétie. Il a aussi travaillé sur les homographies et la géométrie projective. Il a introduit le rapport anharmonique appelé aussi birapport de 4 points alignés. Ses travaux de géométrie lui valurent la Médaille Copley en 1865.**

## 1 Courbes planes paramétrées

**Définition 1** **Ce sont les courbes définies par des équations de type**
$$\begin{array}{llll} \gamma : & I & \longrightarrow & t \\ & \mathbb{R}^2 & \longmapsto & M(t) = (x(t), y(t) \end{array}$$

**Interpretation :**
- $I$ **partie de** $\mathbb{R}$**, intersection des domaines de définition des fonctions réelles** $t \mapsto x(t)$ **et** $t \mapsto y(t)$**.**
- $M(t_0)$ **désigne la position à l'instant** $t = t_0$ **d'un mobile qui se déplace sur la courbe** $(\gamma)$**, dans un intervalle de temps** $I$**, avec une vitesse**

$$\overrightarrow{V(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j}$$

**et une accélération**

$$\overrightarrow{\Gamma(t)} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = x''(t)\,\overrightarrow{i} + y''(t)\,\overrightarrow{j}$$

**Comme dessiner une courbe plane parametrée ?**

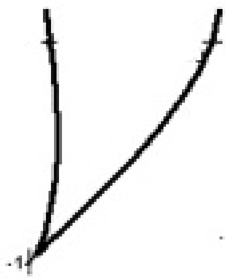
- **1ère étape : Determiner le domaine de définition $D_f$ ; c'est intersection des domaines de définition des fonctions réelles $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.**
- **2ème étape : Determiner le domaine d'étude $D_E$, ainsi que les symétries de la courbe.**

  1) **Si les deux fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sont périodiques de même période $T$, alors :**
     - **Domaine d'étude : $D_E = D_f \cap$ un intervalle de longueur $T$.**
     - **Symétrie : Tous les points sont doubles.**
  2) **Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, alors :**
     - **Domaine d'étude : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.**
     - **Symétrie : Tous les points sont doubles.**
  3) **Si $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors :**
     - **Domaine d'étude : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.**
     - **Symétrie : par rapport à $(ox)$.**
  4) **Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$, alors :**
     - **Domaine d'étude : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.**
     - **Symétrie : par rapport à $(oy)$.**
  5) **Si $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, alors :**
     - **Domaine d'étude : $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$.**
     - **Symétrie : par rapport à l'origine.**

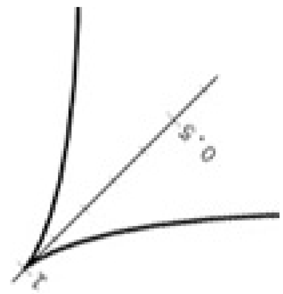
- **3ème ètape : Tableau de variations ; il s'agit d'étudier les monotonie des deux fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.**
- **4ème étape : Étude des tangentes en quelques points.**

  1) **Cas d'un point régulier, i.e. $\overrightarrow{V(t_0)} \neq \overrightarrow{0}$, dans ce cas, la tangente à $(\gamma)$ au point $M(t_0)$ est dirigée par la vitesse $\overrightarrow{V(t_0)}$.**
     **En particulier : Si $x'(t_0) = 0$, alors la tangente est verticale et si $y'(t_0) = 0$ alors elle est horizontale.**
  2) **Cas d'un point stationnaire, i.e. $\overrightarrow{V(t_0)} + \overrightarrow{0}$, dans ce cas on cherche la première dérivée non nulle $\dfrac{\mathrm{d}^{(p)}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}$, c'est elle qui dirige tangente à $(\gamma)$ au point $M(t_0)$ ; puis on cherche la première dérivée $\dfrac{\mathrm{d}^{(q)}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^q}$ non parallèle à $\dfrac{\mathrm{d}^{(p)}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}$. On discute après les cas suivants :**

