Résumé de cours : *Groupes Cycliques.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

1. Ordre d'un groupe.

Définition 1. *Si G est un groupe, son cardinal est appellé alors l'ordre de G et noté $o(G)$.*

Vocabulaire. Tout groupe fini est dit d'ordre fini.

2. Groupe engendré par un élément.

Définition 2. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, on appelle sous groupe engendré par a le sous-groupe de G, noté $< a >$ formé par les puissances de a.*
Autrement dit : $< a >= \{a^n \text{ tel que } n \in \mathbb{Z}\}$.

Remarque. Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors $< a >$ est le plus petit sous-groupe de G contenant a.
Autrement dit : Si H est un sous-groupe de G, $a \in H \Longrightarrow < a > \subset H$.

3. Ordre d'un élément d'un groupe.

Définition 3. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$. L'ordre du sous-groupe engendré par a est aussi appelé l'ordre de a, et noté $o(a)$.*
Autrement dit : $o(< a >) = o(a)$.

Remarque. Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors $o(a) = 1 \Longleftrightarrow a = e$, où e l'élément neutre de G.

Vocabulaire. Un élément d'un groupe est dit d'ordre fini, lorsqu'il engendre un groupe fini.

Théoréme 1. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors :*
a est d'ordre fini $\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$.

Théoréme 2. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G$, alors :*
a est d'ordre fini $\Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = e$.

Théoréme 3. *Soit $(G,.)$ un groupe et $a \in G, n \in \mathbb{N}$, alors :*

$$o(a) = n \Longleftrightarrow \begin{array}{ll} i) & a^n = e \\ ii) & \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad a^k = e \Longrightarrow n \text{ divise } k \end{array}.$$

4. Groupes monogènes.

Définition 4. *Un groupe G est dit monogène s'il est engendré par l'un de ses éléments.*
Autrement dit : $\exists a \in G$ tel que $G =< a >$.

Définition 5. *Un groupe G est dit cyclique s'il est monogène et fini.*

Fin.