Résumé de cours : *Déterminants. Systèmes linéaires.*

MPSI-Maths.
Mr Mamouni : *myismail1@menara.ma*

Source disponible sur :
©http://www.chez.com/myismail

Table des matières

1 Formes n-linéaires. 1

1.1 Formes bilinéaires. 1

1.2 Formes n-linéaires. 2

2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée. 2

3 Déterminant d'un endomorphisme. 3

4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n. 3

5 Systèmes linéaires. 4

1 Formes n-linéaires.

1.1 Formes bilinéaires.

Définition 1. *On appelle forme bilinéaire sur E, toute application* $\begin{array}{rccc}\varphi: & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & (x,y) & \longmapsto & \varphi(x,y)\end{array}$ *linéaire par rapport à l'une des variables fixant l'autre, autrement dit :*

$$\varphi(x_1+\lambda x_2,y)=\varphi(x_1,y)+\lambda\varphi(x_2,y)$$
$$\varphi(x,y_1+\lambda y_2)=\varphi(x,y_1)+\lambda\varphi(x,y_2)$$

Propriétés.

Soit φ une forme bilinéaire sur E, $(x,y)\in E^2$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, on a les résultats suivants :

- $\varphi(\lambda x,\mu y)=\lambda\mu\varphi(x,y)$.
- $\varphi(x,y)=0$ si $x=0_E$ ou $y=0_E$.

Vocabulaire.

Soit φ une forme bilinéaire sur E, on dit que :

- φ est symétrique *si et seulement si* $\varphi(x,y)=\varphi(y,x) \quad \forall (x,y)\in E^2$.
- φ est antisymétrique ou bien alternée *si et seulement si* $\varphi(x,y)=-\varphi(y,x) \quad \forall (x,y)\in E^2$.

Propriétés.

Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x,y)\in E^2$, et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ on a les résultats suivants :
- $\varphi(x,x)=0$.
- $\varphi(x,y+\lambda x)=\varphi(x,y)$.
- $\varphi(x,y)=0$ si $\{x,y\}$ est liée.

Théoréme 1. *Toutes les formes bilinéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 sont proprtionnelles.*

1.2 Formes n-linéaires.

Définition 2. *On appelle forme n-linéaire sur E, toute application*
$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \underbrace{E\times\ldots\times E}_{n\ fois} & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ & (x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \varphi((x_1,\ldots,x_n))\end{array}$$
linéaire par rapport à chacune de ses variables en fixant les autres, autrement dit :
$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i,y_2,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(x_i,y_2,\ldots,y_n)$$
Linéarité par rapport à la première variable
$$\varphi\left(y_1,\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i,y_3,\ldots,y_n\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(y_1x_i,y_3,\ldots,y_n)$$
Linéarité par rapport à la deuxième variable
$$\varphi\left(y_1,\ldots,y_{n-1},\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_i\varphi(y_1,\ldots,y_{n-1},x_i)$$
Linéarité par rapport à la dernière variable

Propriétés.

Soit φ une forme n-linéaire sur E, $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$, on a les résultats suivants :
- $\varphi(\lambda_1x_1,\ldots,\lambda_nx_n)=\prod_{i=1}^n\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ si l'un des x_i est nul.

Vocabulaire.

Soit φ une forme n-linéaire sur E, on dit que :
- φ est symétrique *si et seulement si* : $\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=\varphi(x_1,\ldots,x_n) \quad \forall (x_1,\ldots,x_n)\in E^n$.
- φ est antisymétrique *si et seulement si* $\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)\varphi(x_1,\ldots,x_n) \quad \forall (x_1,\ldots,x_n)\in E^n$.
- $\varphi(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=-\varphi(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$, $\forall (x_1,\ldots,x_n)\in E^n, \forall 1\leq i\neq j\leq n$.

Propriétés.

Soit φ une forme bilinéaire, alors φ est alternée *si et seulement si* elle est antisymétrique.

Soit φ une forme bilinéaire alternée sur E, $(x_1,\ldots,x_n)\in E^n$, et $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ on a les résultats suivants :
- $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ si $\exists i\neq j$ tel que $x_i=x_j$.
- $\varphi\left(x_1,\ldots,x_i+\sum_{j\neq i}\lambda_jx_j,\ldots,x_n\right)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)$.
- $\varphi(x_1,\ldots,x_n)=0$ si $\{x_1,\ldots,x_n\}$ est liée.

Théoréme 2. *Toutes les formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n sont proprtionnelles.*

2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée.