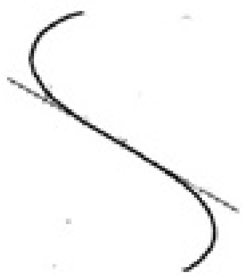
**1èr cas : $p$ et $q$ pairs :**
**Il s'agit d'un point de rebroussement dit de 1ème espèce,**
**comme le montre la figure ci dessous :**



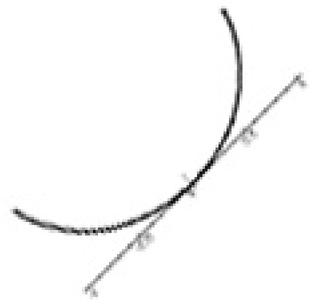
**2ème cas : $p$ pair et $q$ impair :**
**Il s'agit d'un point de rebroussement dit de 2ème espèce**
**comme le montre la figure ci dessous :**



**3ème cas : $p$ et $q$ impairs :**
**Il s'agit d'un point d'inflexion,**
**comme le montre la figure ci dessous :**



**4ème cas : $p$ impair et $q$ pair :**
**Il s'agit d'un point ordinaire,**
**comme le montre la figure ci dessous :**

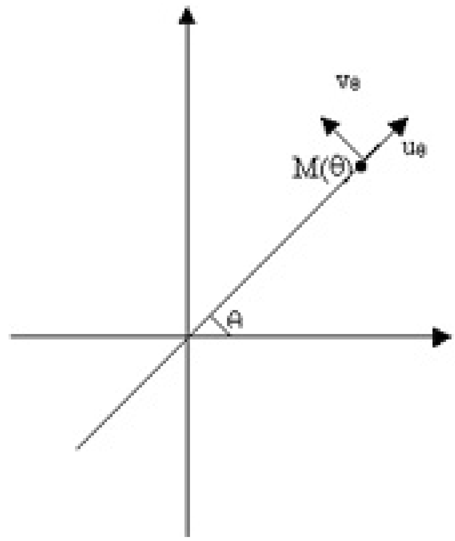


– **5ème étape : Étude des branches infinies aux éxtremités $t_0$ du domaine d'étude. N.B que $t_0$ peut être fini ou infini. On distingue les cas suivants :**
  1) $\lim\limits_{t_0} x(t) = x_0$ **(finie) et** $\lim\limits_{t_0} y(t) = \infty$**, dans ce cas la droite d'équation** $x = x_0$ **est une asymptote à la courbe.**
  2) $\lim\limits_{t_0} y(t) = y_0$ **(finie) et** $\lim\limits_{t_0} x(t) = \infty$**, dans ce cas la droite d'équation** $y = y_0$ **est une asymptote à la courbe.**
  3) $\lim\limits_{t_0} x(t) = \infty$ **et** $\lim\limits_{t_0} y(t) = \infty$**, on étudie alors** $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$**.**
     a) **Si** $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \infty$**, alors la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe** $(oy)$**.**
     b) **Si** $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$**, alors la courbe admet une branche parabolique de direction l'axe** $(ox)$**.**
     c) **Si** $\lim\limits_{t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = a$ **finie non nulle, on étudie alors** $\lim\limits_{t_0} y(t) - ax(t)$
        i. $\lim\limits_{t_0} y(t) - ax(t) = b$**, alors la droite d'équation** $y = ax + b$ **est une asymptote à la courbe.**
        ii. $\lim\limits_{t_0} y(t) - ax(t) = b$**, alors la courbe admet une branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$**.**

– **6ème étape : Dessiner la courbe. Remarque : Parfois il est intéressant d'étudier les points doubles en résolvant le système** $\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$ **.**

# 2 Courbes en coordonnées polaires

**Définition 2** **Ce sont les courbes définie par une équation de type** $\theta \mapsto \rho(\theta)$ **où** $\rho = \overline{OM}$ **comme le montre le dessin suivant**




