Chapitre XV : Dérivation

Table des matières

0.1. Résumé de cours:

Dans tout le résumé de cours I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$

0.1.1. Dérivation:

Définition : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), a \in I$. On dit que f est dérivable en a *si et seulement si :* la limite suivante $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est finie on la note par $f'(a)$ et on l'appelle dérivée de f au point a.

Définition : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), a \in I$. Si f est dérivable en a alors $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$.

Propriétés : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ dérivables en $a \in I$, on a les propriétés suivantes :

1. f est continue en a et la courbe de f admet une tangente en a d'équation $\Delta : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
2. Si f admet un extremum en a et si a est un point intérieur de I alors $f'(a) = 0$.
3. $f + g$ est dérivable en a avec $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
4. fg est dérivable en a avec $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$. En particulier $(x^n)' = nx^{n-1}$.
5. $\dfrac{1}{f}$ est dérivable en a, à condition que $f'(a) \neq 0$ avec $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(a) = -\dfrac{f'(a)}{f^2(a)}$. En particulier $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.
6. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors gof est dérivable en a avec $(gof)'(a) = f'(a)g'(f(a))$.En particulier si f est dérivable on a les résultats suivants :
$$(f^n)' = nf'f^{n-1}, \quad \left(e^f\right)' = f'e^f, \quad \ln f' = \frac{f'}{\ln f}.$$
7. Si f est bijective et dérivable en a, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ avec $\left(f^{-1}\right)'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

0.1.2. Dérivées d'ordre supérieures:

On dit que f est dérivable sur I si elle est en tout point de I, dans ce cas on peut parler de f' comme fonction définie sur I, si elle est continue sur I, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, l'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^1(I)$, il est stable par la somme, le produit et la multiplication par une constante, on dit que c'est une algébre. De façon récurrente on dira que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I *si et seulement si* sa dérivée f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I, avec la relation $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)' = (f')^{(k)}$. L'ensemble de telles fonctions se note $\mathcal{C}^k(I)$, c'est aussi une algébre.

Dérivées k- ème usuelles :

$((x+\alpha)^n)^{(k)} = A_n^k x^{n-k}$	$(e^x)^{(k)} = e^x$	$(\cos x)^{(k)} = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$	$(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$
$\left(\frac{1}{x+\alpha}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k k!}{(x+\alpha)^{k+1}}$		$\left(\frac{1}{(x+\alpha)^2}\right)^{(k)} = \frac{(-1)^k (k+1)!}{(x+\alpha)^{k+2}}$	$\ln(x+\alpha)^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+\alpha)^k}$

0.1.3. Extremums:

Définitions :

- On dit que f admet un maximum global au point x_0 sur $[a, b]$ si et seulement si $f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b]$.
- dit que f admet un minimum global au point x_0 sur $[a, b]$ si et seulement si $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b]$.
- On dit que f admet un extremum global au point x_0 sur $[a, b]$ si et seulement si f admet au point x_0 un maximum ou minimum global.
- On dit que f admet un maximum local au point $x_0 \in [a, b]$ si et seulement si $\exists \varepsilon > 0$ tel que : $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset [a, b]$ et f admet un maximum global au point x_0 sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
- On dit que f admet un minimum local au point $x_0 \in [a, b]$ si et seulement si $\exists \varepsilon > 0$ tel que : $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subset [a, b]$ et f admet un minimum global au point x_0 sur $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
- On dit que f admet un extremum local au point x_0 sur $[a, b]$ si et seulement si f admet au point x_0 un maximum ou minimum local.

Remarques :

- Si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- La réciproque du résultat précédent n'est pas toujours vraie, $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$ sans que f admet un extremum local en 0.
- La propriété précedente n'est pas toujours vraie dans le cas où l'extremum est global sur $[a, b]$ en a ou bien en b. *Exemple* : $f(x) = x^2$ admet un maximum global sur $[0, 1]$ en 1 mais $f'(1) \neq 0$.