Définition 3. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E=n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, l'unique forme n-linéaire alternée définie sur E^n notée $\det_{\mathcal{B}}$ vérifiant la relation suivante :* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})=1$

Propriétés.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et $\mathcal{B}'$ famille d'éléments de E tel que $\text{card}\mathcal{B}' = \dim E$, on a les résultats suivants :

- $\mathcal{B}'$ est liée *si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 0$.
- $\mathcal{B}'$ est libre *si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.
- $\mathcal{B}' = \{x, y\}$ est une base de E *si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$, et dans ce cas on a : $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}$

Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

Orienter E revient à se fixer une base $\mathcal{B}_0$, toute autre base $\mathcal{B}$ est dite directe *si et seulement si* $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$, dans le cas contraire c'est à dire si $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$ elle est dite indirecte.
En général les bases canoniques sont directes et orientent l'espace vectoriel .

Équation d'une droite du plan.

Si D est la droite du plan passant par le point A est dirigée par le vecteur $\vec{u}$, alors son équation s'obtient à l'aide da la relation suivante :
$M \in D \Longleftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\vec{AM}, \vec{u}) = 0$ où $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3 Déterminant d'un endomorphisme.

Définition 4. *Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme, alors $\det_{\mathcal{B}} u(\mathcal{B})$ ne dépond pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E, on pose alors $\det(u) = \det_{\mathcal{B}} u(\mathcal{B})$ et on l'appelle le déterminant de u.*

Propriétés.

Soit $u, v : E \longrightarrow E$ deux endomorphismes de E tel que $\dim E = n$, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (x_1, \ldots, x_n)$ famille d'élements de E, on a les résultats suivants :

- $\det(id_E) = 1$.
- $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}')) = \det(u)\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.
- $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v)$.
- u est un automorphisme de E *si et seulement si* $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

4 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n.

Définition 5. *Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$ est par définition le déterminant de ses vecteurs colonnes dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Notation.
Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, son déterminant se note aussi $|a_{i,j}|$.

Propriétés.

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$
- Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, de base $\mathcal{B}$ et u un endomorphisme de E, alors : $\det u = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$.
- $\det(I_n) = 1$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, alors $\det A = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$.
- Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall\, 1 \leq j \leq n$ où $A_{i,j}$ est la matrice obtenue en enlevant la i–ème ligne et j–ème colonne, $\det(A_{i,j})$ s'appelle cofacteur d'indice (i, j), la matrice formée par ses cofacteurs s'appelle comatrice de A et se note $Com(A)$. On dit qu'on a developpé le déterminant suivant la j–ème colonne.
- Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{i,j}) \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$. On dit qu'on a developpé le déterminant suivant la j–ème colonne.
- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible avec $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det(P)$ où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
- $A = (a_{i,j})$ est inversible *si et seulement si* $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \text{ avec } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^{t}Com(A)$$

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- Si P est inversible alors $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.
- λ est une valeur propre de A *si et seulement si* λ racine du polynôme $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$, appelé polynôme caractéristique de A.
- Toute matrice qui admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5 Systèmes linéaires.

On appelle système linéaire à n équation et p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$, tout système d'équations de la forme

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Un tel système peut s'écrire matriciellement sous la forme $AX = b$ où $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice du système, $b = (b_i)_{1\leq i\leq n}$ s'appelle son second membres, et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ sont les inconnues.
Le système est dit compatible *si et seulement si* il admet des solutions. On a alors le résultat suivant :
$(\mathcal{S})$ est compatible *si et seulement si* $b \in \mathrm{Im}(A)$ *si et seulement si* b est combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice A, au fait résoudre $(\mathcal{S})$ revient à chercher les coefficients de cette combinaison linéaire.
Le système $AX = 0$ s'appelle système homogène, ou sans second membre, son ensemble de solutions est exactement le $\mathbb{K}$-ev $\ker(A)$ de dimension $p - r$ où $r = rg(A)$.
L'ensemble de solutions du système $(\mathcal{S})$ est exactement $X_0 + \ker(A)$, où X_0 est une solution particulière, autrement dit : toute solution X de l'équation $AX = b$ s'écrit sous la forme $X = X_0 + X_1$ où X_0 est une solution particulière et $X_1 \in \ker(A)$.
Si $\mathrm{rg}(A) = r$, alors toutes les inconnues s'écrivent seulement en fonction de $p - r$ inconnues appelées inconnues principales
Le systéme est dit de Crammer lorsque la matrice A est carrée inversible, c'est à dire $n = p = r$, dans ce cas il a admet une unique solution $X = A^{-1}b$.
Il est possible d'inverser la matrice A, en résolvant le systéme $AX = Y$ et exprimer les coefficients de X en fonction de ceux de Y ce qui donnera le système $BY = X$, on a alors $B = A^{-1}$.
Si A est inversible, alors l'une solution $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ du système $AX = b$ s'obtient à l'aide des formules suivantes : $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$ où A_i est la matrice obtenue en remplaçant dans A la i–ème colonne par le second membre b.

Fin.