**où** $\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta\overrightarrow{i} + \sin\theta\overrightarrow{j}$**,** $\overrightarrow{v}_\theta = -\sin\theta\overrightarrow{i} + \cos\theta\overrightarrow{j}$ **et** $\overrightarrow{OM} = \rho(\theta)\overrightarrow{u}_\theta$**.**

**Comment dessiner une courbe à partir de son équation polaire ?**

- **1ère étape : Déterminer le domaine de définition** $D_f$**, c'est celui de la fonction** $\theta \mapsto \rho(\theta)$**.**
- **2ème étape : Réduire le domaine d'étude** $D_E$ **et déterminer les symetries de la courbe, pour cela on distingue les cas suivants :**

**1)** $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap$ **un intervalle de longueur** $2\pi$**.**
- **Symétrie : Tous les points sont doubles.**

**2)** $\rho(\theta + 2\pi) = -\rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap$ **un intervalle de longueur** $2\pi$**.**
- **Symétrie : par rapport à l'origine.**

**3)** $\rho(\theta + \pi) = \rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap$ **un intervalle de longueur** $\pi$**.**
- **Symétrie : par rapport à l'origine.**

**4)** $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap$ **un intervalle de longueur** $\pi$**.**
- **Symétrie : Tous les points sont doubles.**

**5)** $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap$ **un intervalle de longueur** $\pi$**.**
- **Symétrie : par rapport à** $(oy)$**.**

**6)** $\rho(\pi - \theta) = -\rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap$ **un intervalle de longueur** $\pi$**.**
- **Symétrie : par rapport à** $(ox)$**.**

**7)** $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$**.**
- **Symétrie : par rapport à** $(ox)$**.**

**8)** $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$.
- **Domaine d'étude :** $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+$**.**
- **Symétrie : par rapport à** $(ox)$**.**

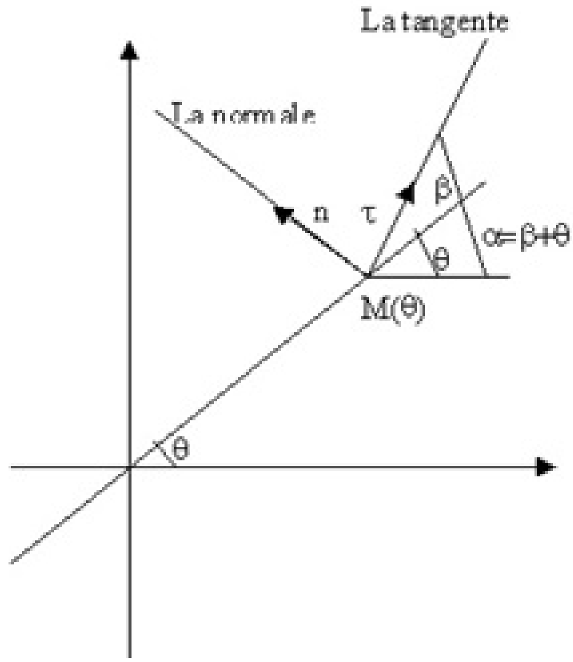
- **3ème étape : Étude des variations de la fonction** $\theta \mapsto \rho(\theta)$**.**
  **N.B :** $\rho(\theta) = 0$ **signifie que la courbe passe par l'origine.**
- **4ème étape : Étude des tangentes en quelques points réguliers, pour de tels points la tangente est dirigée par**

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta} = \rho'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + \rho(\theta)\overrightarrow{v}_\theta$$

**En notant par** $\beta$ **l'angle orienté de vecteurs entre** $\overrightarrow{u}_\theta$ **et la tangente, on a les formules**

**suivantes :**

$$\tan\beta = \frac{\rho}{\rho'}$$
$$\overrightarrow{\tau} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha\,\overrightarrow{j} \quad \textbf{dirige la tangente}$$
$$\overrightarrow{n} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\alpha\,\overrightarrow{j} \quad \textbf{dirige la normale}$$