0.1.4. Théorèmes fondamentaux:

Théorème 1 : Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que : $f(a) = f(b)$ alors
$\exists c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$. *(Théorème de Rolle)*

Théorème 2 : Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ alors $\exists c \in]a, b[$ tel que :
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. *(Théorème des accroissements finis T.A.F)*

Conséquence 1 : Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que : $m \leq f' \leq M$ alors
$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$. *(Inégalité des accroissements finis I.A.F)*

Conséquence 2 : Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que : $|f'| \leq k$ alors f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$.

Conséquence 3 : Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que : $f' = 0$ alors f est constante sur $[a, b]$.

Conséquence 4 : Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que : $f' \geq 0$ alors f est croissante sur $[a, b]$.

Conséquence 5 : Si f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que : $f' > 0$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

0.2. Exercices

1. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.$f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en a. Déterminer $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^n(I)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que : $\frac{1}{x} \in I$ on a :

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Application : calculer la dérivée n^{eme} des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = x^{n-1}\ln(1+x), h(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$$

3. On pose $f(x) = x^2(2+\sin(\frac{1}{x^2}))$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$ montrer que f admet un minimum strict en 0 mais f n'est croissante sur aucun intervalle de la forme $[0, a]$.
4. On pose $f(x) = \frac{x}{1+x\sin(\frac{1}{x})}$ si $0 < x \le 1$ et $f(0) = 0$ montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$ strictement croissante mais que l'équation $f'(x) = 0$ admet une infinité de solutions.
5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Montrer que strictement monotone.
6. soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ on pose $S_n(f) = \sum\limits_{k=n}^{2n} f(\frac{1}{k})$
   (a) montrer que la suite $x_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ est convergente soit L sa limite , on ne cherchera pas a la calculer .
   (b) montrer que $S_n(f)$ converge vers un réel S qu'on exprimera en fonction de $L, f'(0)$. (*indication :* on pourra utiliser la définition de f dérivable en 0).
   (c) en prenant $f(x) = \ln(1+x)$ expliciter S puis en déduire L .
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la dérivé $n^{éme}$ de la fonction $f_n(x) = x^n \ln(x)$.
8. *TAF à l'infini* : Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui admet la même limite en $-\infty$ et en $+\infty$, montrer que f' admet au moins un zéro.
9. *Théorème des accroissement finis généralises* : Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues dérivables sur $]a, b[$ tel que $|f'(x)| \le |g'(x)| \quad \forall x \in]a, b[$ montrer alors que $|f(b) - f(a)| \le |g(b) - g(a)|$.
10. *Problème d'emballage* : Une usine fabrique des boites parallelipediques sans couvercle de la façon suivante : on prend une feuille rectangulaire de carton de côtés a et b puis on découpe de chaque coin un carre de côté x puis on rabat les morçeau ainsi obtenus , quelle est la valeur de x qui réalise un volume maximal.
11. *Algorithme Babylonéen* :
   (a) Soit $a > 0$,étudier les variations sur $]0, +\infty]$ de la fonction définie par $f(x) = \frac{x+\frac{a}{x}}{2}$.
   (b) Justifier que la suite définie par $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est bien définie.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{\left(x_n-\sqrt{a}\right)^2}{2x_n}$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{a-x_{n+1}^2}{2x_{n+1}}$.
   (e) En déduire que $x_n \to \sqrt{a}$.
   (f) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le x_{n+1} - \sqrt{a} \le \frac{(x_n-\sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$.
   (g) En déduire une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, a .

(h) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{e}$ à 10^{-3} près (on admet que $2 < e < 2.8$).

12. (a) Montrer que : $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > -1$.
(b) En déduire la limite de $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ (où $x > -1$).
(c) Donner un exemple d'une suite (x_n) telle que : $x_n \to 1$ mais $x_n^n \nrightarrow 1$.
(d) calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

13. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et g de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ qui s'annule au moins $n+1$ fois, montrer alors que $g^{(n)}$ s'annule au moins une fois.
Indication : Penser au théoréme de *Rolle* .
(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $a_1 < a_2 < .... < a_n$ nombres reéls deux à deux distincts et f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a_1, a_n]$ qui s'annule sur tous les a_k, montrer que $\forall x \in [a_1, a_n]$ tel que : $x \neq a_k$, $\forall 1 \leq k \leq n$, on a : $\exists c_x \in]a_1, a_n[$ tel que $f(x) = \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} (x - a_k)$.
Indication on pourra fixer x et utiliser (a) pour la fonction $g(t) = f(t) - A \prod\limits_{k=1}^{n} (t - a_k)$ avec A nombre réel choisi tel que : $g(x) = 0$.

