.

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé du cours : Dénombrement.

1 Ensembles finis :

Notation : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $[|1, n|]$ au lieu de $\{1, ..., n\}$.
Définition : Un ensemble E, non vide, est dit fini s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une bijection entre E et $[|1, n|]$. Dans une telle situation l'entier n est unique, il s'appelle cardinal de E et se note $\operatorname{card}(E)$.
Par convention, l'ensemble vide est aussi fini, avec $\operatorname{card}(\emptyset) = 0$.
Propriétés : Soient E, F deux ensembles finis, on a les résultats suivants :

1) Toute partie A de E est finie avec $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(E)$, on a égalité si et seulement si : $A = E$.

2) $E \cup F$ est fini avec : $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F)$.

3) $E \times F$ est fini avec $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$.

2 Applications et ensembles finis :

Soient E, F deux ensembles finis, et $f : E \to F$ une application quelconque. On a les propriétés suivantes :

1) Si f est injective alors $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(F)$.

2) Si f est surjective alors $\operatorname{card}(E) \geq \operatorname{card}(F)$.

3) Si f est bijective alors $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$.

4) Si f est injective (ou surjective) et $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$ alors f est bijective.

5) $\text{card}\,(\mathcal{F}(E,F)) = \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$. Entre deux ensembles finis de cardinaux respectivement n et p, on peut construire exactement p^n applications.

6) $\text{card}\,(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)}$. Un ensemble à n éléments contient exactement 2^n parties.

3 Dénombrement :

Dans tout ce résumé cours n, p designent deux entiers naturels non nuls tels que $n \geq p$.
Principe des bergers : Soit $f : E \to F$ telle que $\text{card}(F) = p$, et chaque élément de F admet exactement n antécédants par f alors $\text{card}(E) = np$.
Raisonnement par arbres Si un arbre est formé p branches, dont chaque branche à son tour est formé par n branches, alors le nombre total des branches de l'arbre est np.
Factoriels : $n! = 1 \times 2 \times \ldots n$ est le nombre de bijections qu'on peut définir sur un ensemble de cardinal n, par convention $0! = 1$.
C'est aussi le nombre de façons avec lesquelles on peut permuter n éléments ou n indices.
Et c'est aussi le nombre de façons avec lesquelles on peut placer n éléments dans n places.
Arrangements : $\mathcal{A}_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ est le nombre d'injections qu'on peut définir sur un ensemble de cardinal p vers un ensemble de cardinal n.
C'est aussi le nombre de façons avec lesquelles on peut choisir p éléments parmi n, en tenant compte de l'ordre dans notre choix.
Combinaisons : $\mathcal{C}_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ est le nombre de façons avec lesquelles on peut choisir p éléments parmi n, sans tenir compte de l'ordre dans notre choix.
Noter aussi que dans un ensemble à n éléments il y a exactement $\mathcal{C}_n^p$ parties formées par p éléments. D'où l'égalité classique

$$\sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p = 2^n$$

A retenir aussi la relation du *triangle de Pascal :*

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$$

El la formule du binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \mathcal{C}_n^p a^p b^{n-p}$$

Fin.