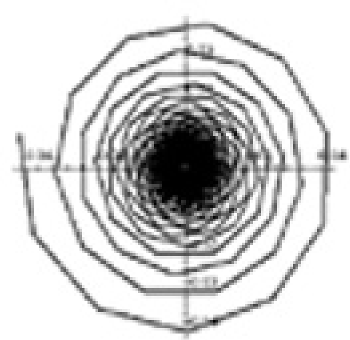



– **Étude des branche infinies.**

1) **1èr cas :** $\lim\limits_{\infty}\rho(\theta) = 0$**, l'origine est un point asymptote**

2) **2ème cas :** $\lim\limits_{\infty}\rho(\theta) = R$**, Le cercle de centre l'origine et de rayon** $|R$ **est un cercle asymptote.**

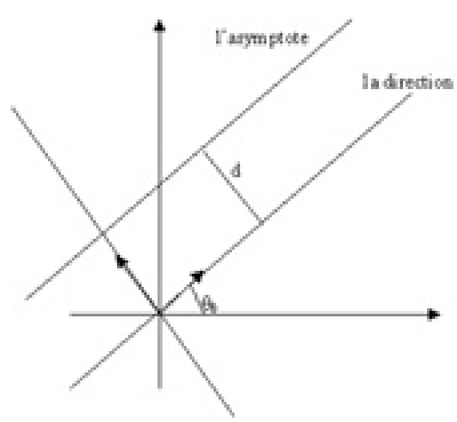
3) **3ème cas :** $\lim\limits_{\infty}\rho(\theta) = \infty$**, il s'agit d'une spirale qui diverge vers l'infini.**



4) **4ème cas :** $\lim\limits_{\theta_0}\rho(\theta) = \infty$**, dans ce cas on étudie** $\lim\limits_{\theta_0}\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0)$**.**

a) **Si** $\lim\limits_{\theta_0}\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0) = \infty$**, la courbe admet une branche parabolique de direction la droite d'équation** $\theta = \theta_0$**.**

b) **Si** $\lim\limits_{\theta_0}\rho(\theta)\sin(\theta-\theta_0) = d$**, la courbe admet pour asymptote la droite d'équation** $y = d$ **dans le repère** $(0, \overrightarrow{u}_{\theta_0}, \overrightarrow{v}_{\theta_0})$**.**



# 3 Étude métrique

- **Abscisse curviligne :** $s(t)$ **définie par la relation** $s'(t) = \|\overrightarrow{V}(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$**. Elle permet de calculer la longueur de la trajectoire parcourue entre les instants** $t_1$ **et** $t_2$ **par la formule** $l = s(t_2) - s(t_1)$**.**
- **Repère de Frenet :** $(M, \overrightarrow{\tau}, \overrightarrow{n})$ **où**

$$\tan\beta = \frac{\rho}{\rho'}$$

$$\overrightarrow{\tau} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha\,\overrightarrow{j} \quad \textbf{dirige la tangente}$$

$$\overrightarrow{n} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\alpha\,\overrightarrow{j} \quad \textbf{dirige la normale}$$

**Si le point est régulier, on a**

$$\overrightarrow{\tau} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} \Big/ \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right\|$$

**D'où les formules suivantes :**

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\alpha \qquad \textbf{Formules de Frenet}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = -\sin\alpha$$

- **Rayon de courbure :** $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha}$**.**
- **Centre de courbure : c'est le point** $C$ **dirigé vers la normale de la courbe au point** $M$**, défini par la formule suivante**

$$\overrightarrow{MC} = R\overrightarrow{n}$$

**C'est le centre du cercle de rayon** $|R|$ **tangent à la courbe au point** $M$**, appelé cercle osculateur**

*Fin*
*Á la prochaine*