14. Calculer les derivé de : $\ln(\ln(\ln(\ln(x))))$, $x^{x^{x^x}}$.
15. Calculer les derivé n^{eme} de $(1-x^2)\cos(x)$, $\frac{e^x}{x}$.
16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables. Calculer $(f_1 f_2)'$, $(f_1 f_2 f_3)'$, en déduire une formule générale pour $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i$ qu'on démontrera aprés.
17. Montrer que la dérivée d'une fonction paire est impaire, celle d'une fonction impaire est paire. En déduire qu'en un centre de symétrie de la courbe la dérivée seconde est nulle.

(a) Donner un équivalent de $\ln(\cos x)$ au voisinage de zéro.
(b) Soit la fonction f définie sur $]\pi 2[$ par $f(x) = (\cos x)^{1x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, et que son prolongement (toujours noté f) est dérivable en ce point.
(c) Préciser $f'(0)$.

18. Soit $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$.
(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa fonction dérivée.
(b) Montrer que f ne vérifie pas le *TAF*. *(Raisoner par l'absurde)*.

0.3. Maple:

Declarer une fonction :

```
> f:=x->sin(x**2+2*x-1);
```

$$f := x \to \sin(x^2 + 2\,x - 1)$$

Calculer son image en un point :

```
> f(1);
```

$$\sin(2)$$

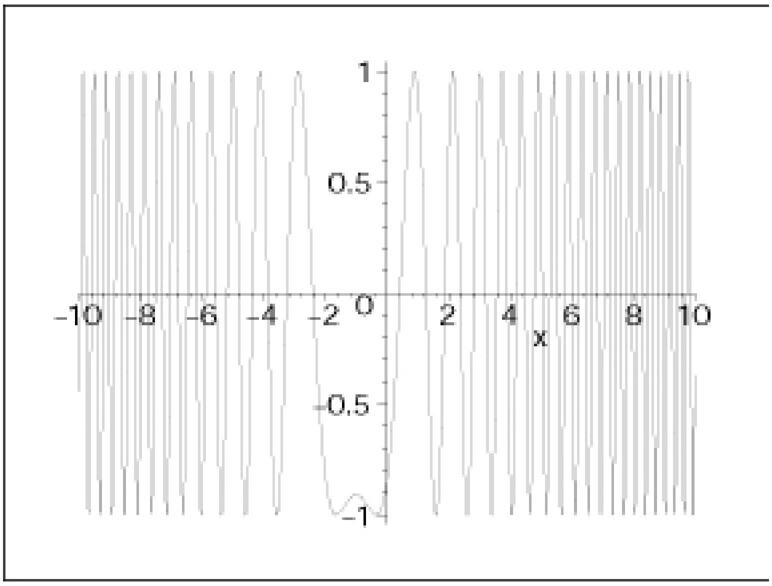
Calculer sa limite en un point :

```
> limit(f(x),x=0);
```

$$-\sin(1)$$

Dessiner sa courbe sur un intervalle :

```
> plot(f(x),x=-10..10);
```



La dériver :

```
> diff(f(x),x);
```

$$\cos(x^2 + 2\,x - 1)\,(2\,x + 2)$$

Sa fonction dérivée :

```
> g:=D(f);
```

$$g := x \to \cos(x^2 + 2\,x - 1)\,(2\,x + 2)$$

La dériver n fois (3 fois par exemple) :

```
> diff(f(x),x$3);
```

$$-\cos(x^2 + 2\,x - 1)\,(2\,x + 2)^3 - 6\sin(x^2 + 2\,x - 1)\,(2\,x + 2)$$

FIN.