بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ عَلَى اللَّهِ فَلِيَتَوَكَّلِ المُتَوَكِّلُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

Résumé de cours: *Développements limités*

Sup-MPSI, CPGE G.S. High Tech, Rabat

27 octobre 2008

Blague du jour :
Trois statisticiens vont à la chasse au canard. Un canard décolle. Le premier tire et passe dix centimètres au-dessus. Le second tire et passe dix centimètres en-dessous. Le troisième, tout sourire : "c'est bon les gars, on l'a eu !"

Mathématicien du jour : Young
William Henry Young (1863-1942) est un mathématicien anglais. Ses études ont principalement porté sur la théorie de la mesure, les intégrales de Lebesgue, les séries de Fourier et le calcul différentiel. Il apporta de brillantes contributions à l'analyse complexe. Il était membre de la *Royal Society* en 1907, lauréat de la *Médaille Sylvester* en 1928 et président de l'*union mathématique internationale* de 1929 à 1936. Il collaborait avec sa femme, mathématicienne aussi, pour rédiger ses livres.

Vocabulaire.

- **Dans tout tout ce qui suit on notera $\varepsilon(x)$, toute fonction de x qui tend vers 0 quand x tend vers 0.**
- **On dit que f admet un developpement limité au voisinage de 0 à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ *si et seulement si* $\exists (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que $f(u) = a_0 + a_1 u + \ldots a_n u^n + o(u^n)$, qu'on notera en abreviation $DL_n(0)$.**
- **Si f est continue en 0, son $DL_0(0)$ est $f(u) = f(0) + \varepsilon(u)$.**
- **Si f est dérivable en 0, son $DL_1(0)$ est $f(u) = f(0) + f'(0)u + u\varepsilon(u)$.**
- **Pour tout $a \neq 0$, le $DL_n(a)$ de f s'obtient en faisant à partir du $DL_0(0)$ de la fonction $g(u) = f(a+u)$ où $u = x - a$.**
- **Si $n \leq m$, le $DL_n(0)$ s'obtient à partir du $DL_m(0)$ en éliminant dans celui–ci les puissances qui dépassent n, on dit qu'on a tronqué à l'ordre n.**
- **La partie principale d'une fonction au voisinage de 0 est par définition la plus petite puissance, munie de son coefficient, qui apparait dans tous les $DL_n(0)$ possibles.**
- **On dit que f admet un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de ∞, $DAS_n(\infty)$ *si et seulement si* la fonction $g(u) = f(\frac{1}{x})$ où $u = \frac{1}{x}$ admet un $DL_n(0)$, ce $DL_n(0)$ de g est par définition le $DAS_n(\infty)$ de f.**
- **Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ en 0, alors elle y admet un $DL_n(0)$ obtenu à l'aide de la formule suivante dite de *Taylor–Young*.**

  $$f(u) = f(0) + f'(0)u + \ldots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}u^n + u^n\varepsilon(u)$$

Opération sur les $DL_n(0)$. On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$, on a les propriétés suivantes :

- **Somme :Le $DL_n(0)$ de $f+g$ est obtenu en faisant la somme de celui de f avec celui de g.**
- **Produit : Le $DL_n(0)$ de fg est obtenu en faisant le produit de celui de f avec celui de g, mais en tronquant à l'ordre n.**
- **Dérivée : Le $DL_n(0)$ de f' est obtenu en dérivant le $DL_{n+1}(0)$ de f.**
- **Primitive : Le $DL_n(0)$ de toute primitive F de f est obtenu en intégrant le $DL_{n-1}(0)$ de f et en ajoutant la constante $F(0)$.**
- **Quotient : Si le $DL_n(0)$ de f est $f(u) = a_0 + a_1 u + \dots a_n u^n + o(u^n)$ et si $a_0 \neq 0$, alors le $DL_n(0)$ de $\dfrac{1}{f}$ est obtenu en à partir du $DL_n(0)$ de $g(v) = \dfrac{1}{a_0}\dfrac{1}{1+v}$ où $v = \dfrac{a_1 u + \dots a_n u^n}{a_0}$.**
- **Rapport : Le $DL_n(0)$ de $\frac{f}{g}$ est obtenu en faisant le produit de celui de f avec celui de $\dfrac{1}{g}$.**
- **Composé : Si le $DL_n(0)$ de f est $f(u) = a_0 + a_1 u + \dots a_n u^n + u^n\varepsilon(u)$ et si $a_0 = 0$, alors le $DL_n(0)$ de gof est obtenu en remplaçant dans le $DL_n(0)$ de g la variable u par l'expression $a_1 u + \dots a_n u^n$, en tronquant toujours à l'ordre n.**

Formules usuelles			
Cas généraux		**Cas particuliers**	
$DL_n(0)$	$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x)$
$DL_n(0)$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon(x)$
$DL_n(0)$	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
$DL_n(0)$	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + x^n\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
$DL_{2n}(0)$	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + x^{2n}\varepsilon(x)$	$DL_4(0)$	$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon(x)$
$DL_{2n}(0)$	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + x^{2n}\varepsilon(x)$	$DL_4(0)$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$
$DL_{2n}(0)$	$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$	$DL_4(0)$	$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + x^{2n}\varepsilon(x)$
$DL_{2n+1}(0)$	$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$	$DL_3(0)$	$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + x^3\varepsilon(x)$
$DL_{2n}(0)$	$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$	$DL_4(0)$	$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$
$DL_n(0)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{(k)!} x^k + x^n\varepsilon(x)$	$DL_2(0)$	$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + x^2\varepsilon(x)$
$DL_2(0)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$	$DL_2(0)$	$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x)$